УДК 539.376+539.4

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ПРОЦЕССЕ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИХ МАТЕРИАЛА

А. Ф. Никитенко, Б. С. Резников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: naf@hydro.nsc.ru

Показано, что в случае осесимметричного напряженного состояния решение статически определимой краевой задачи для идеального жесткопластического тела с использованием критерия прочности Мизеса — Шлейхера переносится на модель жесткоползучего тела с любым заданным пределом длительной прочности и соответствует предельному состоянию реального тела, материал которого находится в условиях ползучести.

Ключевые слова: ползучесть, длительная прочность, модели идеального жесткопластического и жесткоползучего тел.

В работах [1, 2] с использованием кинетической теории Ю. Н. Работнова, описывающей все три стадии ползучести материала с одновременным учетом с феноменологических позиций накопления повреждений в нем, предложена методика расчета по предельному равновесию элементов конструкций, нагруженных постоянными внешними температурно-силовыми воздействиями. По этой методике необходимо решить в первую очередь задачу в предположении установившейся ползучести и потребовать, чтобы полученное таким образом стационарное поле напряжений удовлетворяло условию перехода материала элемента конструкции в предельное состояние. В случае равномерно нагретого тела (элемента конструкции) это условие имеет вид

$$\sigma_e = \sigma_*, \tag{1}$$

где σ_e — эквивалентное напряжение (однородная относительно напряжений функция первой степени), аналитическая аппроксимация которого представляет собой соответствующий критерий длительной прочности; σ_* — предел длительной прочности материала. В дальнейшем в качестве физических соотношений установившейся ползучести материала будем использовать закон течения, ассоциированный с поверхностью $\sigma_e = \text{const}$:

$$\eta_{ij} = \frac{W}{\sigma_e}\frac{\partial\sigma_e}{\partial\sigma_{ij}}, \qquad W = B\sigma_e^{n+1}, \qquad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Здесь η_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров скоростей деформаций ползучести и напряжений соответственно; B, n — характеристики материала; $W = \sigma_{ij}\eta_{ij}$ — мощность рассеяния энергии при ползучести материала. Добавив к (2) уравнения равновесия с соответствующими граничными условиями, соотношения Коши, уравнения неразрывности скоростей деформации ползучести, получаем систему уравнений, позволяющую рассчитать напряженно-деформированное состояние произвольного тела, нагруженного внешними усилиями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-08-00316).

В уравнении (2) представим величину W в виде $W = B_1(\sigma_e/k)^{n+1}$. Тогда $(W/B_1)^{1/(n+1)} = \sigma_e/k$ и при $n \to \infty$ $\sigma_e = k$. Таким образом, в случае $n \to \infty$ математическая модель установившейся ползучести материала (2) вырождается в математическую модель идеального жесткопластического тела, если $k = \sigma_{\text{т}}$, или в модель жесткоползучего тела, если $k = \sigma_*$ ($\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести материала).

В случае неупругого деформирования материала для плоских задач сформулируем следующий вывод. Если на поверхности тела граничные условия заданы только в напряжениях, то, добавляя к уравнениям равновесия условие (1) перехода материала тела в предельное состояние, получаем статически определимую задачу, не зависящую от физических соотношений неупругого деформирования. Таким образом, можно утверждать, что решение краевой задачи для идеального жесткопластического тела переносится на модель жесткоползучего тела с любым заданным пределом длительной прочности σ_*, причем $\sigma_* \geqslant \sigma_{\text{п}}$ ($\sigma_{\text{п}}$ — предел ползучести материала, поэтому $\sigma_{\text{п}} \leqslant k \leqslant \sigma_{\text{т}}$). Данное утверждение сформулировано в работе [3] при условии, что σ_e есть интенсивность напряжений. В [3] отмечено, что имеется аналогия между решением конкретных задач (изгиб балок, кручение стержней и т. д.) в предположении установившейся ползучести материала при степенном законе и решением тех же задач в предположении идеального жесткопластического поведения материала. Аналогия заключается в том, что при стремлении показателя ползучести к бесконечности распределение напряжений в равномерно нагретом теле стремится к идеально пластическому распределению, которое в теории пластичности считается предельным и соответствует конкретному значению внешней нагрузки. Нетрудно показать, что утверждение, сформулированное в [3] и основанное на обнаруженной аналогии между решениями соответствующих задач при $n \to \infty$, является частным случаем расчета элементов конструкций по предельному равновесию. Следует отметить, что в [3] отсутствует формулировка условия (1) или аналогичного условия предельного состояния тела в процессе ползучести материала.

Условие (1) позволяет вычислить предельное значение внешней нагрузки, обеспечивающей равнопрочность тела в любой момент времени вплоть до момента исчерпания его несущей способности [1, 2]. Очевидно, что это значение существенно зависит от выбранного критерия длительной прочности. Далее используется критерий Мизеса — Шлейхера, который следует из обобщенного критерия [4]

$$\sigma_e = \sigma_i f(\zeta) + \beta\sigma_0. \tag{3}$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$ — гидростатическая составляющая тензора напряжений; $\sigma_i = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ — интенсивность напряжений; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}$ — компоненты девиатора напряжений; δ_{ij} — символ Кронекера; $\beta \geqslant 0$ — коэффициент внутреннего трения; ζ — угол вида напряженного состояния. В работе [4], в которой для функции $f(\zeta)$ принята аппроксимация

$$f(\zeta) = [1 + \alpha(\sin 3\zeta)^\lambda]^{1/(2\nu)}, \tag{4}$$

изложена методика определения характеристик α, λ, ν и рассмотрены различные случаи перехода критерия (3) в известные. В частности, при $\zeta = m\pi/3$ ($m = 0, \pm1, \pm2$) $f(m\pi/3) = 1$ и обобщенный критерий (3), (4) вырождается в известный критерий Мизеса — Шлейхера $\sigma_e = \sigma_i + \beta\sigma_0$.

Запишем главные компоненты $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ тензора напряжений в тригонометрической форме [5, 6]

$$\begin{gathered} \sigma_1 = (2/3)\sigma_i \sin(\pi/3 - \zeta) + \sigma_0, \qquad \sigma_2 = (2/3)\sigma_i \sin(\zeta) + \sigma_0, \\ \sigma_3 = -(2/3)\sigma_i \sin(\pi/3 + \zeta) + \sigma_0, \end{gathered} \tag{5}$$

причем $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, если $-\pi/6 \leqslant \zeta \leqslant \pi/6$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_3 \geqslant \sigma_2$, если $-\pi/2 \leqslant \zeta \leqslant -\pi/6$, и так далее для остальных интервалов изменения ζ. При $\zeta = m\pi/3$ в случае, например, $-\pi/2 \leqslant \zeta \leqslant -\pi/6$ из (5) следует

$$\sigma_1 = \sqrt{3}\,\sigma_i/3 + \sigma_0, \qquad \sigma_3 = \sigma_0, \qquad \sigma_2 = -\sqrt{3}\,\sigma_i/3 + \sigma_0, \tag{6}$$

при этом максимальное касательное напряжение равно $\tau_{\max} = \sqrt{3}\,\sigma_i/3$.

Очевидно, что напряженное состояние (6) представляет собой чистый сдвиг с наложенным на него гидростатическим давлением, что реализуется в случае плоского деформированного состояния [5, 6].

Запишем условие (1) предельного состояния материала тела с использованием критерия Мизеса — Шлейхера:

$$\sigma_i + \beta\sigma_0 = \sigma_*. \tag{7}$$

С учетом (7) соотношения (2) в главных осях тензора напряжений в цилиндрической системе координат (r, φ, z) принимают вид

$$\eta_\varphi = B\sigma_e^n\Big(\frac{3}{2}\,\frac{s_\varphi}{\sigma_i} + \frac{\beta}{3}\Big), \qquad \eta_r = B\sigma_e^n\Big(\frac{3}{2}\,\frac{s_r}{\sigma_i} + \frac{\beta}{3}\Big), \qquad \eta_z = B\sigma_e^n\Big(\frac{3}{2}\,\frac{s_z}{\sigma_i} + \frac{\beta}{3}\Big). \tag{8}$$

Очевидно, что $\eta_\varphi + \eta_r + \eta_z = 0$ только при $\beta = 0$. Далее будем проводить расчет элементов конструкций по предельному равновесию в условиях плоского деформированного состояния. В случае плоского деформированного состояния $\eta_z = 0$ [5, 6], и, следовательно,

$$\sigma_z = \frac{\sigma_\varphi + \sigma_r}{2} - \frac{\beta}{3}\,\sigma_i. \tag{9}$$

Нетрудно показать, что $\sigma_0 = \sigma_z + (2/9)\beta\sigma_i$, а интенсивность напряжений равна

$$\sigma_i = \frac{3}{2}\,\frac{\beta_0}{\beta}\,(\sigma_\varphi - \sigma_r). \tag{10}$$

С учетом (9), (10) соотношения (8) окончательно принимают вид

$$\eta_\varphi = \frac{\beta}{2}\Big(\frac{1}{\beta_0} + 1\Big)B\sigma_e^n, \qquad \eta_r = \frac{\beta}{2}\Big(-\frac{1}{\beta_0} + 1\Big)B\sigma_e^n, \qquad \eta_z = 0; \tag{11}$$

$$\sigma_e = \frac{\beta}{\beta_0}\Big(\frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{2} + \beta_0\,\frac{\sigma_\varphi + \sigma_r}{2}\Big), \qquad \beta_0 = \frac{\sqrt{3}\,\beta}{\sqrt{9 - \beta^2}}. \tag{12}$$

Отметим, что в случае $\beta = 0$ соотношения (8)–(12) переходят в известные [3, 6], при этом $\sigma_e = \sigma_i$.

Для определения напряженно-деформированного состояния тела и предельной внешней нагрузки необходимо к (7), (11), (12) добавить уравнение равновесия и уравнение неразрывности скорости деформаций ползучести. Для элементов конструкций, в которых реализуется осесимметричное напряженное состояние в отсутствие касательных напряжений, имеем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0; \tag{13}$$

$$\frac{d\eta_\varphi}{dr} + \frac{\eta_\varphi - \eta_r}{r} = 0. \tag{14}$$

Введем функцию напряжений $\Phi = \Phi(r)$, такую что

$$\sigma_\varphi = \frac{d^2\Phi}{dr^2}, \qquad \sigma_r = \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dr}. \tag{15}$$

При этом уравнение равновесия (13) тождественно выполняется. После соответствующих стандартных операций с использованием (11)–(15) для $\Phi(r)$ получаем дифференциальное уравнение (уравнение Эйлера) третьего порядка. Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет различные действительные корни $k_1 = 0$, $k_2 = \nu_1$, $k_3 = 2 - \nu_2$, где

$$\nu_1 = \frac{2}{1+\beta_0}, \qquad \nu_2 = \frac{\nu_1}{n}. \tag{16}$$

Следовательно, решение уравнения Эйлера имеет вид

$$\Phi(r) = C_1 + C_2 r^{\nu_1} + C_3 r^{2-\nu_2}. \tag{17}$$

С учетом (15) из (17) получаем

$$\begin{gathered} \sigma_\varphi = \nu_1(\nu_1 - 1)C_2 r^{\nu_1 - 2} + (2-\nu_2)(1-\nu_2)C_3 r^{-\nu_2}, \\ \sigma_r = \nu_1 C_2 r^{\nu_1-2} + (2-\nu_2)C_3 r^{-\nu_2}. \end{gathered} \tag{18}$$

Постоянные C_2, C_3 в (18) определяются из граничных условий.

Согласно изложенной выше методике для того чтобы вычислить предельную внешнюю нагрузку, действующую на тело, необходимо потребовать, чтобы стационарное поле напряжений (18) удовлетворяло условию (7). Подставляя (18) в (7), получаем

$$\frac{(2-\nu_2)(2-\nu_1-\nu_2)}{2-\nu_1}\, C_3 r^{-\nu_2} = \frac{\sigma_*}{\beta}. \tag{19}$$

Равенство (19) должно выполняться одновременно во всех точках тела, т. е. не должно зависеть от r. Это возможно, в случае если $\nu_2 = 0$, что с учетом (16) равносильно условию $n \to \infty$. Поэтому из (19) следует

$$2C_3^* = \sigma_*/\beta, \tag{20}$$

где C_3^* — постоянная C_3, выраженная через предельную нагрузку. Аналогично постоянную C_2, выраженную через предельную нагрузку, будем обозначать C_2^*. Напряжения, соответствующие предельному состоянию тела, найдем по формулам (18) с использованием (20):

$$\sigma_\varphi = \nu_1(\nu_1-1)C_2^* r^{\nu_1-2} + 2C_3^*, \qquad \sigma_r = \nu_1 C_2^* r^{\nu_1-2} + 2C_3^*. \tag{21}$$

Как отмечено выше, $\sigma_e = k$ при $n \to \infty$, поэтому очевидно, что выражение (20), позволяющее вычислить предельную нагрузку, действующую на тело в процессе ползучести его материала, справедливо и для идеального жесткопластического тела, если предел длительной прочности материала заменить на его предел текучести. Аналогично выражение (21) для напряжений, соответствующее предельному состоянию тела в процессе ползучести материала, справедливо и для идеального жесткопластического тела, если σ_* заменить на $\sigma_{\text{т}}$.

В случае если $\beta = 0$, критерий Мизеса — Шлейхера вырождается в критерий Мизеса, и условие перехода материала тела в предельное состояние принимает вид $\sigma_i = \sigma_*$. Из (12) и (16) следует, что $\beta_0 = 0$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 2/n$ при $\beta = 0$ ($\nu_2 = 0$ при $n \to \infty$). Следовательно, характеристическое уравнение, соответствующее уравнению Эйлера для функции $\Phi(r)$, имеет следующие корни: $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = 2$. Функция напряжений $\Phi(r)$, соответствующая предельному состоянию тела, записывается в виде

$$\Phi(r) = C_1^* + C_2^* r^2 + C_3^* r^2 \ln r,$$

при этом для напряжений получаем следующие выражения:

$$\sigma_\varphi = 2C_2^* + 3C_3^* + 2C_3^* \ln r, \qquad \sigma_r = 2C_2^* + C_3^* + 2C_3^* \ln r. \tag{22}$$

Учитывая, что $\sigma_i = \sqrt{3}\,(\sigma_\varphi - \sigma_r)/2$, из условия предельного состояния $\sigma_i = k$ с использованием (22) для вычисления предельной нагрузки вместо (20) получаем соотношение

$$2C_3^* = 2k/\sqrt{3}. \tag{23}$$

В качестве примера рассмотрим ползучесть толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления p. В данном случае граничные условия имеют вид

$$\sigma_r(a) = -p, \qquad \sigma_r(b) = 0, \tag{24}$$

где a, b — внутренний и внешний радиусы трубы соответственно. Подставляя (18) в (24), находим

$$\nu_1 C_2 = -\frac{b^{2-\nu_1} p}{\beta_1^{\nu_2}(\beta_1^{2-\nu_1-\nu_2} - 1)}; \tag{25}$$

$$(2-\nu_2) C_3 = \frac{b^{\nu_2} p}{\beta_1^{\nu_2}(\beta_1^{2-\nu_1-\nu_2} - 1)}, \tag{26}$$

где $\beta_1 = b/a$.

Обозначая предельное давление p_{**}, из (20) с использованием (26) при $\nu_2 = 0$ находим

$$p_{**} = \frac{\beta_1^{2-\nu_1} - 1}{\beta}\,\sigma_*. \tag{27}$$

Из (25) с использованием (27) вычисляем $\nu_1 C_2^*$, тем самым из (21) получаем поле напряжений в предельном состоянии трубы

$$\sigma_\varphi = \frac{1 - (\nu_1 - 1)\rho^{2-\nu_1}}{\beta}\sigma_*, \qquad \sigma_r = -\frac{\rho^{2-\nu_1} - 1}{\beta}\sigma_*, \qquad \rho = \frac{b}{r}. \tag{28}$$

Заменяя в (27), (28) σ_* на $\sigma_{\text{т}}$, находим величину предельного давления и соответствующее ему поле напряжений в поперечном сечении трубы при идеальном жесткопластическом деформировании ее материала.

При $\beta = 0$ из (24) с использованием (22) находим

$$2C_3^* = p_{**}/\ln\beta_1, \qquad 2C_2^* = -p_{**}(\ln b + 1/2)/\ln\beta_1,$$

тем самым из (22) получаем

$$\sigma_\varphi = \frac{p_{**}}{\ln\beta_1}\,(1 - \ln\rho), \qquad \sigma_r = -\frac{p_{**}}{\ln\beta_1}\,\ln\rho, \tag{29}$$

а из (23) —

$$p_{**} = (2/\sqrt{3}\,)k\ln\beta_1. \tag{30}$$

Очевидно, что формулы (29), (30) совпадают с известными результатами [3]. Заметим, что соотношения (29), (30) следуют из (28), (27) ($\nu_1 \to 2$ при $\beta \to 0$).

Таким образом, решение краевой задачи для идеального жесткопластического тела полностью переносится на модель жесткоползучего тела с любым заранее заданным пределом длительной прочности материала и наоборот. При этом обязательными являются одни и те же аппроксимации эквивалентного напряжения σ_e в условии перехода материала тела в предельное состояние и закон течения, ассоциированный с той же поверхностью $\sigma_e = k$. Решения, полученные для модели жесткоползучего тела, соответствуют предельному состоянию реального тела, материал которого находится в условиях ползучести.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Никитенко А. Ф.** Предельное состояние тела в процессе ползучести его материала // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Докл. 2-го Всерос. семинара, Новосибирск, 7–9 апр. 1998 г. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1998. С. 94–103.
2. **Никитенко А. Ф.** Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. 2. Предельное состояние неравномерно нагретых элементов конструкций // Пробл. прочности. 2005. № 6. С. 5–14.
3. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
4. **Никитенко А. Ф., Коврижных А. М., Кучеренко И. В.** Единый (обобщенный) критерий прочности материалов. 1 // Изв. вузов. Стр-во. 2006. № 11/12. С. 4–11.
5. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
6. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 26/XI 2008 г.,
в окончательном варианте — 11/III 2009 г.