УДК 517.949.8

Сходимость метода расщепления для нелинейного уравнения Больцмана

А.Ш. Акыш

Институт математики МОН РК, ул. Пушкина, д. 125, Алматы, 050010
E-mail: akysh41@mail.ru

Акыш А.Ш. Сходимость метода расщепления для нелинейного уравнения Больцмана // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 2. — С. 123–131.

Рассматривается вопрос о сходимости схемы метода расщепления для нелинейного уравнения Больцмана. На основе схемы метода расщепления получена ограниченность положительных решений в пространстве непрерывных функций. С помощью ограниченности решения и установленных априорных оценок доказывается сходимость схемы метода расщепления и единственность предельного элемента. Найденный предельный элемент удовлетворяет эквивалентному интегральному уравнению Больцмана. Тем самым показана разрешимость нелинейного уравнения Больцмана в целом по времени.

Ключевые слова: *метод расщепления, сходимость схемы метода расщепления, нелинейное уравнение Больцмана, разрешимость нелинейного уравнения Больцмана в целом по времени, существование и единственность решения уравнения Больцмана, априорные оценки.*

Akysh A.Sh. Convergence of splitting method for the nonlinear Boltzmann equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 2. — P. 123–131.

The question of convergence of the splitting method scheme for the nonlinear Boltzmann equation is considered. On the basis of the splitting method scheme, boundedness of positive solutions in the space of continuous functions is obtained. By means of the solution boundedness and found a priori estimates, convergence of the splitting method scheme and uniqueness of the limiting element are proved. The found limiting element satisfies the equivalent integral Boltzmann equation. Thereby global solvability of the nonlinear Boltzmann equation in time is shown.

Key words: *splitting method, convergence of the splitting method scheme, nonlinear Boltzmann equation, global solvability of the nonlinear Boltzmann equation in time, existence and uniqueness of a solution to the Boltzmann equation, a priori estimates.*

1. Введение

Современное состояние математической теории нелинейного уравнения Больцмана [1] содержится, например, в работах [2–5]. Авторы обзора [5] писали: “... Вот уже свыше 110 лет это уравнение привлекает внимание исследователей, но лишь в последние годы была доказана *разрешимость в целом* пространственно-неоднородной задачи в случае малого отклонения состояния газа от положения равновесия — более общие результаты не получены и по сей день ...”. Из работ последних лет отметим [6]. Однако в этой работе отсутствует единственность решения.

При исследовании нелинейных уравнений Больцмана наиболее перспективным оказался метод расщепления. Различные схемы расщепления применительно к моделям нелинейного уравнения Больцмана имеются в работах [7–10].

В работах [11–13] разработан метод исследования устойчивости класса двухслойных схем, соответствующих многомерным задачам математической физики с постоянными и переменными коэффициентами в функциональных пространствах ℓ_p, $1 < p \le \infty$. И в некоторых случаях показано, что созданный метод дает положительные результаты при исследовании разностных схем для прикладных нелинейных задач математической физики.

В [14] нами обнаружены неизвестные свойства систем трехмерных нелинейных уравнений Карлемана, позволяющие доказать глобальную теорему, исходя из самой системы, методом априорных оценок. А в [11] даны обоснования двухслойных схем в пространствах ℓ_p, $1 < p \le \infty$, для трехмерной N-скоростной модели Карлемана в теории нелинейного уравнения Больцмана.

В работе [10] для трехмерной более общей модели, соответствующей нелинейному уравнению Больцмана, используя метод расщепления, доказана теорема существования и единственности решений в целом по времени $t < \infty$ в классе произвольных положительных начальных функций, что послужило стимулом для доказательства глобальной теоремы существования и единственности решения для полного нелинейного уравнения Больцмана в классе произвольных неотрицательных начальных функций методом расщепления [15, 16].

2. Постановка задачи

Задача Коши для нелинейного уравнения Больцмана для молекул — твердых шаров радиуса χ — в области $Q = [0,T] \times G \times V_3$, $t \in [0,T]$, $T < \infty$; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in G \equiv \{0 \le x_\alpha \le 1,\ \alpha = \overline{1,3}\}$; $\boldsymbol{v} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in V_3 \equiv \{-\infty \le \xi_\alpha \le \infty,\ \alpha = \overline{1,3}\ \}$, относительно функции распределения $f = f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ запишется [2]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \boldsymbol{B}(f,f) \tag{1}$$

с начальным

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \tag{2}$$

и периодическим граничным условиями

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,|_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \qquad \alpha = \overline{1,3}, \tag{3}$$

где

$$\boldsymbol{B}(f,f) = \boldsymbol{J}(f) - f\boldsymbol{S}(f), \qquad \boldsymbol{J}(f) = \int_{V_3}\int_{\boldsymbol{\Sigma}} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}')f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_1')K(\theta,\boldsymbol{W})\,d\sigma\,d\boldsymbol{v}_1,$$

$$\boldsymbol{S}(f) = \int_{V_3}\int_{\boldsymbol{\Sigma}} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_1)K(\theta,\boldsymbol{W})\,d\sigma\,d\boldsymbol{v}_1, \qquad K(\theta,\boldsymbol{W}) = 0.25\chi^2|\boldsymbol{W}|\sin(2\theta),$$

$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$ — векторы скорости двух сталкивающихся молекул, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1$ — вектор относительной скорости; скорости молекул после столкновений $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{v}_1'$ связаны с $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$ посредством динамических соотношений: $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{W})$, $\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{W})$; $\boldsymbol{g}$ — единичный вектор в направлении рассеяния молекул: $\boldsymbol{g} = (\sin\theta\cos\varepsilon,\ \sin\theta\sin\varepsilon,\ \cos\theta)$; $(\theta,\varepsilon) \in \boldsymbol{\Sigma} \equiv \{0 \le \theta \le \pi;\ 0 \le \varepsilon \le 2\pi\}$; $\Gamma_{\rho x_\alpha}$ — грань куба G, перпендикулярная к оси x_α, проходящая через $x_\alpha = \rho$, ρ принимает значение либо 0, либо 1.

Начальная функция $\varphi(x,\boldsymbol{v})$ такая, что

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) > 0 \wedge \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{C}(G\times V_3), \tag{4а}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \,|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \,|_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \quad \alpha=\overline{1,3}, \tag{4б}$$

$$\int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^\gamma \, \|\varphi(\boldsymbol{v})\| \, d\boldsymbol{v} = A_\gamma < \infty, \quad \gamma = \overline{0.2}, \tag{4в}$$

где $\|\varphi(\boldsymbol{v})\| = \sup_{\boldsymbol{x}\in G}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ при каждом $\boldsymbol{v}\in V_3$.

3. Метод расщепления

Для решения задачи (1)−(3) используем метод расщепления.

Отрезок $[0,T]$ разделим на M равных частей длины τ точками $t_n = n\tau$, $n=\overline{0, M-1}$. Предположим, что известно приближение $f^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ в момент времени $n\tau$. Тогда схемы метода расщепления, соответствующие задаче (1)–(3), записываются в следующем виде:

$$\frac{f^{n+1/5}-f^n}{\tau} = -f^{n+1/5}\boldsymbol{S}(f^{n+1/5}), \tag{5}$$

$$\frac{f^{n+2/5}-f^{n+1/5}}{\tau} = \boldsymbol{J}(f^{n+1/5}) \tag{6}$$

с начальными

$$f^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \tag{7}$$

$$\frac{f^{n+(\alpha+2)/5}-f^{n+(\alpha+1)/5}}{\tau} + \xi_\alpha\,\frac{\partial f^{n+(\alpha+2)/5}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \alpha=\overline{1,3}, \tag{8}$$

и граничными условиями

$$f^{n+(\alpha+2)/5}\,|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f^{n+(\alpha+2)/5}\,|_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \quad \alpha=\overline{1,3}. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, что на решениях из пространства $C^{(2)}\big(0,T\big]\cap C^{(3)}\big(G\big)$ уравнения (5), (6), (8) аппроксимируют на целом шаге по времени с первым порядком аппроксимации по τ ниже следующее разностно-дифференциальное уравнение Больцмана:

$$\frac{f^{n+1}-f^n}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^{3}\xi_\alpha\,\frac{\partial f^{n+1}}{\partial x_\alpha} = \boldsymbol{B}(f^n,f^n),$$

соответствующее (1).

Пусть известное приближение $f^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ обладает всеми свойствами (4а), (4б), (4в) начальной функции. Множество функций со свойствами f^n обозначим через $\boldsymbol{I}$.

Из нелинейного уравнения (5) решение $f^{n+1/5}$ явно через функцию f^n не определяется. Поэтому для решения задачи (5), (6) на каждом фиксированном дробном шаге используем итерационный процесс

$$f^{n+1/5}_{(m+1)} = \frac{f^n}{1+\tau\boldsymbol{S}\big(f^{n+1/5}_{(m)}\big)} \tag{10}$$

с начальным приближением

$$f^{n+1/5}_{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = f^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}). \tag{11}$$

Заметим, что элементы последовательности $\{f_{(m)}^{n+1/5}\}$ положительны и равномерно ограничены сверху функцией f^n, т. е.

$$0 < f_{(m)}^{n+1/5}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \le f^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}). \tag{12}$$

И нетрудно проверить, что нелинейный оператор $f^n\big[1+\tau\boldsymbol{S}\big(f_{(m)}^{n+1/5}\big)\big]^{-1}$ является положительным и монотонным [17]. Следовательно, итерационный процесс (10), (11) сходится к некоторому положительному пределу $f_{(*)}^{n+1/5}$.

Далее, не загромождая запись, всегда будем подразумевать, что функция $f^{n+1/5}$ с дробным показателем $n+1/5$ в уравнениях (5), (6) заменена на предельный элемент $f_{(*)}^{n+1/5}$. Опуская нижний значок $(*)$, запишем уравнение (10) в виде

$$f^{n+1/5} = \frac{f^n}{1+\tau\boldsymbol{S}\big(f^{n+1/5}\big)}. \tag{13}$$

Лемма 1. *Если* $f^n \in \boldsymbol{I}$, *то* $f^{n+1/5}, f^{n+2/5} \in \boldsymbol{I}$.

Доказательство. Свойства (4а), (4б) функции $f^{n+1/5}$ вытекают из соответствующих свойств известного приближения f^n. Для доказательства (4в) из функционального уравнения (13), используя положительные значения f^n, $f^{n+1/5}$ и функционала $\boldsymbol{S}(f^{n+1/5})$, получаем

$$f^{n+1/5}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \le f^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \quad \text{или} \quad \|f^{n+1/5}(\boldsymbol{v})\| \le \|f^n(\boldsymbol{v})\| \quad \forall\, \boldsymbol{v}\in V_3.$$

Интегрируя последнее по области V_3, имеем

$$\int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^\gamma\, \|f^{n+1/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^\gamma\, \|f^n(\boldsymbol{v})\| d\boldsymbol{v}, \quad \gamma = \overline{0.2}. \tag{14}$$

Итак, доказана первая часть леммы 1.

Перепишем уравнение (6):

$$f^{n+2/5} = f^{n+1/5} + \tau\boldsymbol{J}(f^{n+1/5}). \tag{15}$$

Отсюда следуют свойства (4а), (4б) функции $f^{n+2/5}$ с учетом структуры функционала $\boldsymbol{J}(f^{n+1/5})$ и соответствующих свойств функции $f^{n+1/5}$.

Складывая (5) и (6), получаем

$$f^{n+2/5} = f^n + \tau\boldsymbol{B}\big(f^{n+1/5}, f^{n+1/5}\big).$$

Так как функция $f^{n+2/5}$ обладает свойствами (4а), (4б) и определяется через известные функции f^n, $f^{n+1/5}$, то она может достигать наибольшего локального максимума в некоторых точках $\boldsymbol{x_v}\in G$ при каждом $\boldsymbol{v}\in V_3$, т. е.

$$\|f^{n+2/5}(\boldsymbol{v})\| = f^n(\boldsymbol{x_v},\boldsymbol{v}) + \tau\boldsymbol{B}\big(f^{n+1/5}(\boldsymbol{x_v},\boldsymbol{v}), f^{n+1/5}(\boldsymbol{x_v},\boldsymbol{v})\big).$$

Отсюда, воспользуясь тем, что функции f^n, $f^{n+1/5}$ удовлетворяют условию (4в) и свойством интеграла столкновений, найдем

$$\int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^\gamma \,\|f^{n+2/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^\gamma \,\|f^n(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v}, \quad \gamma = 0.2. \tag{16}$$

Из этих оценок следует, что

$$\int_{V_3} |\boldsymbol{v}| \,\|f^{n+2/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le \int_{V_3} (1 + |\boldsymbol{v}|^2)\|f^n(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v}. \tag{17}$$

□

Задача (8), (9) имеет единственное положительное решение, которое задается с помощью следующих формул:

$$f^{n+(\alpha+2)/5}(\cdot, x_\alpha, \cdot, \boldsymbol{v}) = \beta\gamma(x_\alpha, 0)\int_0^1 \exp[-a_\alpha(1-s_\alpha)] f^{n+(\alpha+1)/5}(\cdot, s_\alpha, \cdot, \boldsymbol{v})\, ds_\alpha + \int_0^{x_\alpha} \gamma(x_\alpha, s_\alpha) f^{n+(\alpha+1)/5}(\cdot, s_\alpha, \cdot, \boldsymbol{v})\, ds_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,3}; \quad \xi_\alpha > 0\,, \tag{18}$$

$$f^{n+(\alpha+2)/5}(\cdot, x_\alpha, \cdot, \boldsymbol{v}) = \beta\gamma(1, x_\alpha)\int_0^1 \exp[-a_\alpha s_\alpha] f^{n+(\alpha+1)/5}(\cdot, s_\alpha, \cdot, \boldsymbol{v})\, ds_\alpha + \int_0^{x_\alpha} \gamma(x_\alpha, s_\alpha) f^{n+(\alpha+1)/5}(\cdot, s_\alpha, \cdot, \boldsymbol{v})\, ds_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,3}; \quad \xi_\alpha < 0, \tag{19}$$

$$f^{n+(\alpha+2)/5}(\cdot, x_\alpha, \cdot, \boldsymbol{v}) = f^{n+(\alpha+1)/5}(\cdot, x_\alpha, \cdot, \boldsymbol{v}), \quad \alpha = \overline{1,3}; \quad \xi_\alpha = 0, \tag{20}$$

где

$$a_\alpha = |\tau\xi_\alpha|^{-1}, \qquad \gamma(y,z) = a_\alpha \exp[-a_\alpha(y-z)], \qquad \beta = [1 - \exp(-a_\alpha)]^{-1}.$$

Из (18)–(20) следует, что $f^{n+(\alpha+2)/5}(\cdot, x_\alpha, \cdot, \boldsymbol{v}) > 0$, $\alpha = \overline{1,3}$, в $G \times V_3$ и является периодической функцией по x_α, так как $f^{n+2/5}(\cdot, x_\alpha, \cdot, \boldsymbol{v})$ — положительная и периодическая по x_α, $\alpha = \overline{1,3}$. Тем самым свойства (4а), (4б) функции $f^{n+(\alpha+2)/5}$, $\alpha = \overline{1,3}$, показаны.

Лемма 2. *Для решения задач* (8), (9) *имеют место оценки*:

$$\|f^{n+(\alpha+2)/5}(\boldsymbol{v})\| \le \|f^{n+(\alpha+1)/5}(\boldsymbol{v})\|, \quad \alpha = \overline{1,3}, \ \forall\, \boldsymbol{v} \in V_3; \tag{21}$$

$$\int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^\gamma \,\|f^{n+(\alpha+2)/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^\gamma \,\|f^{n+(\alpha+1)/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v}, \quad \gamma = \overline{0.2}, \quad \alpha = \overline{1,3}. \tag{22}$$

Доказательство. Рассмотрим решение (18) задачи (8), (9) при $\xi_\alpha > 0$. Откуда, с учетом положительности решения, переходя к неравенству, получим

$$f^{n+(\alpha+2)/5}(\cdot, x_\alpha, \cdot, \boldsymbol{v}) \le \|f^{n+(\alpha+1)/5}(\boldsymbol{v})\| \times \left(\beta\gamma(x_\alpha, 0)\int_0^1 \exp[-a_\alpha^{(k)}(1-s_\alpha)]\, ds_\alpha + \int_0^{x_\alpha} \gamma(x_\alpha, s_\alpha)\, ds_\alpha\right), \quad \alpha = \overline{1,3}, \quad \xi_\alpha > 0\,.$$

Вычислив, находим интегралы:

$$\beta\gamma(x_\alpha, 0)\int_0^1 \exp[-a_\alpha^{(k)}(1-s_\alpha)]\, ds_\alpha = \exp(-a_\alpha^{(k)} x_\alpha), \quad \int_0^{x_\alpha} \gamma(x_\alpha, s_\alpha\,)\, ds_\alpha = 1 - \exp(-a_\alpha^{(k)} x_\alpha).$$

Подставляя найденные значения интегралов в предыдущее неравенство, получим доказательство первой части леммы 2 при $\xi_\alpha > 0$, т.е. оценку (21). Таким же образом доказываются остальные случаи.

Интегрируя неравенство (21) по области V_3, получим оценку (22), что доказывает свойство (4в). □

Лемма 3. *Если начальная функция удовлетворяет условию* (4в), *то для решений задач* (5)–(9) *справедливы оценки*:

$$\int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^{\gamma}\, \|f^{n+1}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le \ldots \le \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^{\gamma}\, \|f^{n+2/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^{\gamma}\, \|\varphi(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \equiv A_{\gamma},\ \ \gamma=0.2; \tag{23}$$

$$\int_{V_3} |\boldsymbol{v}|\, \|f^{n+1}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le \ldots \le \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|\, \|f^{n+2/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le \int_{V_3} (1+|\boldsymbol{v}|^2)\|\varphi(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \equiv A_1; \tag{24}$$

$$\int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^{\gamma}\, \|f^{n+1/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le A_{\gamma}, \quad \gamma = 0.2; \qquad \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|\, \|f^{n+1/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le A_1. \tag{25}$$

Доказательство. Из оценок (16), (22) выводится цепь неравенств:

$$\begin{aligned}\int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^{\gamma}\, \|f^{n+1}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} &\le \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^{\gamma}\, \|f^{n+4/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^{\gamma}\, \|f^{n+3/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \\ &\le \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^{\gamma}\, \|f^{n+2/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^{\gamma}\, \|f^{n}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v}, \quad \gamma = 0.2.\end{aligned}$$

Откуда, суммируя по n, приходим к доказательству (23), из которого следует (24), а из них и (14) найдем (25). □

Далее, используя преобразование Карлемана интеграла столкновений из [2, с. 33], уравнение (15) запишем в виде

$$f^{n+2/5} = f^{n+1/5} + \tau \boldsymbol{J}(f^{n+1/5}) \equiv f^{n+1/5} + 2\tau \int_{V_3} \frac{f^{n+1/5}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})}{\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}} \int_{E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}} f^{n+1/5}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q}\, d\boldsymbol{v}, \tag{26}$$

где $E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}$ — бесконечная плоскость, $d\boldsymbol{q}$ — элемент площади на $E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}$,

$$\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}} = \sqrt{(\xi_1' - \xi_1)^2 + (\xi_2' - \xi_2)^2 + (\xi_3' - \xi_3)^2} \text{ — расстояние между } \boldsymbol{v}' \text{ и } \boldsymbol{v}.$$

И будем пользоваться неравенствами Карлемана, которые в нашем случае запишутся в следующем виде:

$$\int_{E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}} \boldsymbol{J}(f^{n+1/5})d\boldsymbol{q} \le \pi \int_{V_3\times V_3} f^{n+1/5}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) f^{n+1/5}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_1)\, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{v}_1\ \forall\, \boldsymbol{x} \in G; \tag{27}$$

$$\int_{V_3} \frac{1}{\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}} \boldsymbol{J}(f^{n+1/5})\, d\boldsymbol{v} \le 4\pi \int_{V_3\times V_3} f^{n+1/5}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) f^{n+1/5}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_1)\, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{v}_1\ \forall\, \boldsymbol{x} \in G. \tag{28}$$

Из уравнения (6) с помощью оценок (14), (25) и предыдущих неравенств получим:

$$\int_{V_3} \frac{1}{\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}} \|f^{n+2/5}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} \le \int_{V_3} \frac{1}{\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}} \|f^{n}(\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} + 4\pi\tau A_0^2,$$

$$\int_{E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}} \|f^{n+2/5}(\boldsymbol{q})\|\, d\boldsymbol{q} \le \int_{E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}} \|f^{n}(\boldsymbol{q})\|\, d\boldsymbol{q} + \tau\pi A_0^2.$$

Тогда, объединяя последние неравенства с оценкой (21), имеем цепь неравенств:

$$\int_{V_3}\frac{1}{\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n+1}(\boldsymbol{v})\|\,d\boldsymbol{v}\le\int_{V_3}\frac{1}{\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n+4/5}(\boldsymbol{v})\|\,d\boldsymbol{v}\le\int_{V_3}\frac{1}{\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n+3/5}(\boldsymbol{v})\|\,d\boldsymbol{v}$$
$$\le\int_{V_3}\frac{1}{\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n+2/5}(\boldsymbol{v})\|\,d\boldsymbol{v}\le\int_{V_3}\frac{1}{\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n}(\boldsymbol{v})\|d\boldsymbol{v}+4\pi\tau A_0^2,$$
$$\int_{E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n+1}(\boldsymbol{q})\|\,d\boldsymbol{q}\le\int_{E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n+4/5}(\boldsymbol{q})\|\,d\boldsymbol{q}\le\int_{E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n+3/5}(\boldsymbol{q})\|\,d\boldsymbol{q}$$
$$\le\int_{E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n+2/5}(\boldsymbol{q})\|\,d\boldsymbol{q}\le\int_{E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n}(\boldsymbol{q})\|\,d\boldsymbol{q}+\pi\tau A_0^2.$$

Суммируя по n каждую цепочку, найдем:

$$\int_{V_3}\frac{1}{\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n+1}(\boldsymbol{v})\|\,d\boldsymbol{v}\le\int_{V_3}\frac{1}{\rho_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|\varphi(\boldsymbol{v})\|\,d\boldsymbol{v}+4\pi TA_0^2=A_3,\tag{29}$$
$$\int_{E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|f^{n+1}(\boldsymbol{q})\|\,d\boldsymbol{q}\le\int_{E_{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}}\|\varphi(\boldsymbol{q})\|\,d\boldsymbol{q}+\pi TA_0^2=A_4.\tag{30}$$

Из уравнения (26) с учетом (12), (21) и последних неравенств находим оценки:

$$\|\boldsymbol{J}(f^{n+1/5})\|\le\|\boldsymbol{J}(f^n)\|\le A_5,\tag{31}$$
$$f^{n+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\le f^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})+\tau A_5,\quad \text{где}\quad A_5=2A_3A_4.\tag{32}$$

Просуммировав неравенство (32) по n и произведя оценку по максимуму нормы, окончательно запишем

$$\|f^{n+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\|_{\boldsymbol{C}(G\times V_3)}=\|\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\|_{\boldsymbol{C}(G\times V_3)}+TA_5.\tag{33}$$

Обозначим совокупность найденных приближенных решений задач (5)–(9) через $\{f^\tau\}$, а проинтерполированных значений на отрезке $[0,T]$ – $\tilde f^\tau$.

В скоростном пространстве V_3 введем шар V_R с центром в начале координат с достаточно большим радиусом $R<\infty$, вследствие чего получим конечную замкнутую область $Q_R=[0,T]\times G\times V_R$. Ясно, что для функции $\tilde f^\tau$ имеет место оценка

$$\int_{V_3}|\boldsymbol{v}|^\gamma\,\|\tilde f^\tau(\boldsymbol{v})\|\,d\boldsymbol{v}\le A_\gamma<\infty,\quad \gamma=0.2.$$

Отсюда получим ее порядок роста

$$\|\tilde f^\tau(\boldsymbol{v})\|\approx\frac{A_2}{1+|\boldsymbol{v}|^\lambda},\quad \lambda>3.\tag{34}$$

Отметим оценки

$$\|f\boldsymbol{S}(f)\|_{\boldsymbol{C}(G\times V_3)}\le\|f\|_{\boldsymbol{C}(G\times V_3)}\|\boldsymbol{S}(f)\|_{\boldsymbol{C}(G\times V_3)}\le A_6,\quad \boldsymbol{S}(f)>A_7>0,\tag{35}$$

где $A_6=2\pi A_1A_2$, A_7 — постоянная, зависящая только от начального значения $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$. Подобные неравенства имеются в [2].

Так как все оценки установлены в области Q, то из оценки (34) следует возможность взять радиус шара R сколь угодно большим. Тогда из оценок (29)–(31), (33)–(35)

получим компактность функции $\tilde{f}^\tau$ в пространстве $\boldsymbol{C}(Q)$. А в силу компактности имеют место следующие предельные переходы при $\tau \to 0$:

$$\tilde{f}^\tau \to f, \quad \boldsymbol{J}(\tilde{f}^\tau) \to \boldsymbol{J}(f), \quad \tilde{f}^\tau \boldsymbol{S}(\tilde{f}^\tau) \to f\boldsymbol{S}(f), \quad \tilde{f}^\tau(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \mid_{t=0} \to \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}),$$
$$\tilde{f}^\tau(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \mid_{\Gamma_{0x_\alpha}} = \tilde{f}^\tau(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \mid_{\Gamma_{1x_\alpha}} \to f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \mid_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \mid_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \quad \alpha = \overline{1,3}.$$

4. Единственность решения

Предположим, что имеются два решения задачи (1)–(3): $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ и $F(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$. Выпишем уравнения для их разности $U = f - F$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \operatorname{grad} U) = \boldsymbol{B}(f,f) - \boldsymbol{B}(F,F)$$

в области $Q = [0,T] \times G \times V_3$ с нулевым начальным условием $U \mid_{t=0} = 0$ и периодическим граничным условием

$$U(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \mid_{\Gamma_{0x_\alpha}} = U(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \mid_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \quad \alpha = \overline{1,3}. \tag{36}$$

Благодаря тому, что $U \in C(Q)$, установлено соотношение

$$\frac{d}{dt}\int_{V_3} \|U(t,\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} = 0, \text{ что и равносильно } \quad U(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \equiv 0.$$

Задаче (1)–(3) соответствует эквивалентное интегральное уравнение [18]:

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t,\boldsymbol{v}) \exp\Big\{-\int_0^t \boldsymbol{S}\big(f(s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}(t-s),\boldsymbol{v})\big)\, ds\Big\} +$$
$$\int_0^t \boldsymbol{J}\big(f(t',\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}(t-t'),\boldsymbol{v})\big) \exp\Big\{-\int_{t'}^t \boldsymbol{S}\big(f(s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}(t-s),\boldsymbol{v})\big)\, ds\Big\}\, dt'. \tag{37}$$

Определение. Назовем слабым решением задачи (1)–(3) положительную функцию $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$, непрерывную по совокупности переменных, удовлетворяющую интегральному уравнению (37).

В силу единственности решения задачи (1)–(3) и оценок (31), (35) найденный методом расщепления предельный элемент удовлетворяет интегральному уравнению (37). Итак, доказана

Теорема (см. [16]). *Если начальная функция $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ удовлетворяет условиям (4), то существует единственное слабое решение (в смысле определения) задачи (1)–(3) на интервале времени $[0,T]$ $\forall T < \infty$ и оно принадлежит $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{C}(Q)$.*

Следствие. *$\mathbb{H}$–функция Больцмана относительно $\|f(t,\boldsymbol{v})\|$ имеет вид*

$$\mathbb{H}(t) = \int_{V_3} \|f(t,\boldsymbol{v})\| \ln \|f(t,\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v},$$

и функция $\|f(t,\boldsymbol{v})\|$ при $t \to \infty$ стремится к функции Максвелла $\|f(\boldsymbol{v})\| = Ce^{-\alpha \boldsymbol{v}^2}$, где

C и α — постоянные, определяемые с помощью следующих соотношений:

$$\int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^\gamma \|f(t,\boldsymbol{v})\|\, d\boldsymbol{v} = \int_{V_3} |\boldsymbol{v}|^\gamma \varphi(\boldsymbol{x_v}, \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v}, \quad \gamma = 0.2, \quad t \to \infty,$$

где $\boldsymbol{x_v}$ — точки локальных максимумов функции $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ при $t \to \infty$ и каждом $\boldsymbol{v} \in V_3$.

Литература

1. **Больцман Л.** Лекции по теории газов. — М.: Изд-во тех.–теор. лит., 1956.
2. **Карлеман Т.** Математические задачи кинетической теории газов. — М.: ИЛ, 1960.
3. **Черчиньяни К.** Теория и приложения уравнения Больцмана. — М.: Мир, 1978.
4. **Zwifel P.F.** The Boltzmann equation and its properties // Lecture Notes in Mathematics. — 1984. — Vol. 1048. — P. 111–175.
5. Неравновесные явления: Уравнения Больцмана / Пер. с англ.; Под ред. Дж.Л. Либовица, Е.У. Монтролла. — М.: Мир, 1986.
6. **DiPerna R.J., Lions P.L.** Solutions globales de I'equation de Boltzmann // Proc. C. R. Acad. Sci. Paris. — 1988. — Vol. 306, serie I. — P. 343–346.
7. **Temam R.** Sur la résolution exacte et approchée d'un probléme hyperbolique non linéaire de T. Carleman // Archive Rat. Mech. Anal. — 1969. — Vol. 35, № 5. — P. 351–362.
8. **Sultangazin U.M.** Discrete Nonlinear Models of the Boltzmann Equation: — M.: Nauka, 1987.
9. **Platkowski T., Illner R.** Discrete velocity models of the Boltzmann equation: A survey on the mathematical aspects of the theory // SIAM Rev. — 1988. — Vol. 30, № 2. — P. 213–255.
10. **Акишев А.Ш.** Глобальная теорема существования и единственности для трехмерной модели Бродуэлла // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1997. — Т. 37, № 3. — С. 367–377.
11. **Акыш (Акишев) А.Ш.** Об устойчивости в ℓ_p некоторых разностных схем для уравнения переноса // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2002. — Т. 5, № 3. — С. 199–214.
12. **Акыш (Акишев) А.Ш.** Устойчивость в ℓ_p некоторых разностных схем для уравнения теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2003. — Т. 6, № 1. — С. 1–16.
13. **Акыш А.Ш.** Устойчивость в ℓ_p некоторых разностных схем для одной системы нелинейных параболических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2005. — Т. 8, № 4. — С. 273–280.
14. **Акишев А.Ш., Султангазин А.У.** Новые априорные оценки решения для нелинейных систем уравнения Карлемана // Вестник АН Каз. ССР. — 1991. — № 11. — С. 40–47.
15. **Акыш А.Ш.** О нелинейном уравнении Больцмана // Математический журнал / Институт математики МОН РК. — Алматы, 2002. — Т. 2, № 1. — С. 10–16.
16. **Акыш А.Ш.** О разрешимости нелинейного уравнения Больцмана // Неклассические уравнения математической физики. — Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2007. — С. 15–23.
17. **Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др.** Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.
18. **Коган М.Н.** Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 12 сентября 2011 г.