Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 5

УДК 533.6.011; 517.958

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В СЛОЕ БАРОТРОПНОЙ ЗАВИХРЕННОЙ ЖИДКОСТИ

Б. Н. Елемесова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматриваются математические модели, описывающие в длинноволновом приближении плоскопараллельные вихревые течения в слое баротропной жидкости со свободной границей. В классе течений с монотонным по глубине профилем скорости доказана теорема существования решений типа простых волн системы уравнений движения. Показано, что в общем случае может наблюдаться аномальное поведение простых волн: наряду с простыми волнами понижения уровня жидкости могут существовать и простые волны повышения уровня жидкости, определенные для всех $t > 0$. Для политропного уравнения состояния найден класс точных решений, описывающийся неполными бета-функциями.

В [1] получены условия гиперболичности системы уравнений для вихревых течений в случае монотонного по глубине профиля скорости. Точные решения в классе простых волн для несжимаемой жидкости построены в [2, 3]. Общая теорема существования простых волн, распространяющихся в слое завихренной несжимаемой жидкости, доказана в [4]. Для политропного уравнения состояния с показателем политропы γ, близким к 1 ($\rho = Cp^{\gamma}$), в [5] определено асимптотическое поведение решения типа простой волны вблизи свободной поверхности. В [6] исследуются разрывные решения и построена математическая модель гидравлического прыжка.

1. Постановка задачи. Рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{gathered} u_T + uu_X + vu_Y + \rho^{-1}p_X = 0, \quad \rho^{-1}p_Y = -g, \quad \rho_T + u\rho_X + v\rho_Y + \rho(u_X + v_Y) = 0, \\ \rho = \rho(p), \quad \rho'(p) > 0, \quad u(X,0,Y) = u_0(X,Y), \quad h(X,0) = h_0(X), \\ Y = 0: \quad v = 0, \qquad Y = h(X,T): \quad p = p_0 = \text{const}, \quad h_T + uh_X = v, \end{gathered} \tag{1.1}$$

которая описывает в длинноволновом приближении течение слоя идеальной баротропной жидкости со свободной границей $Y = h(X,T)$ над ровным дном в поле силы тяжести (g — ускорение свободного падения). Математическая модель (1.1) возникает, если учесть, что $H_0/L_0 \ll 1$, где H_0, L_0 — характерные вертикальный и горизонтальный масштабы соответственно.

Введением смешанных эйлерово-лагранжевых независимых переменных x, t, λ ($X = x$, $T = t$, $Y = \Phi(x,t,\lambda)$ [1]) задача (1.1) сводится к задаче Коши в фиксированной области:

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + \Bigl(\rho\Bigl(p_0 + \int\limits_0^1 H(x,t,\nu)\,d\nu\Bigr)\Bigr)^{-1} \int\limits_0^1 H_x(x,t,\nu)\,d\nu = 0, \quad H_t + (uH)x = 0, \\ u(x,0,\lambda) = u_0(x,\lambda h_0(x)), \quad H(x,0,\lambda) = H_0(x,\lambda) > 0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \end{gathered} \tag{1.2}$$

($H(x,t,\lambda) = \rho(x,t,\lambda)\,g\Phi_\lambda$ — новая неизвестная функция).

Если u, H — решение (1.2), то исходные неизвестные v, p, ρ, h и функция замены $\Phi = \Phi(x,t,\lambda)$ находятся из соотношений

$$p(x,t,\lambda) = p_0 + \int\limits_\lambda^1 H(x,t,\nu)\,d\nu, \quad \rho = \rho(p), \quad \Phi = \int\limits_0^\lambda H(x,t,\nu)(\rho g)^{-1}d\nu, \tag{1.3}$$

$$v = \Phi_t + u\Phi_x, \quad h = \Phi(x,t,1).$$

Заметим, что одним из решений системы уравнений (1.2) является решение вида $u = u(\lambda)$, $H = H(\lambda)$, которое в исходных переменных (X,Y,T) описывает сдвиговый поток ($u = u(Y)$, $v = 0$, $h = h_0 = \text{const}$).

Определим решение типа простой волны. Согласно [1], система уравнений (1.2) имеет характеристики $dx/dt = k_i$ дискретной части спектра и характеристики $dx/dt = u(x,t,\lambda)$ ($\lambda = \text{const}$) непрерывной части спектра. Характеристические корни дискретной части спектра определяются уравнением

$$\rho\Big(p_0 + \int_0^1 H(x,t,\nu)\,d\nu\Big) = \int_0^1 H(x,t,\nu)(u(x,t,\nu) - k_i)^{-2} d\nu, \tag{1.4}$$

которое всегда имеет вне интервала изменения функции $u(x,t,\lambda)$ только два вещественных корня (k_1, k_2) таких, что $k_1 < \min\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} u(x,t,\lambda)$, $k_2 > \max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} u(x,t,\lambda)$.

Решением типа простой волны системы уравнений (1.2) будем называть решение вида $u = u(\eta(x,t),\lambda)$, $H = H(\eta(x,t),\lambda)$, где $\eta(x,t)$ — функция переменных x, t. В дальнейшем в качестве параметра простой волны выберем функцию распределения давления на дне:

$$\int_0^1 H(x,t,\lambda)\,d\lambda = \eta(x,t). \tag{1.5}$$

Для системы уравнений (1.1) в силу соотношений (1.3) решение типа простой волны есть решение вида

$$p = p_1(\eta(X,T),Y), \quad u = u_1(\eta(X,T),Y), \quad v = h_X v_1(\eta(X,T),Y). \tag{1.6}$$

В данной работе исследуются простые волны, удовлетворяющие для всех λ условию

$$k = -\eta_t/\eta_x \neq u. \tag{1.7}$$

Для простых волн из (1.2) получим уравнения

$$u_\eta = -(\rho(p_0 + \eta)(u-k))^{-1}, \qquad H_\eta = H(\rho(p_0+\eta))^{-1}(u-k)^{-2}. \tag{1.8}$$

Интегрирование второго уравнения (1.8) по λ от 0 до 1 с учетом (1.5) дает, что k должно удовлетворять характеристическому уравнению (1.4). Для определенности исследуем простые волны, отвечающие правому характеристическому корню $k = k_2$ (случай $k = k_1$ рассматривается аналогично). Удобно получить дифференциальное уравнение для k, продифференцировав (1.4) на решении (1.8):

$$k'(\eta) = \Big(\rho' - \frac{3}{\rho(p_0+\eta)}\int_0^1 H(u-k)^{-4} d\nu\Big)\Big/ 2\int_0^1 H(u-k)^{-3} d\nu. \tag{1.9}$$

Для системы (1.8), (1.9) естественно поставить задачу Коши со следующими данными при $\eta = \eta_0$ ($\eta_0 = \text{const}$):

$$H(\eta_0,\lambda) = H_0(\lambda), \qquad u(\eta_0,\lambda) = u_0(\lambda), \qquad k(\eta_0) = k_0. \tag{1.10}$$

Здесь k_0 — правый корень уравнения (1.4) при $u = u_0(\lambda)$, $H = H_0(\lambda)$ ($k_0 > \max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} u_0(\lambda)$).

Если u, H, k — решение задачи (1.8)–(1.10), то соотношение (1.7) является уравнением для определения $\eta = \eta(x,t)$. Из (1.7) следует, что η постоянна вдоль характеристик $dx/dt = k_2$ системы уравнений (1.2). Задача (1.8)–(1.10) является задачей о примыкании непрерывного решения типа простой волны к заданному сдвиговому потоку по характеристике, соответствующей $\eta = \eta_0$ (η_0 — постоянная глубина сдвигового потока в переменных x, λ).

Рассмотрим альтернативную постановку задачи о нахождении простой волны. Произведем замену переменных в уравнениях (1.1). Обозначим $\tau = dp/dt = p_T + up_X + vp_Y$. Будем считать x, p, t, где $X = x$, $T = t$, независимыми переменными, а u, Y, τ — новыми неизвестными величинами. Это можно сделать в силу монотонной зависимости p от Y:

$$p_Y = -\rho(p)\, g. \tag{1.11}$$

Система уравнений (1.1) преобразуется к виду

$$u_t + uu_x + \tau u_p + gY_x = 0, \quad Y_p = -(\rho(p)\, g)^{-1}, \quad u_x + \tau_p = 0. \tag{1.12}$$

Заметим, что система (1.12) близка к системе уравнений длинноволнового приближения несжимаемой жидкости (дивергенция «скорости» (u, τ) равна нулю). Неизвестная граница $Y = h(X, T)$ в переменных (x, p) станет известной, и граничное условие преобразуется к виду

$$p = 0: \quad \tau = 0 \tag{1.13}$$

(без ограничения общности можно рассматривать $p_0 = 0$, так как случай $p_0 \neq 0$ аналогичен). Известная граница $Y = 0$ в новых переменных станет неизвестной. Если $\eta(x, t)$ — искомое распределение давления на дне $Y = 0$, то на неизвестной границе $p = \eta(x, t)$ должно выполняться соотношение

$$\eta_t + u\eta_x = \tau. \tag{1.14}$$

Если u, τ, η — решение задачи (1.12)–(1.14), то h определяется из соотношения

$$h = \int\limits_0^{\eta(x,t)} (\rho(s) g)^{-1} ds, \tag{1.15}$$

полученного интегрированием (1.11). При этом $p(X, Y, T) = F(g(h - Y))$ можно найти обращением зависимости

$$h - Y = \int\limits_0^p (\rho(s)\, g)^{-1} ds. \tag{1.16}$$

Вертикальная скорость задается соотношением $v = Y_t + uY_x + \tau Y_p$. В переменных (x, p, t) простая волна в силу (1.15), (1.16) задается соотношениями $u = u(\eta(x, t), p)$, $\tau = \eta_x \tau(\eta(x, t), p)$.

В силу уравнений (1.12) можно ввести аналог функции тока $\Psi = \Psi(\eta(x, t), p)$ с помощью соотношений $u = \Psi_p$, $\tau = -\eta_x \Psi_\eta$. В силу условия на границе $p = \eta(x, t)$

$$k = -\eta_t/\eta_x = -(\Psi_p + \Psi_\eta)(\eta, \eta) = -[\Psi(\eta, \eta)]'_\eta. \tag{1.17}$$

Из первого уравнения системы (1.12) с учетом (1.17) получим

$$(\Psi_p - [\Psi(\eta, \eta)]'_\eta)\, \Psi_{p\eta} - \Psi_p \Psi_{pp} + \rho^{-1}(p) = 0. \tag{1.18}$$

На границе $p = 0$ должно выполняться условие ($\tau = 0$)

$$\Psi_\eta(\eta, 0) = 0. \tag{1.19}$$

Таким образом, задача о нахождении простой волны сводится либо к задаче Коши (1.8)–(1.10), либо к задаче (1.18), (1.19).

2. Существование простых волн. Вопрос о существовании простых волн будем рассматривать для монотонного профиля скорости $u_{0\lambda} > 0$. Из (1.8) следует, что $(u_\lambda H^{-1})_\eta = 0$. Тогда соотношение

$$u_\lambda H^{-1} = u_{0\lambda} H_0^{-1} \tag{2.1}$$

является интегралом системы (1.8), (1.9). В силу (2.1) $u_\lambda > 0$ в области определения простой волны. Кроме того, характеристическое уравнение (1.4) также является интегралом системы уравнений (1.8)–(1.10). Докажем теорему существования решения задачи (1.8)–(1.10). Предварительно установим априорные оценки решения.

Лемма. *Пусть* u, H, k — *решение задачи* (1.8)–(1.10) *и выполнены неравенства* $0 < \omega_1 \leqslant \omega = u_{0\lambda} H_0^{-1} \leqslant \omega_2 < \infty$, *где* $\omega_1 = \min\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} \omega(\lambda)$, $\omega_2 = \max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} \omega(\lambda)$. *Тогда справедливы оценки*

$$\frac{\sqrt{\omega_1^2\eta^2 + 4\omega_1^2\eta/(\rho\omega_2^2)} - \omega_1\eta}{2} < |u - k| < \frac{\sqrt{\omega_2^2\eta^2 + 4\omega_2\eta/(\rho\omega_1)} + \omega_2\eta}{2}. \tag{2.2}$$

Доказательство. В силу (2.1) имеем

$$\omega_1\eta \leqslant u_2 - u_1 = \int_0^1 \omega H(\eta,\lambda)\, d\lambda \leqslant \omega_2\eta, \tag{2.3}$$

где $u_2 = u(\eta, 1)$; $u_1 = u(\eta, 0)$. Из (1.4) вытекает

$$\rho(p_0 + \eta) > \omega_2^{-1} \int_0^1 u_\lambda (u - k)^{-2}\, d\lambda = \frac{u_2 - u_1}{\omega_2 (u_2 - k)(u_1 - k)}. \tag{2.4}$$

Поскольку $(u_2 - k)(u_1 - k) > 0$, $u_1 - k = (u_1 - u_2) + (u_2 - k)$, то из (2.3), (2.4) следует оценка снизу:

$$|u_2 - k| > \frac{\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + 4(u_2 - u_1)(\rho\omega_2)^{-1}} - (u_2 - u_1)}{2} > \frac{\sqrt{\omega_1^2\eta^2 + 4\omega_1^2\eta\rho^{-1}\omega_2^{-2}} - \omega_1\eta}{2}.$$

Аналогично получается оценка сверху: $|u_1 - k| < \left(\sqrt{\omega_2^2\eta^2 + 4\,\omega_2\eta(\rho\omega_1)^{-1}} + \omega_2\eta\right)/2$. Утверждение леммы следует из неравенств $|u_2 - k| \leqslant |u - k| \leqslant |u_1 - k|$. Лемма доказана.

Будем опираться на теорему существования решения задачи Коши для нелинейного уравнения в банаховом пространстве B:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{2.5}$$

Здесь $f(x,t)$ — функция вещественного аргумента t и переменного $x \in B$, принимающая значения в пространстве B.

Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна по t и удовлетворяет при $t \in [a,b]$, $||x - x_0|| \leqslant \theta$ условиям $||f(x,t)|| \leqslant M_1$, $||f(x_1,t) - f(x_2,t)|| \leqslant M_2 ||x_1 - x_2||$. Тогда, согласно [7], существует число $\delta_1 > 0$ ($\delta_1 = \min(\theta M_1^{-1}, M_2^{-1})$) такое, что на интервале $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1) \cap [a,b]$ задача Коши (2.5) имеет единственное решение $x = \varphi(t)$, остающееся в шаре: $||\varphi(t) - x_0|| \leqslant \theta$.

Чтобы воспользоваться приведенным результатом, рассмотрим банахово пространство B вектор-функций $\mathbf{U} = (u, H, k)$ действительного аргумента $\lambda \in [0,1]$

$$B = \{(u, H, k)/u \in C^1[0,1], H \in C\,[0,1], k \in R\}$$

с нормой

$$||\mathbf{U}|| = \max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} |u_\lambda| + \max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} |u| + \max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} |H| + |k|,$$

где $C^1[0,1]$ — множество непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$; $C\,[0,1]$ — множество непрерывных функций; R — числовая прямая.

Пусть $\mathbf{U}_0 = (u_0, H_0, k_0) \in B$. Так как u_0, H_0 непрерывны на замкнутом промежутке $[0,1]$ и $u_0 - k_0 < 0$, $H_0 > 0$, то найдется постоянная $\theta > 0$ такая, что $|u_0 - k_0| \geqslant |u_0(1) - k_0| > \theta$, $\min\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} H_0 > \theta$. В пространстве B рассмотрим шар: $||\mathbf{U} - \mathbf{U}_0|| < \theta/2$. Покажем, что для $\mathbf{U}$ из шара выполнены неравенства $|u - k| > \theta/2$, $|H| > \theta/2$. Действительно,

$$|u - k| \geqslant |u_0 - k_0| - ||\mathbf{U} - \mathbf{U}_0|| > \theta/2, \quad \min_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} |H| > \min_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} |H_0| - ||\mathbf{U} - \mathbf{U}_0|| > \theta/2. \tag{2.6}$$

Тогда в силу непрерывности оператора $f(\mathbf{U}, h)$ в области (2.6) найдутся постоянные $M_1(\theta, \mathbf{U}_0)$, $M_2(\theta, \mathbf{U}_0)$ такие, что

$$||f(\mathbf{U}, \eta)|| \leqslant M_1(\theta, \mathbf{U}_0), \quad ||f(\mathbf{U}_2, \eta) - f(\mathbf{U}_1, \eta)|| \leqslant M_2(\theta, \mathbf{U}_0)||\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1||. \tag{2.7}$$

Используя приведенный выше результат, получим факт существования и единственности решения задачи (1.8)–(1.10) на интервале $[\eta_0 - \delta_1, \eta_0 + \delta_1]$ в пространстве B.

Теорема. *Пусть u_0, H_0 удовлетворяют условиям леммы. Тогда решение задачи* (1.8)–(1.10) *существует на любом конечном интервале $\eta \in [\delta, A]$, где $\delta > 0$, $A < \infty$, и принадлежит пространству B.*

Доказательство. При $\mathbf{U} = (u, H, k) \in B, \eta \in [\delta, A]$ в силу (2.2) справедливы неравенства

$$\frac{\sqrt{\omega_1^2\delta^2 + 4\,\omega_1^2\delta/(\rho(p_0 + A)\,\omega_1^2)} - \omega_1\delta}{2} < |u - k| < \frac{\sqrt{\omega_2^2 A^2 + 4\,\omega_2 A/(\rho(p_0 + \delta)\,\omega_1)} + \omega_2 A}{2}. \tag{2.8}$$

Продифференцировав первое уравнение (1.8) по λ, а затем проинтегрировав по η, получим

$$u_\lambda(\eta, \lambda) = u_{0\lambda}(\lambda) \exp\Big\{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \rho^{-1}(s)(u - k)^{-2} ds\Big\}. \tag{2.9}$$

Интегрированием второго уравнения (1.8) находим

$$H(\eta, \lambda) = H_0(\lambda)\, \exp\Big\{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \rho^{-1}(s)(u - k)^{-2} ds\Big\}. \tag{2.10}$$

Тогда в силу (2.8)–(2.10) условия (2.7) выполняются с одними и теми же константами M_1, M_2, зависящими только от δ, A и $\mathbf{U}_0 = (u_0, H_0, k_0)$. Поэтому, построив решение на интервале $[\eta_0 - \delta_1, \eta_0 + \delta_1]$, можно продолжить его единственным образом на весь интервал $[\delta, A]$. Теорема доказана.

Простая волна будет построена, если решить уравнение

$$\eta_t + k\,(\eta)\,\eta_x = 0. \tag{2.11}$$

Согласно известным фактам теории квазилинейных уравнений [8], свойства решений (2.11) зависят от того, будет или нет производная $k'(\eta)$ знакоопределена (уравнение (2.11) удовлетворяет или не удовлетворяет условию выпуклости). Из уравнения (2.11) следует, что вдоль характеристик $dx/dt = k$

$$\eta_x = \eta_{0x}(1 + tk'(\eta_0)\,\eta_{0x}(x))^{-1}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) вытекает, что если $k'(\eta_0)\,\eta_0'(x) > 0$, то производная η_x остается ограниченной ($|\eta_x| \leqslant |\eta_{0x}|$) и решение уравнения (2.11) существует при любых t. Если же $k'(\eta_0)\,\eta_0'(x) < 0$, то решение (2.11) существует только для конечных t. Исследуем знак функции $k'(\eta)$. Если функция уравнения состояния $\rho = \rho(p_0 + \eta)$ такова, что выполняется неравенство

$$3\,\rho - \eta\rho'(p_0 + \eta) > 0 \tag{2.13}$$

(являющееся аналогом условия нормальности газа для системы (1.2) [6]), то $k'(\eta) > 0$. Действительно, так как

$$\rho^2 = \Big(\int\limits_0^1 H(u-k)^{-2}d\nu\Big)^2 \leqslant \eta\int\limits_0^1 H(u-k)^{-4}d\nu,$$

то числитель в правой части уравнения для k (1.9) отрицателен:

$$\rho' - \frac{3}{\rho}\int\limits_0^1 H(u-k)^{-4}d\nu \leqslant \rho' - \frac{3\rho}{\eta} < 0.$$

Учитывая, что $u - k < 0$, получим $k'(\eta) > 0$. В общем случае, как показано в [6], неравенство (2.13) может нарушаться даже тогда, когда исходное уравнение состояния баротропной среды удовлетворяет условию выпуклости. Тогда в определенном диапазоне изменения η производная $k'(\eta)$ может менять знак. В окрестности точек смены знака $k(\eta)$ имеет либо максимум, либо минимум (предполагается, что $k''(\eta) \neq 0$ в этих точках).

Пусть условие (2.13) не выполняется. Из неравенств

$$\rho' - \frac{3}{\omega_1\rho}\int\limits_0^1 \frac{u_\nu}{(u-k)^4}\,d\nu \leqslant \rho' - \frac{3}{\rho}\int\limits_0^1 \frac{H}{(u-k)^4}\,d\nu \leqslant \rho' - \frac{3}{\omega_2\rho}\int\limits_0^1 \frac{u_\nu}{(u-k)^4}\,d\nu$$

с учетом априорных оценок леммы $(u_2 - u_1)(\rho\omega_2)^{-1} \leqslant (u_1 - k)(u_2 - k) \leqslant (u_2 - u_1)(\rho\omega_1)^{-1}$ получим новые неравенства:

$$\rho' - \frac{3\,\omega_2^2}{\rho\omega_1^2} - \rho^2\,\frac{\omega_2^3}{\omega_1} \leqslant \rho' - \frac{3}{\rho}\int\limits_0^1 \frac{H d\nu}{(u-k)^4} \leqslant \rho' - \frac{3\,\omega_1^2}{\rho\omega_2^2} - \rho^2\,\frac{\omega_1^3}{\omega_2}.$$

Если функция $\rho = \rho(p_0 + \eta)$ и начальные данные таковы, что выполнено неравенство

$$\rho' - 3\,\omega_1^2/\rho\omega_2^2 - \rho^2\omega_1^3/\omega_2 < 0, \tag{2.14}$$

то $k'(\eta) > 0$ в области определения простой волны, несмотря на то что (2.13) не выполняется. Если на одной части интервала определения простой волны выполнено неравенство

$$\rho' - 3\omega_2^2/\rho\omega_1^2 - \rho^2\omega_2^3/\omega_1 > 0,$$

а на другой части интервала — неравенство (2.14), то заведомо в области простой волны $k'(\eta)$ меняет знак.

Будем называть простую волну *волной понижения (повышения) уровня*, если выполнено неравенство $\eta_t + u(\eta,1)\,\eta_x = (u(\eta,1) - k)\,\eta_x < 0$ (> 0), и *центрированной волной*, если $k(\eta) = x/t$.

Из (2.12) следует, что если $k'(\eta) > 0$, то градиентная катастрофа произойдет в волне повышения уровня, а волны понижения уровня существуют для всех $t > 0$. Если $k'(\eta) < 0$, то волны повышения уровня существуют для любых t, а волны понижения уровня — только для конечных t. Центрированные волны при $t > 0$ являются волнами понижения уровня ($\eta < \eta_0$), если $k'(\eta) > 0$ при всех η, и волнами повышения уровня ($\eta > \eta_0$), если

$k'(\eta) < 0$. Если $k'(\eta)$ меняет знак, то простая центрированная волна будет определена только для $\eta \in [\eta_0, \eta_*]$, где $k'(\eta_*) = 0$ (в центрированной волне наклон характеристик должен меняться монотонно).

Итак, простая волна в зависимости от исходного уравнения состояния и начальных данных существует или для любых $t > 0$, или только для конечных t. Смена знака производной $k'(h)$ имеет аналогию в динамике газа с аномальными термодинамическими свойствами. В общем случае могут существовать простые волны как понижения, так и повышения уровня, определенные при всех $t > 0$.

3. Точные решения. Рассмотрим задачу построения простой волны (1.18), (1.19) для среды с политропным уравнением состояния: $\rho = p^{2\gamma}$, $0 < \gamma < 1/2$. Соотношения (1.15), (1.16) в этом случае интегрируются:

$$h = (2(\beta - 1)g)^{-1}\eta^{2(\beta-1)}, \qquad Y/h = 1 - (p/\eta)^{2(\beta-1)}. \tag{3.1}$$

Уравнение (1.18) допускает однопараметрическую группу растяжений: $p \to bp$, $\eta \to b\eta$, $\Psi \to b^{3/2-\gamma}\Psi$ (b — параметр группы). Построим решение уравнения (1.18), инвариантное относительно указанной группы. Согласно известному алгоритму отыскания инвариантных решений, полагаем

$$\Psi(\eta, p) = \eta^{3/2-\gamma}\Psi_1(p/\eta), \tag{3.2}$$

где Ψ_1 — новая неизвестная функция одного аргумента. Пусть $\nu = p/\eta$, $\beta = 3/2 - \gamma$, $A = \Psi_1(1)$. Подставляя (3.2) в (1.18), получим уравнение для определения Ψ_1:

$$\beta(\nu A - \Psi_1)\,\Psi_1'' + (\beta - 1)(\Psi_1')^2 - \beta(\beta - 1)\,A\Psi_1' + 1 = 0. \tag{3.3}$$

Граничное условие (1.19) преобразуется к виду $\Psi_1(0) = 0$. В силу (3.3) функция $\Phi(\nu) = \nu A - \Psi_1(\nu)$ должна удовлетворять уравнению

$$-\beta\Phi\Phi'' + (\beta - 1)(A - \Phi')^2 - \beta(\beta - 1)\,A^2 + \beta(\beta - 1)\,\Phi' + 1 = 0 \tag{3.4}$$

и граничным условиям $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$. После замены $\Phi' = L(\Phi)$ уравнение (3.4) интегрируется:

$$\Phi = C(b_1 - L)^\alpha (L - b_2)^\delta. \tag{3.5}$$

Здесь b_1, b_2 — корни квадратного уравнения; $L^2 + (\beta - 2)\,AL + (1 - \beta)\,A^2 + 1/(\beta - 1) = 0$; $\delta = -\beta b_2(\beta - 1)^{-1}(b_1 - b_2)^{-1}$; $\alpha = \beta b_1(\beta - 1)^{-1}(b_1 - b_2)^{-1}$; C — произвольная постоянная. Граничные условия для функции Φ выполняются в точках $L = b_1$, $L = b_2$ при условии, что $\alpha > 0$, $\delta > 0$. Пусть $\nu = 0$ и 1 соответствует $L = b_2$ и b_1. Так как $L = d\Phi/d\nu$, то из (3.5) имеем

$$\nu = \frac{p}{\eta} = \int\limits_0^{(L-b_2)(b_1-b_2)^{-1}} z^{\delta-1}(1 - z)^{\alpha-1}dz \Big/ \int\limits_0^1 z^{\delta-1}(1 - z)^{\alpha-1}\,dz. \tag{3.6}$$

С учетом произведенных замен находим горизонтальную скорость u и скорость характеристик k:

$$u = \Psi_p = (\eta^\beta(\nu A - \Phi))'_p = \eta^{\beta-1}(A - L), \qquad k = \beta A\eta^{\beta-1}. \tag{3.7}$$

Из (3.6) в силу (3.1), (3.7) получим связь между u и Y:

$$\frac{Y}{h} = 1 - \left(\int\limits_0^{(A-b_2-u/\sqrt{2g(\beta-1)h})(b_1-b_2)^{-1}} z^{\delta-1}(1 - z)^{\alpha-1}\,dz \Big/ \int\limits_0^1 z^{\delta-1}(1 - z)^{\alpha-1}\,dz \right)^{2(\beta-1)}. \tag{3.8}$$

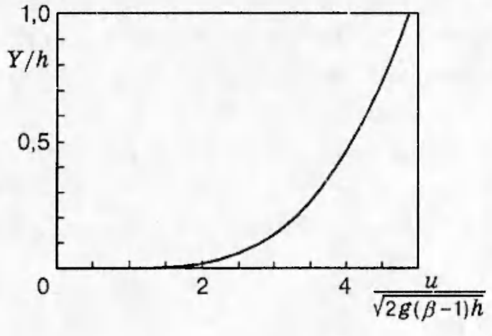

Рис. 1

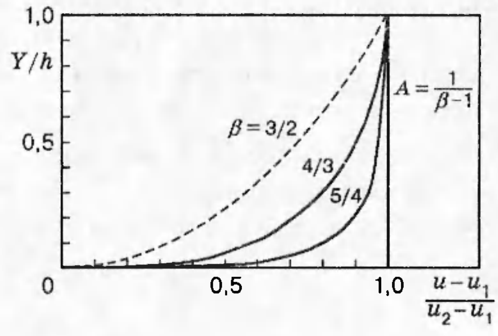

Рис. 2

Формула (3.8) определяет профиль скорости в простой волне $u = u(h(x,t), Y)$. Скорость изменяется от $u = u_1 = \sqrt{2g(\beta-1)h}(A-b_1)$ на дне ($Y = 0$ ($p = \eta(x,t)$)) до $u = u_2 = \sqrt{2g(\beta-1)h}(A-b_2)$ на свободной поверхности ($Y = h(X,T)$ ($p = 0$)). Для того чтобы выполнялись неравенства $\alpha > 0$, $\delta > 0$, достаточно потребовать $A^2 > (\beta-1)^{-2}$. Если $A > (\beta-1)^{-1} > 0$, то $k > u_{\max} = u_2$. Если $A < -(\beta-1)^{-1} < 0$, то $k < u_{\min} = u_1$. Случай $A^2 = (\beta-1)^{-2}$ дает $b_2 = 0$, $u = \eta^{\beta-1}A$, $k = \beta A\eta^{\beta-1}$, что соответствует течению без сдвига ($u_Y \equiv 0$). Заметим, что $\beta = 3/2$ отвечает несжимаемой жидкости ($\rho(p) = \text{const}$). При этом решение (3.8) с точностью до небольших преобразований совпадает с решением Фримана [2] (параметру a^2 из [2] здесь соответствует параметр $(2b_1 + b_2)/(4b_2 + 2b_1)$).

На рис. 1 показан профиль горизонтальной скорости для $\beta = 4/3$, $A^2 = 17, A > 0$. Формула (3.8) определяет Y/h как функцию от $(u-u_1)/(u_2-u_1)$.

На рис. 2 приведены графики зависимости $(u-u_1)/(u_2-u_1)$ от Y/h для $\beta = 3/2$, 4/3, 5/4 и $A = 5$. Вертикальная прямая соответствует $A = (\beta-1)^{-1}$ (течение без сдвига). В случае центрированной простой волны ($k(\eta) = x/t$) из (3.1) и (3.7) получим форму свободной поверхности: $h(X,T) = (2\beta^2(\beta-1)A^2g)^{-1}(X/T)^2$.

На рис. 3 представлены графики свободной поверхности для $\beta = 4/3$, $A^2 = 17$ и контактных поверхностей ($Y = Y(\mu, X/T)$ ($\mu = \text{const}$)) для различных μ (значение μ определяется так: $\mu = Y/h_0$ при $X = k_0T$).

В итоге установлено, что к любому сдвиговому потоку с монотонным по глубине профилем скорости может примыкать по характеристике простая волна, которая однозначно определяется заданным распределением давления на дне при $t = 0$. Установлено, что в зависимости от свойств монотонности функций $k(\eta)$ и $\eta(x,0)$ простая волна либо существует для всех $t > 0$, либо опрокидывается. В баротропной среде с уравнением состоя-

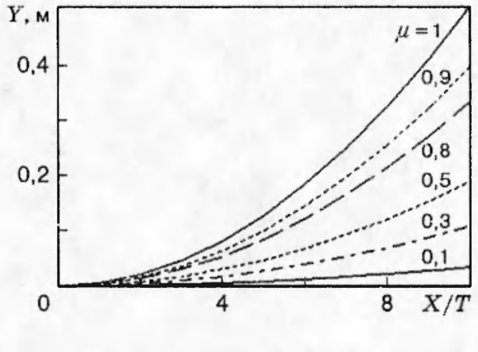

Рис. 3

ния, удовлетворяющим условию выпуклости, может наблюдаться аномальное поведение простых волн: существуют волны повышения уровня, которые не опрокидываются при $t > 0$. Получен класс точных решений системы уравнений длинных волн, которые описывают простые волны, распространяющиеся в слое баротропной жидкости со скоростью $k = \beta A\sqrt{2(\beta - 1)\,gh}$. Это решение является обобщением найденных Фриманом [2] простых волн в несжимаемой жидкости.

Автор выражает благодарность проф. В. М. Тешукову за внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
2. **Freeman N. C.** Simple waves on shear flows: Similarity solutions // J. Fluid Mech. 1972. V. 56, N 2. P. 257–263.
3. **Blythe P. A., Kazakia Y., Varley E.** The interaction of large amplitude shallow-water waves with an ambient shear water waves // Ibid. P. 241–255.
4. **Тешуков В. М.** Простые волны на сдвиговом потоке идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 48–57.
5. **Sachdev P. L., Varughese Philip.** Exact simple waves on shear flows in compressible barotropic medium // Stud. Appl. Math. 1988. V. 79. P. 193–203.
6. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении баротропной жидкости // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 73–81.
7. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
8. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 10/I 1996 г.,
в окончательном варианте — 4/III 1996 г.