УДК 532.516:532.516.5

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ДЛЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВИЖУЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ ПРИ МАЛЫХ И УМЕРЕННЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. Г. Петров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва
E-mail: petrov@ipmnet.ru

Исследуются точные решения уравнений Навье — Стокса для слоя между параллельными пластинами, расстояние между которыми меняется по произвольному степенному закону и на границе которых ставится условие прилипания. Получено решение в виде ряда по степеням числа Рейнольдса. Проведено сравнение с точными решениями и показана высокая точность разложений при значениях числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1 \div 10$. Получена точная оценка погрешности приближения тонкого слоя Рейнольдса.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, точные решения, движущиеся параллельно пластины.

Введение. Точные решения уравнений Навье — Стокса имеют большое значение в теоретической гидродинамике. Обзор точных решений и методов их построения приведен в работе [1]. Наиболее близкой к данной работе является группа точных решений Хименца. Нестационарный аналог уравнений Хименца, описывающий движение жидкости между двумя движущимися пластинами, впервые получен в работе [2] и описан в [3]. Наиболее полный обзор точных решений уравнений Навье — Стокса с аналогичной симметрией приведен в работе [4].

Настоящая работа является продолжением исследований, представленных в [5], где построены точные решения для пластин, расстояние между которыми меняется пропорционально квадратному корню из времени. Исследуется более общий случай движения пластин: расстояние между ними меняется по произвольному степенному закону. Решение строится в виде степенного ряда по числу Рейнольдса. Путем сравнения с точными решениями оценивается погрешность степенных рядов.

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается двумерное течение вязкой жидкости с компонентами скоростей $v_x(t,x,y)$, $v_y(t,x,y)$ и давлением $p(t,x,y)$ в слое жидкости $0 < y < h$, $-\infty < x < \infty$ между двумя параллельными пластинами. Пластина $y = 0$ неподвижна, а вторая пластина $y = h$ движется по закону $h(t)$. Краевая задача с условиями прилипания на пластинах имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00535), а также в рамках Ведомственной целевой аналитической программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.2/3604).

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\,\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\,\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\Big(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\Big),\\
\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\,\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\,\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=\nu\Big(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\Big),\\
v_x(t,x,0)=v_x(t,x,h)=0,\qquad v_y(t,x,0)=0,\qquad v_y(t,x,h)=\dot h,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где ν — кинематическая вязкость; плотность жидкости принимается равной единице. Решение ищем в виде

$$
v_x=\frac{\dot h}{h}\,xU(\eta,\mathrm{Re}),\quad v_y=\dot hV(\eta,\mathrm{Re}),\quad p=\dot h^2\Big(b\,\frac{x^2}{2h^2}+P(t,\eta)\Big)+p_0(t),\quad \eta=\frac{y}{h}. \tag{1.2}
$$

Здесь число Рейнольдса равно $\mathrm{Re}=h\dot h/\nu$. При заданном законе движения $h(t)$ число Рейнольдса зависит от времени, и эту зависимость необходимо учитывать при вычислении частных производных по времени в уравнении (1.1):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{\dot h^2}{h^2}\,x\Big(-\eta U'-aU+(2-a)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial U}{\partial\,\mathrm{Re}}\Big),\\
\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\dot h^2}{h}\Big((1-a)V-\eta V'+(2-a)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial V}{\partial\,\mathrm{Re}}\Big)
\end{gathered}
$$

(штрих обозначает производную по η). Учитывая эти равенства и подставляя (1.2) в первые два уравнения Навье — Стокса (1.1), для функций $U(\eta)$, $V(\eta)$ получаем краевую задачу, представляющую собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
U+V'=0,\quad -aU-\eta U'+U^2+VU'+b-\frac{1}{\mathrm{Re}}\,U''+(2-a)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial U}{\partial\,\mathrm{Re}}=0 \tag{1.3}
$$

с краевыми условиями

$$
U(0)=V(0)=0,\quad U(1)=0,\quad V(1)=1,\quad a=1-\frac{\ddot hh}{\dot h^2},\quad \mathrm{Re}(t)=\frac{h\dot h}{\nu},\quad \eta\in(0,1).
$$

В уравнения (1.3) входит не зависящий от аргумента η параметр a, который будем считать постоянным числом. Данному требованию удовлетворяет степенной закон движения пластин с произвольным показателем степени n. Поскольку число Рейнольдса зависит от времени, получаем

$$
h=k|t-t_0|^n,\quad a=\frac{1}{n},\quad \mathrm{Re}(t)=\frac{1}{\nu}\,k^2|t-t_0|^{2n-1}\,\mathrm{sign}\,t.
$$

Система уравнений имеет третий порядок, поэтому при заданном законе движения пластин четыре краевые условия позволяют найти функции $U(\eta)$, $V(\eta)$ и входящий в выражение для давления параметр b. Число Рейнольдса $\mathrm{Re}>0$ соответствует случаю увеличения расстояния между пластинами.

В результате подстановки (1.2) третье уравнение Навье — Стокса принимает вид

$$
(1-a)V-\eta V'+VV'-\frac{1}{\mathrm{Re}}\,V''+\frac{dP(t,\eta)}{d\eta}+(2-a)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial V}{\partial\,\mathrm{Re}}=0. \tag{1.4}
$$

Из соотношения (1.4) находим определяющую давление функцию $P(t,\eta)$:

$$
P=(a-2)\int\limits_0^\eta V\,d\eta+\eta V-\frac{V^2}{2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\,V'(\eta)+(2-a)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial V}{\partial\,\mathrm{Re}}. \tag{1.5}
$$

Выполнив замены

$$\eta = (Y+1)/2, \qquad U = -1 + u, \qquad V = \eta + v/2,$$

систему уравнений (1.3) можно упростить и представить в автономном виде, т. е. для функций $u(Y)$, $v(Y)$ на отрезке $Y \in (-1, 1)$ получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} u + v' = 0, \\ vu' + u^2 - (2+a)u + 1 + a + b - 4\,\frac{1}{\mathrm{Re}}u'' + (2-a)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial\,\mathrm{Re}} = 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

с краевыми условиями

$$u(-1) = u(1) = 1, \qquad v(-1) = v(1) = 0. \tag{1.7}$$

Решение уравнений (1.6) зависит от двух переменных, поэтому постановка краевой задачи для него помимо краевых условий должна включать также начальное условие, задаваемое при некотором значении числа Рейнольдса. Возникающая начально-краевая задача не рассматривается. Целью настоящей работы является построение семейства частных решений уравнений (1.6) в виде разложения по числу Рейнольдса.

2. Разложение по числу Рейнольдса. Запишем краевую задачу для системы уравнений (1.6) в виде одного уравнения для $v(Y, \mathrm{Re})$:

$$\begin{gathered} -vv'' + (v')^2 + (2+a)v' + 1 + a + b + \frac{4}{\mathrm{Re}}\,v''' + (a-2)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial v'}{\partial\,\mathrm{Re}} = 0, \\ v(-1) = v(1) = 0, \qquad v'(-1) = v'(1) = -1. \end{gathered} \tag{2.1}$$

При малом числе Рейнольдса решение краевой задачи (2.1) можно искать в виде ряда по числу Рейнольдса:

$$\begin{gathered} 1 + a + b = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,c + c_0 + \mathrm{Re}\,c_1 + \ldots, \qquad v = v_0 + \mathrm{Re}\,v_1 + \mathrm{Re}^2\,v_2 + \ldots, \\ \mathrm{Re}\,\frac{\partial v'}{\partial\,\mathrm{Re}} = \mathrm{Re}\,v_1' + 2\,\mathrm{Re}^2\,v_2'. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Для главного приближения получаем краевую задачу

$$c + 4v_0''' = 0, \qquad v(-1) = v(1) = 0, \quad v'(-1) = v'(1) = -1,$$

из решения которой находим

$$v_0(Y) = Y(1 - Y^2)/2, \qquad c = 12. \tag{2.3}$$

Краевая задача второго приближения и ее решение имеют вид

$$\begin{gathered} -v_0(Y)v_0''(Y) + (v_0'(Y))^2 + (2+a)v_0'(Y) + c_0 + 4v_1''' = 0, \\ v_1(-1) = v_1(1) = 0, \qquad v_1'(-1) = v_1'(1) = 0, \\ c_0 = -\frac{a}{5} - \frac{5}{7}, \qquad v_1(Y) = \frac{Y(Y^2-1)^2}{1120}\,(-Y^2 + 7a + 12). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Аналогично получаем третье и четвертое приближения для коэффициента давления:

$$\begin{gathered} c_1 = -\frac{1}{350}\,a^2 - \frac{23}{2100}\,a - \frac{337}{32\,340}, \\ c_2 = -\frac{1}{10\,500}\,a^3 - \frac{251}{882\,000}\,a^2 - \frac{1061}{3\,822\,000}\,a - \frac{2251}{20\,065\,500}, \end{gathered} \tag{2.5}$$

а также для скорости:

$$v_2 = \frac{1}{62\,092\,800}\,Y(Y^2-1)^2(42Y^6+770Y^4a+469Y^4-4620Y^2a^2-8162Y^2a+ \\ +566Y^2+10\,164a^2+17\,556a+663).$$

С помощью формул (2.1)–(2.5) для коэффициента давления b получаем следующее разложение по числу Рейнольдса:

$$b = \frac{12}{\mathrm{Re}} - \frac{6}{5}\,a - \frac{12}{7} - \Big(-\frac{1}{350}\,a^2 - \frac{23}{2100}\,a - \frac{337}{32\,340}\Big)\,\mathrm{Re} - \\ - \Big(\frac{1}{10\,500}\,a^3 + \frac{251}{882\,000}\,a^2 + \frac{1061}{3\,822\,000}\,a + \frac{2251}{20\,065\,500}\Big)\,\mathrm{Re}^2. \qquad (2.6)$$

При $a = 2$ имеем [5]

$$b = 12\,\mathrm{Re}^{-1} - 4{,}1143 - 4{,}3754\cdot 10^{-2}\,\mathrm{Re} - 2{,}5676\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Re}^2,$$

а при $a = 1$ (движение пластин с постоянной скоростью)

$$b = 12\,\mathrm{Re}^{-1} - 2{,}914\,29 - 0{,}024\,23\,\mathrm{Re} - 7{,}696\cdot 10^{-4}\,\mathrm{Re}^2\,.$$

Главный член разложения был найден О. Рейнольдсом [6] с помощью предложенного им приближения смазочного слоя. Построенные разложения позволяют оценить точность этого приближения.

3. Сравнение с точным решением. В работе [5] для случая увеличения расстояния между пластинами при $a = 2$, $\mathrm{Re} = \pi^2 \approx 9{,}8696$ найдено следующее простейшее решение краевой задачи (1.6), (1.7):

$$u = -\cos \pi Y, \qquad v = \pi^{-1}\sin \pi Y, \qquad b = -4.$$

На рис. 1 приведены зависимости $u(Y)$, $v(Y)$ при $a = 2$, $\mathrm{Re} = -\pi^2$, а также соответствующие зависимости при $a = 1$.

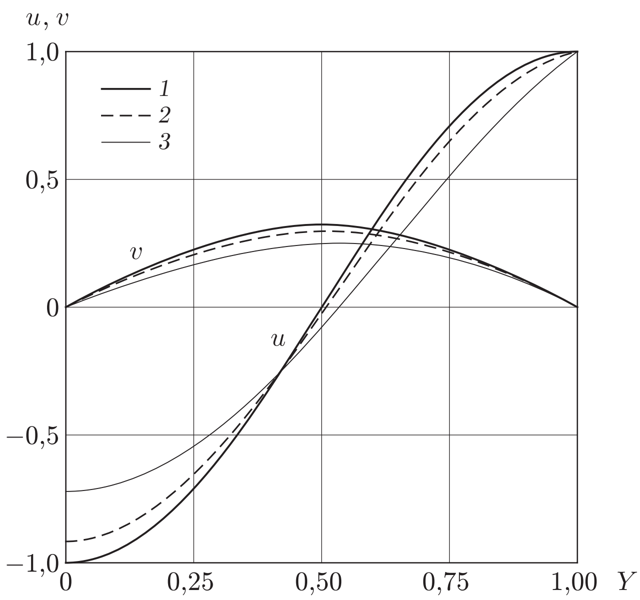

Рис. 1. Зависимости $u(Y)$, $v(Y)$ при $\mathrm{Re} = -\pi^2$:
1 — точное решение при $a = 2$; *2* — разложение (2.2) по числу Рейнольдса при $a = 2$;
3 — разложение (2.2) по числу Рейнольдса при $a = 1$

Значения коэффициента давления для точного и приближенного решений при $a = 2$

Re	b	
	Точное решение	Вычисление по разложению (2.6)
0,176 154	64,0	64,0
0,332 142	32,0	32,0
0,595 791	16,0	16,0
0,986 832	8,0	8,000 16
1,466 18	4,0	4,000 56
1,932 45	2,0	2,001 32
2,815 46	0	0,004 355 75
3,6187	−1,0	−0,990 136
4,9536	−2,0	−1,971 55
5,9431	−2,5	−2,445 86
7,182 81	−3,0	−2,890 38
8,289 73	−3,4	−3,205 86
π^2	−4,0	−3,580 37

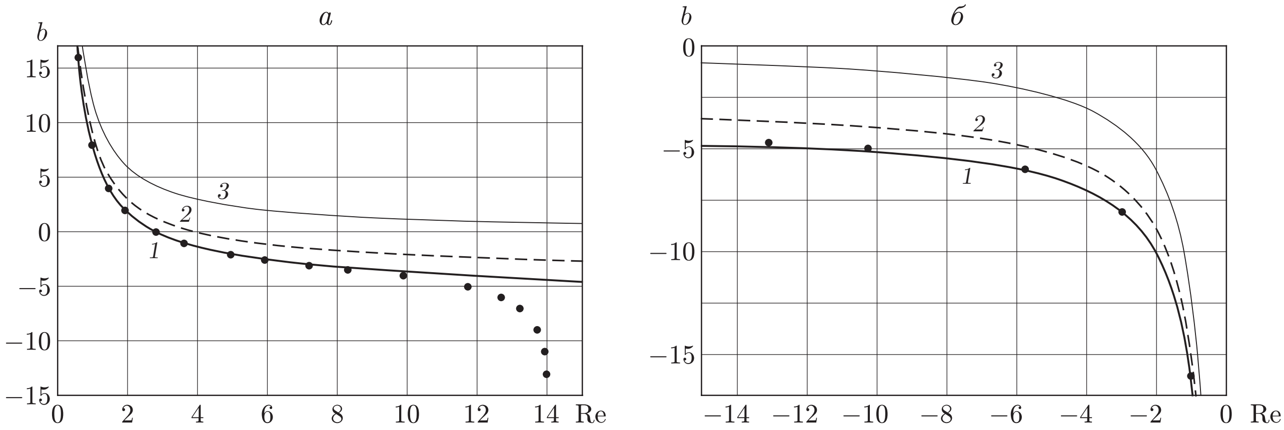

Рис. 2. Зависимости параметра b от числа Рейнольдса для случаев увеличения ($\mathrm{Re} > 0$) (*а*) и уменьшения ($\mathrm{Re} < 0$) (*б*) расстояния между пластинами: точки — точные численные решения [5]; *1* — разложение по числу Рейнольдса при $a = 2$; *2* — разложение по числу Рейнольдса при $a = 1$; *3* — главная асимптотика $b = 12/\,\mathrm{Re}$

О точности разложения (2.6) свидетельствуют данные, представленные в таблице.

На рис. 2 представлены точные и приближенные зависимости $b(\mathrm{Re})$ при $a = 1$; 2, а также главная асимптотика Рейнольдса $b = 12/\,\mathrm{Re}$.

Из рис. 1, 2 и таблицы следует, что полученные с помощью рядов приближенные решения применимы в диапазоне чисел Рейнольдса $|\,\mathrm{Re}\,| < 10$, тогда как приближение Рейнольдса с той же точностью справедливо лишь при $|\,\mathrm{Re}\,| < 0{,}1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пухначев В. В.** Симметрии в уравнениях Навье — Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 6–76.
2. **Riabouchinsky D.** Quelques considerations sur les mouvements plans rotationnels d' un liquide // C. R. Hebdomadaires. Acad. Sci. 1924. V. 179. P. 1133–1136.

3. **Galaktionov V. A.** Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics / V. A. Galaktionov, S. R. Svirshchevskii. Boca Raton: Chapman and Hall / CRC, 2006.
4. **Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д.** Точные решения уравнений Навье — Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теорет. основы хим. технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.
5. **Петров А. Г.** Точное решение уравнений Навье — Стокса в слое жидкости между движущимися параллельно пластинами // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 5. С. 13–18.
6. **Reynolds O.** On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1886. V. 177. P. 157–234.

Поступила в редакцию 6/IV 2012 г.,
в окончательном варианте — 13/VI 2012 г.