Следует отметить, что общая схема течения в крупномасштабном термике разработана С. А. Христиановичем в 1954 г. и ее основной элемент — представление термика в виде плавучего вихревого кольца [14].
Авторы благодарны С. А. Христиановичу за постоянное внимание к работе и плодотворные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Даринцев А. П., Забавин В. И., Замышляев Б. В. и др.** Особенности движения нагретой массы воздуха, первоначально помещенной в сферический объем, в атмосфере // Современные вопросы механики сплошных сред.— М.: МФТИ, 1985.
2. **Book D. L., Boris J. P.** Flux-corrected transport. I: SHASTA. A fluid transport algorithm that works // J. Comput. Phys.— 1973.— V. 11, N 1.
3. **Book D. L., Boris J. P., Hain K.** Flux-corrected transport. II: Generalizations of the method // J. Computat. Phys.— 1975.— V. 18, N 3.
4. **Полежаев В. И.** Численное решение системы одномерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1966.— № 6.
5. **Maxworthy T.** Turbulent vortex rings // J. Fluid Mech.— 1974.— V. 64, pt 2.
6. **Batt R. G., Bigoni R. A., Rowland D. J.** Temperature-field structure within atmospheric buoyant thermals // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 141.— P. 1—25.
7. **Заславский Б. И.** О формировании и движении всплывающих вихревых колец в однородных и стратифицированных средах // Современные вопросы механики сплошных сред.— М.: МФТИ, 1985.
8. **Driscall R. G., Kennedy L. A.** A model for the turbulent energy spectrum // Phys. Fluids.— 1983.— V. 26, N 5.
9. **Zaets P. G., Onufriev A. T., Safarov N. A., Safarov R. A.** Experimental study of the turbulent one-dimensional spectrum function in rotating pipe flow. Importance of the isotropic uniform turbulence model // 5th EPS Liquid State Conf., Moscow, Oct. 1989: Proc.— Moscow, 1989.
10. **Заец П. Г., Онуфриев А. Т., Сафаров Н. А., Сафаров Р. А.** Экспериментальное исследование поведения энергетического спектра в турбулентном потоке во вращающейся относительно продольной оси трубе. О значении модели однородной изотропной турбулентности // ПМТФ.— 1992.— № 1.
11. **Driscall R. J., Kennedy L. A.** A model for the spectrum of passive scalars in an isotropic turbulence field // Phys. Fluids.— 1985.— V. 28, N 1.
12. **Хинце И. О.** Турбулентность.— М.: ГИФМЛ, 1963.
13. **Pao Y. H.** Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers // Phys. Fluids.— 1965.— V. 8, N 6.
14. **Онуфриев А. Т.** Теория движения вихревого кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва // ПМТФ.— 1967.— № 2.

г. Долгопрудный *Поступила 23/VIII 1991 г.*

УДК 532.546

П. А. Мазуров

ПОСТРОЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ

В работе предлагается способ построения двойственных вариационных принципов двухфазной фильтрации в деформируемой среде. В основе построения лежат вариационные задачи, составляемые для диссипативных и упругих потенциалов, решение которых эквивалентно выполнению законов поведения твердой и жидких фаз. Вариационные принципы позволяют при известных пористости и насыщенности определять поля перемещений и напряжений в твердой фазе и поля давлений и скоростей фильтрации в жидких фазах. В случае двух фаз имеем вариационные принципы теории консолидации и двухфазной фильтрации.

1. Рассмотрим процесс двухфазной фильтрации в вязкопластической среде. Запишем [1] уравнение неразрывности твердой фазы

$$(1 - m)_{,t} + \operatorname{div}((1 - m)\dot{\mathbf{u}}) = 0; \tag{1.1}$$

уравнения неразрывности жидких фаз

(1.2) $$(ms)_{,t} + \operatorname{div}(ms\mathbf{v}_1) = 0;$$

(1.3) $$(m(1-s))_{,t} + \operatorname{div}(m(1-s)\mathbf{v}_2) = 0;$$

уравнение равновесия

(1.4) $$\sigma^f_{ij,j} - p_{,i} = 0;$$

связь между давлениями в жидких фазах

(1.5) $$p_1 - p_2 = p_c$$

и производство энтропии в энергетическом представлении при $T_1 \approx T_2 \approx \approx T_3 \approx \mathrm{const}$ [1]

$$\Sigma = \sigma^f_{ij}\dot{e}^p_{ij} - \mathbf{q}_1\cdot\nabla p_1 - \mathbf{q}_2\cdot\nabla p_2.$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещения твердой фазы; $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — скорости движения жидких фаз; m — пористость; s — насыщенность первой фазы; σ^f_{ij} — компоненты тензора эффективных напряжений $\boldsymbol{\sigma}^f$; $p = sp_1 + (1-s)p_2$ — среднее давление; p_1, p_2 — давления в жидких фазах; $p_c = p_c(s)$ — капиллярный скачок; $\dot{e}^p_{ij} = (1/2)(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$ — компоненты тензора скоростей вязкопластических деформаций $\dot{\mathbf{e}}^p$; $\mathbf{q}_1 = ms(\mathbf{v}_1 - \dot{\mathbf{u}})$, $\mathbf{q}_2 = m(1-s)(\mathbf{v}_2 - \dot{\mathbf{u}})$ — скорости фильтрации фаз; T_1, T_2, T_3 — абсолютные температуры в фазах.

Введем обозначения: $\mathbf{X}_1 = -\nabla p_1$, $\mathbf{X}_2 = -\nabla p_2$, $\mathbf{X}_3 = \boldsymbol{\sigma}^f$, $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{q}_1$, $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{q}_2$, $\mathbf{Y}_3 = \dot{\mathbf{e}}^p$ ($\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ — обобщенные силы, $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)$ — обобщенные скорости). Для замыкания системы уравнений (1.1)—(1.5) используем гипотезу нормальной диссипации [2, 3], согласно которой существует потенциал диссипации $\varphi(\mathbf{Y})$, выпуклый полунепрерывный снизу собственный функционал такой, что

(1.6) $$\mathbf{X} \in \partial\varphi(\mathbf{Y})$$

($\mathbf{X}$ — субградиент функционала $\varphi(\mathbf{Y})$ в точке $\mathbf{Y}$). Из (1.6) вытекает обратное соотношение [3]

(1.7) $$\mathbf{Y} \in \partial\varphi^*(\mathbf{X}),$$

где $\varphi^*(\mathbf{X})$ — сопряженный потенциал диссипации, связанный с $\varphi(\mathbf{Y})$ преобразованием Юнга — Фенхеля [4]. В [3] доказывается эквивалентность следующих утверждений:

(1.8) $$\mathbf{X}' \in \partial\varphi(\mathbf{Y}');$$

(1.9) $\varphi(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}'\cdot\mathbf{Y}$ достигает минимума по $\mathbf{Y}$ в точке $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$;

(1.10) $$\mathbf{Y}' \in \partial\varphi^*(\mathbf{X}');$$

(1.11) $\varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}'$ достигает минимума по $\mathbf{X}$ в точке $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$.

Соотношения (1.8)—(1.11) являются основными при построении вариационных принципов. Примем, что процесс диссипации представляется тремя независимыми диссипативными механизмами [2]:

(1.12) $$\varphi(\mathbf{Y}) = \Psi_1(\mathbf{q}_1) + \Psi_2(\mathbf{q}_2) + \Psi_3(\dot{\mathbf{e}}^p);$$

(1.13) $$\varphi^*(\mathbf{X}) = \Phi_1(\nabla p_1) + \Phi_2(\nabla p_2) + \Phi_3(\boldsymbol{\sigma}^f).$$

Здесь $\Psi_i(\cdot)$, $\Phi_i(\cdot)$ ($i = 1, 2$) — диссипативный и сопряженный диссипативный потенциалы жидких фаз [5]; $\Psi_3(\cdot)$, $\Phi_3(\cdot)$ — диссипативный и сопряженный диссипативный потенциалы вязкопластического скелета [6]. Далее функционалы $\varphi(\mathbf{Y})$, $\varphi^*(\mathbf{X})$ будем считать гладкими:

(1.14) $$\mathbf{X} = \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{Y}),\ \mathbf{Y} = \operatorname{grad}\varphi^*(\mathbf{X}),$$

хотя последующие результаты справедливы для соотношений более общего вида (1.6), (1.7). После некоторых преобразований с учетом (1.12)—

(1.14) систему уравнений (1.1)—(1.7) перепишем в виде

$$-p_{1,i} = \partial\Psi_1(q_1)/\partial q_{1i} \quad \text{или} \quad q_{1i} = -\partial\Phi_1(\nabla p_1)/\partial p_{1,i}; \tag{1.15}$$

$$-p_{2,i} = \partial\Psi_2(q_2)/\partial q_{2i} \quad \text{или} \quad q_{2i} = -\partial\Phi_2(\nabla p_2)/\partial p_{2,i}; \tag{1.16}$$

$$\sigma_{ij}^f = \partial\Psi_3(e^p)/\partial e_{ij}^p \ \text{или} \ e_{ij}^p = \partial\Phi_3(\sigma^f)/\partial\sigma_{ij}^f; \tag{1.17}$$

$$\sigma_{ij,j}^f - p_{,i} = 0; \tag{1.18}$$

$$\operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = 0; \tag{1.19}$$

$$p_1 - p_2 = p_c; \tag{1.20}$$

$$m_{,t} = \operatorname{div}((1 - m)\dot{\mathbf{u}}); \tag{1.21}$$

$$-(ms)_{,t} = \operatorname{div}(\mathbf{q}_1 + ms\dot{\mathbf{u}}). \tag{1.22}$$

2. Построим вариационный принцип в переменных $\dot{\mathbf{u}}$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$. Из (1.8), (1.9) следует, что для действительно происходящего в области Ω процесса $(\mathbf{X}^0, \mathbf{Y}^0)$ величина $\mathbf{Y}^0$, соответствующая $\mathbf{X}^0$, определится из решения задачи

$$\inf_{\mathbf{Y}} B_1^0(\mathbf{Y}) = \inf_{\mathbf{Y}} \int_\Omega [\varphi(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}^0\cdot\mathbf{Y}]\, d\Omega. \tag{2.1}$$

Результат не изменится, если функционал $B_1^0(\mathbf{Y})$ минимизировать по переменным $\dot{\mathbf{u}}$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$. В такой постановке определение решения задачи (2.1) тривиально, так как необходимо знать силы $\mathbf{X}_1^0$, $\mathbf{X}_2^0$, $\mathbf{X}_3^0$ во всей области Ω. Преобразуем интеграл $\int_\Omega \mathbf{X}^0\cdot\mathbf{Y}d\Omega$, чтобы для решения задачи (2.1) было достаточно знания величины $\mathbf{X}^0$ на границе Γ области Ω. Получим

$$\int_\Omega \mathbf{X}^0\cdot\mathbf{Y}d\Omega = \int_\Omega \left(-\mathbf{q}_1\cdot\nabla p_1^0 - \mathbf{q}_2\cdot\nabla p_2^0 + e_{ij}^p\sigma_{ij}^{f0}\right) d\Omega = -\int_\Omega \mathbf{q}_1\cdot\nabla((1-s)p_c)\, d\Omega +$$
$$+ \int_\Omega \mathbf{q}_2\cdot\nabla(sp_c)\, d\Omega + \int_\Gamma \Pi_i^0\dot{u}_i d\Gamma - \int_\Gamma q_n p^0 d\Gamma + \int_\Omega p^0 \operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\, d\Omega,$$

где $q_n = q_{1n} + q_{2n}$ — нормальная составляющая суммарной скорости фильтрации $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$; $\Pi_i = \left(\sigma_{ij}^f - p\delta_{ij}\right)$. При преобразовании использованы уравнения (1.18), (1.20), которым удовлетворяют силы $\mathbf{X}_1^0$, $\mathbf{X}_2^0$, $\mathbf{X}_3^0$. При ограничениях (1.19) и

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^\cap \ \text{на} \ \Gamma_u; \tag{2.2}$$

$$q_n = q_n^\cap \ \text{на} \ \Gamma_q \tag{2.3}$$

от задачи (2.1) приходим к задаче

$$\inf_{\dot{\mathbf{u}},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\in(1.19),(2.2),(2.3)} I_1(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2); \tag{2.4}$$

$$I_1(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \int_\Omega [\Psi_1(\mathbf{q}_1) + \Psi_2(\mathbf{q}_2) + \Psi_3(\mathbf{e}^p)]\, d\Omega + \tag{2.5}$$
$$+ \int_\Omega \mathbf{q}_1\cdot\nabla((1-s)p_c)\, d\Omega - \int_\Omega \mathbf{q}_2\cdot\nabla(sp_c)\, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \Pi_i^0\dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_p} q_n p^0 d\Gamma,$$

$$\Gamma_\sigma + \Gamma_u = \Gamma, \ \Gamma_p + \Gamma_q = \Gamma.$$

Из равенства нулю вариации $\delta I_1(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ при ограничениях (1.19), (2.2), (2.3) следует выполнение системы уравнений (1.15)—(1.20) и граничных условий

$$\Pi_i = \Pi_i^0 \text{ на } \Gamma_\sigma; \tag{2.6}$$

$$p = p^0 \text{ на } \Gamma_p. \tag{2.7}$$

3. Построим вариационный принцип в переменных σ^f, p. Из (1.10), (1.11) вытекает, что для действительно происходящего в области Ω процесса ($\mathbf{X}^0$, $\mathbf{Y}^0$) величина $\mathbf{X}^0$, соответствующая $\mathbf{Y}^0$, определится из решения задачи

$$\inf_{\mathbf{X}} B_2^0(\mathbf{X}) = \inf_{\mathbf{X}} \int_\Omega [\varphi^*(\mathbf{X}) - \mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}^0]\, d\Omega. \tag{3.1}$$

Результат не изменится, если функционал $B_2^0(\mathbf{X})$ минимизировать по переменным σ^f, p_1, p_2. Сделав замену $p_1 = p + (1 - s)p_c$, $p_2 = p - sp_c$, получим

$$B_2^0(\sigma^f, \nabla p) = \int_\Omega [\Phi_1(\nabla(p + (1 - s)p_c)) + \Phi_2(\nabla(p - sp_c)) + \Phi_3(\sigma^f)]\, d\Omega + \tag{3.2}$$

$$+ \int_\Omega \left(\mathbf{q}^0\cdot\nabla p - e_{ij}^{p0}\sigma_{ij}^f\right) d\Omega \quad \left(B_2^0(\sigma^f, \nabla p) = B_2^0(\sigma^f, \nabla p_1, \nabla p_2) + \text{const}\right).$$

Преобразуя последний интеграл в правой части (3.2), имеем

$$\int_\Omega \left(\mathbf{q}^0\cdot\nabla p - e_{ij}^{p0}\sigma_{ij}^f\right) d\Omega = \int_\Gamma \Pi_i \dot{u}_i^0\, d\Gamma - \int_\Gamma q_n^0 p\, d\Gamma - \int_\Omega \dot{u}_i^0\left(\sigma_{ij,j}^f - p_{,i}\right) d\Omega.$$

Здесь использовано уравнение (1.19), которому удовлетворяют скорости $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$, $\mathbf{Y}_3$. При ограничениях (1.18), (2.6), (2.7) от задачи (3.1) приходим к задаче

$$\inf_{\sigma^f, p \in (1.18),(2.6),(2.7)} I_2(\sigma^f, p), \tag{3.3}$$

где

$$I_2(\sigma^f, p) = \int_\Omega [\Phi_1(\nabla(p + (1 - s)p_c)) + \Phi_2(\nabla(p - sp_c)) + \Phi_3(\sigma^f)]\, d\Omega - \tag{3.4}$$

$$- \int_{\Gamma_u} \Pi_i \dot{u}_i^0\, d\Gamma + \int_{\Gamma_q} q_n^0 p\, d\Gamma.$$

Из равенства нулю вариации $\delta I_2(\sigma^f, p)$ при ограничениях (1.18), (2.6), (2.7) следует выполнение системы уравнений (1.15)—(1.20) и граничных условий (2.2), (2.3). Таким образом, получены два вариационных принципа (2.4), (3.3), эквивалентных решению системы уравнений (1.15)—(1.20) с краевыми условиями (2.2), (2.3), (2.6), (2.7) при заданном поле насыщенности и пористости.

4. Применяя методы двойственности [4], находим

$$\inf_{\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in (1.19),(2.2),(2.3)} I(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \sup_{\sigma^f, p \in (1.18),(2.6),(2.7)} [-I_2(\sigma^f, p)].$$

Переходя от задачи (2.4) к двойственной по одной или двум переменным, можно получить шесть минимаксных задач $\inf\sup I_i(\cdot)$, $i = \overline{3,8}$. При этом необходимы краевые условия

$$q_{1n} = q_{1n}^0,\ q_{2n} = q_{2n}^0 \text{ на } \Gamma_q. \tag{4.1}$$

Функционалы $I_i(\cdot)$ $(i = \overline{3,8})$ получим несколько иным способом. Обозначив

$$\operatorname{div}\mathbf{q}_1 = \varphi_1(\mathbf{r}, t),\ \operatorname{div}\mathbf{q}_2 = \varphi_2(\mathbf{r}, t),\ \operatorname{div}\dot{\mathbf{u}} = \varphi_3(\mathbf{r}, t), \tag{4.2}$$

задачу минимизации функционала (2.4) разделим по переменным $\dot{\mathbf{u}}$,

$\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$:

(4.3) $$\inf_{\dot{\mathbf{u}},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\in(1.19),(2.2),(2.3)} I_1(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) =$$

$$= \inf_{\mathbf{q}_1\in(4.1),(4.2)} J_1(\mathbf{q}_1) + \inf_{\mathbf{q}_2\in(4.1),(4.2)} J_2(\mathbf{q}_2) + \inf_{\dot{\mathbf{u}}\in(2.2),(4.2)} J_3(\dot{\mathbf{u}}).$$

Здесь $J_1(\mathbf{q}_1) = \int\limits_\Omega [\Psi_1(\mathbf{q}_1) + \mathbf{q}_1\cdot\nabla((1-s)p_c)]\,d\Omega + \int\limits_{\Gamma_p} q_{1n}p^0 d\Gamma$;

$$J_2(\mathbf{q}_2) = \int\limits_\Omega [\Psi_2(\mathbf{q}_2) - \mathbf{q}_2\cdot\nabla(sp_c)]\,d\Omega + \int\limits_{\Gamma_p} q_{2n}p^0 d\Gamma;$$

$$J_3(\dot{\mathbf{u}}) = \int\limits_\Omega \Psi_3(\mathbf{e}^p)\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma_\sigma} \Pi_i^0 u_i d\Gamma.$$

Функционалы $J_4(p)$, $J_5(p)$, $J_6(\sigma^f, p)$ в задачах

$$\sup_{p\in(2.7)} [-J_4(p)] = \inf_{\mathbf{q}_1\in(4.1),(4.2)} J_1(\mathbf{q}_1), \quad \sup_{p\in(2.7)} [-J_5(p)] = \inf_{\mathbf{q}_2\in(4.1),(4.2)} J_2(\mathbf{q}_2),$$

$$\sup_{\sigma^f,p\in(1.19),(2.6)} [-J_6(\sigma^f, p)] = \inf_{\dot{\mathbf{u}}\in(2.2),(4.2)} J_3(\dot{\mathbf{u}})$$

имеют вид

$$J_4(p) = \int\limits_\Omega \Phi_1(\nabla(p + (1-s)p_c))\,d\Omega + \int\limits_{\Gamma_q} q_{1n}^0 p\,d\Gamma - \int\limits_\Omega p\varphi_1 d\Omega,$$

$$J_5(p) = \int\limits_\Omega \Phi_2(\nabla(p - sp_c))\,d\Omega + \int\limits_{\Gamma_q} q_{2n}^0 p\,d\Gamma - \int\limits_\Omega p\varphi_2 d\Omega,$$

$$J_6(\sigma^f, p) = \int\limits_\Omega \Phi_3(\sigma^f)\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma_u} \Pi_i u_i^0 d\Gamma - \int\limits_\Omega p\varphi_3 d\Omega.$$

Введя множитель Лагранжа $\lambda = -p$, запишем функционалы:

$$J_1'(\mathbf{q}_1, p) = J_1(\mathbf{q}_1) - \int\limits_\Omega p(\operatorname{div} q_1 - \varphi_1)\,d\Omega,$$

$$J_2'(\mathbf{q}_2, p) = J_2(\mathbf{q}_2) - \int\limits_\Omega p(\operatorname{div} q_2 - \varphi_2)\,d\Omega,$$

$$J_3'(\dot{\mathbf{u}}, p) = J_3(\dot{\mathbf{u}}) - \int\limits_\Omega p(\operatorname{div} \dot{u} - \varphi_3)\,d\Omega.$$

Комбинируя функционалы J_1', J_2', J_3', J_4, J_5, J_6 таким образом, чтобы исключить φ_1, φ_2, φ_3, получим функционалы $I_i(\cdot)$ ($i = \overline{1,8}$). Так, функционал $I_3(\dot{\mathbf{u}}, p)$ в переменных $\dot{\mathbf{u}}$, p, обычно используемых при численном решении задач теории консолидации, имеет вид

$$I_3(\dot{\mathbf{u}}, p) = J_3'(\dot{\mathbf{u}}, p) - J_4(p) - J_5(p) = \int\limits_\Omega [-\Phi_1(\nabla(p + (1-s)p_c)) -$$

$$- \Phi_2(\nabla(p - sp_c)) + \Psi_3(\mathbf{e}^p)]\,d\Omega - \int\limits_\Omega p \operatorname{div}\dot{\mathbf{u}}\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma_\sigma} \Pi_i^0 \dot{u}_i d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_q} q_n^0 p\,d\Gamma,$$

и справедливо равенство

$$\sup_{p\in(2.7)} \inf_{\dot{\mathbf{u}}\in(2.2)} I_3(\dot{\mathbf{u}}, p) = \inf_{\dot{\mathbf{u}},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\in(1.19),(2.2),(2.3)} I_1(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2).$$

5. При линейных законах фильтрации

$$\mathbf{q}_1 = -\frac{kf_1(s)}{\mu_1}\nabla p_1, \quad \mathbf{q}_2 = -\frac{kf_2(s)}{\mu_2}\nabla p_2,$$

выразив $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ через суммарную скорость $\mathbf{q}$, находим функционал

$$I_1(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\frac{\mu_2}{k\varphi(s)}|\mathbf{q}|^2 - \mathbf{q}\cdot\nabla T(s)\right] d\Omega +$$

$$+ \int_\Omega \Psi_3(\dot{\mathbf{e}}^p)\, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \Pi_i^0 \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_p} p^0 q_n d\Gamma,$$

где k — абсолютная проницаемость; $f_1(s)$, $f_2(s)$ — относительные фазовые проницаемости; μ_1, μ_2 — вязкости; $\varphi(s) = f_1(s) + (\mu_1/\mu_2)f_2(s)$; $T(s) = \int_s^1 F(s)\, p_c'(s)\, ds + sp_c(s)$; $F(s) = f_1(s)/\varphi(s)$ — функция Баклея — Леверетта.

Минимум функционала $I_1(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q})$ достигается на действительном поле скоростей $\dot{\mathbf{u}}$, $\mathbf{q}$ при ограничениях (1.19), (2.2), (2.3). Двойственной к указанной вариационной задаче является задача на максимум функционала $[-I_2(\sigma^f, p)]$, т. е.

$$\inf_{\dot{\mathbf{u}},\mathbf{q}\in(1.19),(2.2),(2.3)} I_1(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}) = \sup_{\sigma^f, p\in(1.18),(2.6),(2.7)} I_2(\sigma^f, p).$$

Здесь

$$I_2(\sigma^f, p) = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{k\varphi(s)}{\mu_2}|\nabla(p - T(s))|^2 + \int_\Omega \Phi_3(\sigma^f)\, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \Pi_i \dot{u}_i^0 + \int_{\Gamma_q} p q_n^0 d\Gamma.$$

6. При $\Gamma_u = \Gamma$, $\Gamma_q = \Gamma$, $p_c = 0$ (2.5) имеет вид

$$I_1(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \int_\Omega [\Psi_1(\mathbf{q}_1) + \Psi_2(\mathbf{q}_2) + \Psi_3(\dot{\mathbf{e}}^p)]\, d\Omega. \tag{6.1}$$

В этом случае при $\Psi_1(\mathbf{q}_1) = D_1(\mathbf{q}_1)$, $\Psi_2(\mathbf{q}_2) = D_2(\mathbf{q}_2)$, $\Psi_3(\dot{\mathbf{e}}^p) = D_3(\dot{\mathbf{e}}^p)$ (D_1, D_2, D_3 — диссипативные функции) действительный процесс определяется минимумом скорости диссипации энергии.

Для задач двухфазной фильтрации в упругой среде при малых деформациях в системе уравнений (1.15)—(1.22) вместо (1.17) записывается

$$\varepsilon_{ij} = \partial W_\sigma(\sigma^f)/\partial\sigma_{ij}^f, \quad \sigma_{ij}^f = \partial W_\varepsilon(\varepsilon)/\partial\varepsilon_{ij},$$

где W_σ, W_ε — упругие потенциалы; ε_{ij} — компоненты тензора упругих деформаций. Функционал, обобщающий (6.1), имеет вид

$$I_1(\mathbf{u}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \int_\Omega \left[\Psi_1(\mathbf{q}_1) + \Psi_2(\mathbf{q}_2) + \frac{W_\varepsilon(\varepsilon(t)) - W_\varepsilon(\varepsilon(t-\Delta t))}{\Delta t}\right] d\Omega. \tag{6.2}$$

Функционал (6.2) при $\Psi_1(\mathbf{q}_1) = D_1(\mathbf{q}_1)$, $\Psi_2(\mathbf{q}_2) = D_2(\mathbf{q}_2)$ приближенно характеризует сумму скоростей накопления и диссипации энергии. В общем случае функционал (6.2) представим как

$$I_1(\mathbf{u}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \int_\Omega \left[\Psi_1(\mathbf{q}_1) + \Psi_2(\mathbf{q}_2) + \frac{W_\varepsilon(\varepsilon(t)) - W_\varepsilon(\varepsilon(t-\Delta t))}{\Delta t}\right] d\Omega + \tag{6.3}$$

$$+ \int_\Omega \mathbf{q}_1\cdot\nabla((1-s)\, p_c)\, d\Omega - \int_\Omega \mathbf{q}_2\cdot\nabla(sp_c)\, d\Omega -$$

$$- \int_{\Gamma_\sigma} \Pi_i^0 \frac{u_i(t) - u_i(t-\Delta t)}{\Delta t} d\Gamma + \int_{\Gamma_p} q_n p^0 d\Gamma.$$

Решение задачи

$$\text{(6.4)} \qquad \inf I_1(\mathbf{u},\ \mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2)$$

при ограничениях (2.2), (2.3) и

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)}{\Delta t} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\right) = 0$$

достигается на действительном поле переменных $\mathbf{u}$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$. Двойственные вариационные принципы строятся так же, как и в задачах двухфазной фильтрации в вязкопластической среде. Возможно построение различных вариантов численной реализации вариационных задач двухфазной фильтрации в упругой среде. Для примера вместо (6.3) можно использовать функционал

$$\text{(6.5)} \quad I_1\left(\mathbf{u}^k, \mathbf{q}_1^k, \mathbf{q}_2^k, \alpha\right) = \int_\Omega \frac{W_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}^k) - W_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}^{k-1})}{\Delta t_k} - \int_{\Gamma_\sigma} \overline{\Pi}_i^{0k} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t_k}\, d\Gamma +$$
$$+ \alpha\left\{\int_\Omega \left[\Psi_1\left(\mathbf{q}_1^k\right) + \Psi_2\left(\mathbf{q}_2^k\right) + \mathbf{q}_1^k \cdot \nabla\left((1 - s^k)\, p_c^k\right) -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \mathbf{q}_2^k \cdot \nabla\left(s^k p_c^k\right)\right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} q_n^k p^{0k} d\Gamma\right\},$$

где $a^k = a(t_k)$; $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$; $0 < \alpha \leqslant 1$. Минимум функционала (6.5) при ограничениях (2.2), (2.3) и

$$\operatorname{div}\left[\frac{\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}}{\Delta t_k} + \alpha\left(\mathbf{q}_1^k + \mathbf{q}_2^k\right) + (1 - \alpha)\left(\mathbf{q}_1^{k-1} + \mathbf{q}_2^{k-1}\right)\right] = 0$$

достигается на действительном поле переменных $\mathbf{u}^k$, $\mathbf{q}_1^k$, $\mathbf{q}_2^k$.

7. Расщепление, подобное (4.3), имеет место в задаче с упругим скелетом (6.4) и в других задачах при различных законах поведения отдельных фаз. Проблема построения вариационных принципов сводится, таким образом, к проблеме построения вариационных принципов для отдельных фаз.

Представление (4.3) можно рассматривать как расщепление на две задачи, одна из которых характеризует процесс деформации, другая — процесс двухфазной фильтрации. Это дает понимание использования уже известных постановок задач теории деформируемого твердого тела и теории двухфазной фильтрации.

Для учета изменения пористости m и насыщенности s служат уравнения (1.21), (1.22). Такой подход является обобщением алгоритма решения задач двухфазной фильтрации с разделением по давлению и насыщенности. В частном случае двух фаз из вариационных принципов двухфазной фильтрации в деформируемой среде получаются вариационные принципы теории консолидации и двухфазной фильтрации [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Николаевский В. Н.** Механика пористых и трещиноватых сред.— М.: Недра, 1984.
2. **Жермен П.** Курс механики сплошных сред.— М.: Высш. шк., 1983.
3. **Панагиотопулос П.** Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии.— М.: Мир, 1989.
4. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1983.
5. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Движение жидкостей и газов в природных пластах.— М.: Недра, 1984.
6. **Мосолов П. П., Мясников В. П.** Механика жесткопластических сред.— М.: Наука, 1981.
7. **Мазуров П. А.** Вариационный подход в теориях фильтрационной консолидации и двухфазной фильтрации.— Казань, 1989.— Деп. в ВИНИТИ 20.04.89, № 2586—В.

г. Казань *Поступила 4/IV 1991 г.*