Проблемы логики и методологии науки

УДК 51:101.8
DOI:
10.15372/PS20160102

В.М. Резников

Институт философии и права СО РАН, г. Новосибирск, ул. Николаева, 8, 630090
mathphil1976@gmail.com

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРЕБОВАНИЙ КОЛМОГОРОВА К ПРИМЕНЕНИЮ МАТЕМАТИКИ*

Считается, что условие Колмогорова относительно близости вероятности события и его частотных характеристик является заключением теоремы Бернулли и что если учитывается принцип Курно, то заключение верно на любой типичной выборке. В статье показано, что это утверждение верно в рамках субъективистской интерпретации теории вероятностей. Обосновано, что в объективистской интерпретации близость вероятности и частот понимается как устойчивость частот, т.е. как группирование частот в узкой области. Демонстрируется, что в такой интерпретации устойчивость частот является предусловием применения теоремы Бернулли и не зависит ни от теоремы, ни от принципа Курно.

Ключевые слова: принцип Курно, теорема Бернулли, устойчивость частот, субъективистская интерпретация вероятностей, объективистская интерпретация вероятностей, Колмогоров

V.M. Reznikov

Institute of Philosophy and Law, SB RAS, Novosibirsk, Nikolaeva str. 8, 630090, Russia
mathphil1976@gmail.com

METHODOLOGICAL ANALYSIS OF KOLMOGOROV'S CONDITIONS OF MATHEMATICS APPLICATION

There is a belief that Kolmogorov's condition about the closeness of event probability with frequency characteristics of an event is a conclusion of Bernoulli's theorem and that if Cournot's

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 15-07-03410-а.

principle is taken into account, the conclusion is true on any typical sampling. The article shows that this assertion is correct within the subjectivistic interpretation of the probability theory. The author proves that in the objectivistic interpretation the closeness of probability and frequencies is understood as the stability of frequencies, i.e. their grouping in a narrow field. He demonstrates that in this interpretation the frequencies stability is a precondition of an application of Bernoulli's theorem and it depends neither on the theorem nor on the principle.

Keywords: Cournot's principle, Bernoulli's theorem, frequencies stability, subjectivistic interpretation of the probability theory, objectivistic interpretation of the probability theory, Kolmogorov

В современных работах в сфере чистой математики не предполагается исследование понятий, обеспечивающих прогресс в данной области знаний, а также анализ понятий, связывающих эту область математики с миром реальных явлений. Однако еще в прошлом столетии в публикациях, относящихся к чистой математике, в частности в работах по теории вероятностей, часто отмечались как понятия, являющиеся основополагающими для ее развития, так и понятия, имеющие прикладную значимость. Например, в исследованиях известных французских математиков, таких как Э. Борель, Ж. Адамар, Г. Фреше, П. Леви и др., указывалось, что развитие теории вероятностей основано на понятии равновероятности событий, а ее применение связывалось с понятием события, которое имеет ничтожную вероятность [Shafer, Vovk, 2006, p. 73]. В отечественной литературе требования к вероятностям, обеспечивающим развитие теории вероятностей и ее применимость, были сформулированы А.Н. Колмогоровым в книге, посвященной аксиоматизации теории вероятностей. Эти требования сводятся к следующему:

«А. Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий S будет повторен большое число раз n и если при этом через m обозначено число случаев, при которых событие A наступило, то отношение m/n будет мало отличаться от $P(A)$.

В. Если $P(A)$ очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий S событие A не будет иметь места» [Колмогоров, 1974, с. 13].

Условие А предполагает близость частотных характеристик изучаемого события и его вероятности. Выбор условия был связан с тем, что применение теории вероятностей, по Колмогорову, основано на частотной интерпретации [Колмогоров, 1974, с. 12]. Условие В использовалось многими математиками в качестве моста, обеспечивающего связь математики с миром реальных явлений. Это условие известно как принцип Курно. Оно названо в честь разностороннего ученого и философа А. Курно, который одним из первых понял его прикладную значимость [Курно, 1970]. Роль предшественников Курно кратко изложена в работе Г. Шейфера и В. Вовка [Shafer, Vovk, 2001]. Известны две модификации принципа Курно: в сильной и слабой формах. У Колмогорова этот принцип дан в сильной форме. Принцип Курно в слабой форме гласит, что маловероятные события будут происходить редко. Требования Колмогорова имеют принципиальные отличия от упомянутых выше требований французских математиков. В их работах одно требование относится к развитию теории, другое – к ее применимости. В отличие от строгой специализации условий у западных математиков, у Колмогорова требование А играет двойную роль. На близости частот и вероятности основано, во-первых, развитие частотной интерпретации, во-вторых – ее применение. Можно считать, что в определенном смысле оба требования Колмогорова относятся к применимости теории вероятностей. Первое условие является критерием для определения искомой теоретической вероятности. Второе условие выступает основанием для формальной верификации правильности найденной теоретической вероятности. Каков статус этих требований? Здесь нет однозначной оценки: у Колмогорова они названы условиями, Шейфер и Вовк называют их условиями, а иногда принципами.

В отличие от аксиоматики Колмогорова его требования к вероятностям в контексте приложений малоизвестны и полностью приведены только в работе Г. Крамера [Крамер, 1975]. Ввиду того, что Колмогоровым было предложено два требования к вероятностям, естественно возникает вопрос об их совместимости.

Как пишут Шейфер и Вовк, уже современники Колмогорова – Борель, Леви и др. отмечали выводимость условия А на основе теоремы Бернулли и условия В. Так как условие А оказывается зависимым от В на основе теоремы Бернулли, имеет смысл сформулировать теорему.

Теорема Бернулли. Проводится n независимых испытаний события A и m экспериментов оказываются успешными. Известно, что теоретическая вероятность появления события A в каждом эксперименте равняется $p(A)$, m/n – это частота события A, ε – это точность вычислений. Тогда при бесконечном числе экспериментов выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|m/n - p(A)\right| < \varepsilon) = 1 \qquad (1)$$

Хотя Колмогоровым требования к вероятностям были изложены неформально, утверждение о выводимости одного условия на основе другого, естественно предполагает, что эти условия определены формальным образом. Согласно Шейферу и Вовку, формализация условия А совпадает с заключением теоремы Бернулли. Тогда возникает вопрос о необходимости условия В вообще, так как в доказательстве теоремы утверждение А выводится без использования В. Однако требование В имеет значение, потому что когда оно учитывается, А оказывается верным на любой конечной типичной выборке, т.е. учет В приводит к получению А на выборках меньшего объема по сравнению с его непосредственным выводом на основе теоремы Бернулли. В связи с тем, что условие А оказывается зависимым от В, возникает несколько вопросов. Почему Колмогоров остановился на зависимом требовании? Почему на этом факте не было давно уже сфокусировано внимание математиков и его тщательно не исследовали?

Хотя факт зависимости условия А был известен уже современникам Колмогорова, в современной литературе он не обсуждался до публикаций Шейфера и Вовка [Shafer, Vovk, 2001; 2006], которые предложили несколько объяснений ему. Эти объяснения являются интересными, но не могут считаться полными и объективными, так как в них не учитываются свойства частотной интерпретации. Мы полагаем, что в достаточной степени полные объяснения должны опираться на частотную интерпретацию требований Колмогорова и теоремы Бернулли. Апелляция к частотной интерпретации представляется естественной, так как Колмогоров отмечал, что в вопросах применимости он в основном следует Р. Мизесу, автору известной частотной интерпретации. В настоящей работе мы попытаемся обосновать, что требование А оказывается выводимым на основе теоремы Бернулли и принципа Курно в рамках субъективистской интерпретации теории вероятностей, но не является таковым в объективистской интерпретации. В начале работы в краткой форме приведены объяснения Шейфера и Вовка, а так как они не в одинаковой степени убедительны, то объяснения упорядочены по степени убедительности, в порядке ее возрастания следующим образом.

1. Зависимость не является существенным недостатком, так как в книге Колмогорова условия применения теории вероятностей представлены после его аксиоматики, следовательно, теорема Бернулли еще не была получена и поэтому вывод требования А на основе В и теоремы

Бернулли не мог быть осуществлен. Очевидно, что это объяснение является формальным и не вполне серьезным.

2. Колмогоров мог просто не обратить внимания на то, что требование А оказалось зависимым. Это предположение основано на том, что Колмогоров нигде не дал каких-либо объяснений факту зависимости условия А. Прежде чем анализировать гипотетические причины, по которым Колмогоров мог оставить без внимания зависимость условия А, приведем аргументы, показывающие, почему французские математики не могли не заметить, что условие А является зависимым? Дело в том, что Борель, Адамар, Фреше, Леви и др. были сторонниками субъективистской интерпретации теории вероятностей. В рамках этой интерпретации в случае если у исследователя нет информации о том, что некоторые события более вероятны, чем другие, все они считаются равновероятными. Однако в науке ценятся объективные вероятности. Поэтому теорема Бернулли особо значима для французских математиков. Применяя эту теорему к исходным субъективным вероятностям, получим на ее основе, что вероятность ничтожного отклонения частотных характеристик события от его вероятности при большом числе независимых наблюдений оказывается близкой к единице. Другими словами, применение теоремы обеспечивает объективацию вероятностей.

Несколько слов о гипотетических причинах ошибки Колмогорова. Во-первых, Колмогоров был хорошо знаком с работами французских математиков и в своей книге ссылается на работу Леви, где излагаются требования к вероятностям в контексте развития и приложений теории вероятностей [Колмогоров, 1974, с. 119]. Кроме того, Колмогоров был в Париже и общался со многими известными специалистами в области теории вероятностей, и его работы были высоко оценены французскими математиками еще до того, как получили полное признание у международного математического сообщества. Мы полагаем, что у Колмогорова были серьезные основания для того, чтобы принять принцип Курно, так как значимость принципа для приложений признавалась российскими математиками – А.И. Чупровым и А.А. Марковым, а также, как уже отмечалось, французскими математиками. Однако субъективистское требование равновероятности не было принято Колмогоровым по разным причинам, в том числе по соображениям политкорректности. Колмогоров был лидером отечественной математики, а потому удобнее было использовать частотную интерпретацию, так как А.Я. Хинчин обосновал совместимость основных ее положений с марксистской философией [Хинчин, 1961]. Требование одинаковой вероятности было заменено на условие близости частоты и вероятности, характерное для частотной интерпретации. Заменив требование относительно равных вероятностей на условие А, Колмогоров мог не заметить, что это условие оказывается выводимым. Мы полагаем, что предположение о невнимательности Колмогорова оказывается неубедительным по ряду причин. Во-первых, французские математики получили вывод требования А на основе В и теоремы Бернулли в рамках субъективистской интерпретации, а не частотной, на которой настаивал Колмогоров. Во-вторых, книга Колмогорова является популярной, и тем не менее ее многочисленные читатели, в том числе специалисты по теории вероятностей, не отмечают зависимости условия А в современной литературе. По-видимому, многие читатели воспринимают требования Колмогорова неформально, интуитивно. Интуитивное восприятие часто связано с геометрическими образами, а применительно к условию А это означает, что близость частот к вероятности воспринимается как группирование частот вокруг теоретической вероятности, в узкой области. В-третьих, геометрическая интуиция вполне согласуется с пониманием вероятности у Мизеса – как предела бесконечной сходящейся последовательности частот. Дело в том, что Мизесом не рассматривается сходимость по вероятности, а используется сходимость классического математического анализа, которая допускает геометрическую интерпретацию близости частот к вероятности.

3. Условие А хотя и выводимо на основе условия В, имеет самостоятельное значение, так как является частотным, а Колмогоров отмечал, что его требования к применению теории вероятностей близки к требованиям Мизеса, одного из основателей частотной интерпретации теории вероятностей.

4. Корректное применение теоремы Бернулли предполагает осуществление трудоемких вычислений для верификации свойства независимости в исследуемых данных, когда они представлены выборкой большого объема. Проверка независимости связана с тем, что теорема Бернулли доказана в предположении о независимости данных.

Последние два условия являются достаточно серьезными, однако они не совсем полны и рациональны: третье условие в некотором смысле оказывается субъективным, поскольку основано на предпочтениях Колмогорова; оба условия не являются полными, так как не опираются на характеристики частотной интерпретации. Для того чтобы обосновать, почему Колмогоров выбрал частотную интерпретацию, приведем следующие аргументы. Во-первых, для науки важны объективистские, частотные характеристики. Так, А. Хакинг отмечает: «В объективистском варианте теории вероятностей понятие “вероятность” означает некоторое свойство материального мира явлений. Какие требования предъявляются к типичной объективистской характеристике? Эта характеристика должна быть измеримой, устойчивой, прогнозируемой. В качестве таких характеристик в математической статистике и других науках, где применяются методы математической статистики, используются средние, частоты, медианы и другие статистические характеристики» [Hacking, 1965]. Во-вторых, несмотря на отмеченную значимость объективистских характеристик, чистые математики критиковали теорию Мизеса по ряду оснований. Например, А. Черч, А. Вальд и др. критиковали ее за о, что понятие случайности не было формализовано. Однако никто из оппонентов не утверждал, что теория Мизеса неприменима в практических исследованиях. В-третьих, в противоположность чистым математикам, прикладные математики высоко оценивают роль концепции Мизеса для практики научных исследований. Например, Ю.И. Алимов полагает, что строгие правила для описания случайности не представляют большого интереса для практических приложений, так как невозможность осуществления предсказаний для исследуемого процесса является основанием для того, чтобы считать такой процесс случайным. В свою очередь, В.Н. Тутубалин пишет: «Сейчас считается, что подход Мизеса описывает свойства реальных явлений, к которым приложима математическая теория вероятностей» [Тутубалин, 2008, с. 14]. И далее уточняет: «…В то время как подход Колмогорова создает весьма удобную схему, на основе которой развивается математическая теория, формально независимая от каких-либо приложений» [Там же].

Отметим, что Колмогоров не был безоговорочным сторонником концепции Мизеса. Хотя в своей книге он писал: «В изложении необходимых предпосылок для приложимости теории вероятностей к миру действительных событий автор в значительной мере следует выводам Мизеса» [Колмогоров, 1974, с. 12]. Тем не менее Колмогоров не полностью признает адекватность теории Мизеса для практических применений, потому что у Мизеса вероятность определяется как предел сходящейся бесконечной последовательности частот, а Колмогоров настаивал на необходимости дискретной теории вероятностей в контексте приложений. Действительно, теория Мизеса, апеллирующая к бесконечным последовательностям, не вполне подходит для приложений. Реалистичный анализ теории Мизеса в контексте практических применений был проведен в работах Ю.И. Алимова, среди которых наиболее известной является «Альтернатива методу математической статистики» [Алимов, 1980]. У Алимова речь идет не о новой математике, а о специфическом взаимоотношении мира опыта с математикой. Фундаментальная задача прикладной статистики заключается в определении устойчивых частотных оценок некоторой исследуемой случайной переменной. Роль математического аппарата сводится к определению устойчивых усредненных характеристик другой случайной переменной, если известен оператор, связывающий эти величины. В настоящей статье в соответствии с работами Р. Мизеса, Ю.И. Алимова, В.Н. Тутубалина все теоретические вероятности считаются неизвестными и определяются на основе частотных оценок. Теперь в контексте частотной интерпретации рассмотрим требования Колмогорова и теорему Бернулли.

Частотная интерпретация теоремы Бернулли и требований Колмогорова. Теорема Бернулли сыграла выдающуюся роль в становлении теории вероятностей как теоретической науки и в ее развитии. Однако частотная интерпретация теоремы не столь убедительна. Во-первых, в теореме предполагается известной теоретическая вероятность, однако в эмпирической интерпретации теоретические величины никогда не известны заранее. Во-вторых, теорема устанавливает выполнимость с единичной вероятностью следующего выражения:

$$\left| m / n - p(A) \right| < \varepsilon \ . \tag{2}$$

Фактически заранее предполагается выполнимость неравенства (2), однако с эмпирических позиций его выполнимость априори не может быть установлена, так как оно представляет собой комбинацию эмпирических величин *m/n*, которые можно определить только экспериментально, и неизвестной теоретической величины *p(A)*, которую необходимо оценить на основе измерения частотных характеристик. Таким образом, до применения теоремы следует осуществить определение теоретической вероятности и проверку выполнимости неравенства (2).

Перейдем к рассмотрению условия А. По Шейферу и Вовку, неформально заданное Колмогоровым условие А представляет собой заключение теоремы Бернулли. В действительности в теореме Бернулли близость частот и вероятности представлена двумя различными способами. Во-первых, условие А описывается с помощью неравенства (2), которое является частью заключения теоремы. Для этого неравенства существует понятная геометрическая интерпретация устойчивости частот, состоящая в том, что частоты располагаются в узкой области и выполнимость неравенства не зависит ни от теоремы Бернулли, ни от условия В. Важно отметить, что в случае невыполнимости (2) теорема Бернулли не имеет прикладной значимости. Во-вторых, близость частот и вероятности совпадает с заключением теоремы. В заключении теоремы определяется, с какой вероятностью выполняется неравенство (2) при большом числе независимых наблюдений.

Теперь перейдем к требованию В, которое известно как принцип Курно. Согласно принципу Курно, статистическая гипотеза отвергается, если происходит маловероятное событие, являющееся следствием проверяемой гипотезы. Дадим краткий критический анализ этого принципа. Во-первых, характерная особенность маловероятных событий состоит в том, что они редко происходят, т.е. подчиняются принципу Курно в слабой форме. Однако такие события могут произойти в результате любого испытания, в том числе и самого первого. Во-вторых, реализация редких событий есть одно из проявлений случайности. Фактически принцип Курно запрещает их реализацию и тем самым ограничивает проявление случайности, хотя в науке известны реализации чрезвычайно маловероятных событий. В-третьих, принцип Курно лежит в основе проверки статистических гипотез. В соответствии с принципом Курно, если в предположении правильности гипотезы происходит маловероятное событие, то гипотеза опровергается. Считается, что на основе этого принципа редко опровергаются правильные гипотезы, однако существуют такие структуры данных, где применение принципа Курно к реализовавшимся, редким событиям приводит к систематическим ошибкам. Приведем известный пример, демонстрирующий недостатки методологии проверки гипотез, связанные с использованием принципа Курно. Если Джон американец, то маловероятно, что он член Конгресса США. Однако если Джон член Конгресса США, тогда корректная гипотеза, что он американец, не подтверждается [Fidler, 2005, p. 32–33]. В-четвертых, принцип Курно апеллирует к событиям с ничтожными вероятностями, но при этом не учитываются надежность и трудоемкость определения таких вероятностей.

Применение частотной интерпретации теоремы Бернулли. До применения теоремы необходимо определить теоретическую вероятность и провести верификацию второго неравенства. Оценивание неизвестной вероятности и проверка выполнимости неравенства (2) осуществляются с помощью модели независимых испытаний. Они заключаются в бросании правильной монеты, и эксперимент считается успешным, если выпадает герб. Каждая серия испытаний состоит из n бросаний, k – число планируемых серий экспериментов, тогда всего необходимо произвести $k \times n$ экспериментов. Отметим, что в каждой серии экспериментов определяется одна частотная характеристика события A. Очевидно, что при реализации k серий будет получено k частот. В предлагаемом эксперименте теоретическая вероятность $p(A)$ определяется с помощью частотных характеристик изучаемого события. А именно, если они близки друг к другу, т.е. попадают в интервал, который меньше точности наблюдений ε или равен ей, то в качестве вероятности возьмем любую из частот или их среднее арифметическое, если большинство попало в выделенный интервал. В том случае, если частотные характеристики очень вариабельны, хорошей частотной оценки не существует и нет смысла применять теорему. В этой статье в нашу задачу не входит оптимальное определение вероятности $p(A)$, она нужна для сравнения сложностей вычисления близости частот и вероятности с помощью первого и второго выражений. Существуют различные подходы для определения искомой вероятности P.

Во-первых, если при большом числе испытаний подавляющее число частотных оценок теоретической вероятности $p(A)$ принадлежит к выделенному интервалу с длиной, меньшей ε, то тем самым осуществляется качественная верификация утверждения A без использования заключения теоремы Бернулли. Тогда в оценивании внешней вероятности P нет особой значимости, так как ее определение основано на полученной оценке для вероятности $p(A)$ и, кроме того, требует дополнительных вычислений. Тем не менее в целом оценивание внешней вероятности имеет значение.

Во-вторых, в стандартной теории вероятностей известен вывод теоремы Бернулли на основе локальной теоремы Муавра – Лапласа, предполагающий значительное количество экспериментов; еще больше необходимо экспериментов для получения этой теоремы на основе неравенства Чебышева. В случае верификации независимости данных имеются основания для применения теоремы Бернулли, однако для выборок большого объема требуются существенные трудозатраты.

В-третьих, если независимость данных не установлена и нет оснований для применения теоремы Бернулли, то вероятность P может быть определена в рамках предложенного эксперимента. В этом эксперименте внешняя вероятность P в теореме Бернулли определяется по аналогии с вероятностью $p(A)$ и на ее основе.

Теперь проведем анализ требуемого количества испытаний для оценивания внешней вероятности P. Внешняя вероятность вычисляется на основе частот w, с которыми выполняется неравенство (2). Отметим, что хотя вычисление частотных характеристик w для события, описываемого выражением (2), сложнее вычисления частот события A, тем не менее эти частоты w определяются в рамках того же самого эксперимента, на котором основано определение частот события A. Тогда согласно формуле (2) частоты w будут вычисляться на основе частот появления события A и уже известной оценки вероятности события A. Предположим, что проведена i-я серия *из* n наблюдений и определена некоторая частота m_i/n события A. Тогда, зная $p(A)$ и ε, можно осуществить верификацию выполнимости неравенства (2). Ранее проведение каждой серии из n испытаний обеспечивало получение частоты события A, теперь та же серия экспериментов приводит лишь к получению сингулярной оценки, определяющей единичную выполнимость или невыполнимость второго неравенства. Если мы хотим определить частотные характеристики w с той же точностью, с какой вычислялись частоты события A, т.е. на основе n свидетельств, то необходимо определять каждую частоту w также на основе n сингулярных характеристик, описывающих выполнимость неравенства (2). Следовательно, для получения n свидетельств, определяющих выполнимость неравенства (2), надо провести n серий экспериментов, при этом каждая серия состоит из n бросаний монеты; тогда для получения одной частотной характеристики w необходимо проведение n^2 экспериментов. Так как вероятность $p(A)$ определялась на основе k частотных характеристик m_i/n, $i=1, k$, для определения вероятности выполнимости (2) также на основе k частотных характеристик предполагается реализация $k\times n^2$ экспериментов. И для каждой новой оценки вероятностей на основе предложенного эксперимента требуется в n раз больше испытаний.

Однако в действительности для получения частоты более сложного события, определенного выражением (2), необходимо, чтобы соответствующая серия экспериментов состояла из N наблюдений, где $N>>n$, и также потребуется провести намного больше серий наблюдений K, где $K>>k$. Здесь выражение $X>>Y$ означает, что X намного больше Y. Таким образом, вместо $n\times k$ наблюдений для определения вероятности $p(A)$ необходимо провести $N\times K$ наблюдений с целью получения вероятности P, где $N\times K>>k\times n^2$.

* * *

Наилучшие аргументы Шейфера и Вовка, предназначенные для объяснения использованного Колмогоровым зависимого требования, сводятся к тому, что Колмогоров предпочел частотную интерпретацию и трудоемкую верификацию условий применения теоремы Бернулли. В нашей работе аргументация Шейфера и Вовка получила определенное развитие.

1. Шейфер и Вовк объясняют использование условия А интересом Колмогорова к частотной интерпретации, т.е. в определенной степени субъективными причинами. Однако выбор частотной интерпретации вполне обоснован. Во-первых, она важна в науке, так как в этой интерпретации изучаются частоты – объективистские характеристики мира исследуемых феноменов. Во-вторых, математики-прикладники высоко оценивают значимость этой концепции для эффективных приложений. Однако принцип Курно и теорема Бернулли оказываются не столь естественными в частотной интерпретации.

2. Шейфер и Вовк учитывают трудоемкость верификации свойства независимости данных в контексте корректного применения теоремы Бернулли, однако использование ее частотной интерпретации предполагает оценивание теоретической вероятности успешности испытаний.

3. В отличие от Шейфера и Вовка мы предлагаем аргументы, обосновывающие, что условие А не является зависимым от теоремы Бернулли и условия В. Во-первых, если бы требования Колмогорова были изложены формально, то факт зависимости требования А от В и теоремы Бернулли не остался бы незамеченным. Так как до самого последнего времени зависимость требования А от В и теоремы Бернулли не обсуждалась, это свидетельствует о том, что требования Колмогорова воспринимаются интуитивно. Интуитивное восприятие часто связано с геометрическими образами. Применительно к нашему случаю это означает, что близость частот к вероятности воспринимается как группирование частот в узкой области, вокруг теоретической вероятности. Если при этом не фиксировать внимание на строгом определении частоты условия (2), то для описания близости частот к вероятности адекватно выражение (2). В частотной интерпретации неравенство (2), описывающее условие А, не зависит ни от теоремы Бернулли, ни от В, а наоборот, выполнимость А является предусловием использования теоремы. Во-

вторых, геометрическое представление о близости частот к вероятности не только интуитивно корректно, но и фактически верно, так как оно адекватно мизесовской интерпретации. В-третьих, принцип Курно в сильной форме не вполне подходит для частотной интерпретации, так как он апеллирует к вероятности сингулярного события, а вероятности сингулярных событий не являются легитимными в частотной интерпретации Мизеса.

Литература

1. *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. – М.: Знание, 1980.

2. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974.

3. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975.

4. *Курно А.* Основы теории шансов и вероятностей. – М: Наука, 1970.

5. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей. – М.: Академия, 2008.

6. *Хинчин А.Я.* Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей // Вопросы философии. – 1961. – № 1. – С. 91–102.

7. *Fidler F.* From statistical significance to effect estimation: Statistical reform in psychology, medicine and ecology. Department of History and Philosophy of Science. The University of Melbourne, 2005. – URL: http://www.botany.unimelb.edu.au/envisci/docs/fidler/fidlerphd_aug06.pdf (дата обращения: 22.05.2014).

8. *Hacking I.* Logic of Statistical Inference. – Cambridge: Cambridge University Press, 1965.

9. *Shafer G., Vovk V.* Probability and Finance It's Only a Game! – N.Y.: A Wiley-Interscience Publication, 2001.

10. *Shafer G., Vovk V.* The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statistical Science. – 2006. – Vol. 21, No. 1. – P. 70–98.

References

1. *Alimov Yu.I.* Alternativa metodu matematicheskoi statistiki [Alternative to method of mathematical statistics]. – M.: Znanie, 1980. (In Russ.)

2. *Kolmogorov A.N.* Osnovnye ponjatija teorii verojatnostei [Foundations of the theory of probability]. – M.: Nauka, 1974. (In Russ.)

3. Kramer G. Matematicheskie metody statistiki [Mathematical methods of statistics]. – M.: Mir, 1975. (In Russ.)

4. *Kurno A.* Osnovy teorii shansov i verojatnostei [Exposition of the theory of chances and probabilities]. – M.: Nauka, 1970. (In Russ.)

5. *Tutubalin V.N.* Teorija verojatnostei [Theory of probabilities]. – M.: Akademija, 2008. (In Russ.)

6. *Khinchin A.Ya. Chastotnya teoriya R. Misesa I sovremennye idei teorii veroyatnostei* [Frequency theory of R. Mises and contemporary ideas of probability theory]. *// Voprosy filosophii.* 1961. – № 1. S. 91–102. (In Russ.)

7. *Fidler F.* From statistical significance to effect estimation: Statistical reform in psychology, medicine and ecology. Department of History and Philosophy of Science. The University of Mel-

bourne, 2005. [Jelektronnyj resurs]. URL: http://www.botany.unimelb.edu.au/envisci/docs/fidler/fidlerphd_aug06.pdf (data obrashenija: 22.05.2014.

8. *Hacking I.* Logic of statistical inference. – Cambridge: Cambridge University Press, 1965.

9. *Shafer G., Vovk V*. Probability and Finance It's Only a Game! – N.Y.: A Wiley-Interscience Publication, 2001.

10. *Shafer G., Vovk V.* The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statistical Science. – 2006. – Vol. 21, № 1. – P. 70–98.

Дата поступления 10.02.16