

ПСЕВДОТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ ЧАСТИЦ  
В ОДНОРОДНЫХ СУСПЕНЗИЯХ

Ю. А. Буевич, В. Г. Марков

(Москва)

Эффективные коэффициенты диффузии взвешенных частиц, обусловленной их псевдотурбулентными пульсациями, рассмотрены в пренебрежении производными динамических переменных, определяющих среднее движение локально-однородной суспензии.

По определению [1], тензор коэффициентов диффузии частиц, вызванной их хаотическими движениями, можно представить в виде

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (R_{w_i, w_j}(\tau) + R_{w_j, w_i}(\tau)) d\tau \quad (1)$$

где под знаком интегрирования стоят компоненты тензора лагранжевых корреляционных функций скорости частицы  $w^s$ . Эти величины можно записать в форме

$$R_{w_i, w_j}(\tau) = \int e^{i\omega\tau} \Psi_{w_i, w_j}(\omega, \mathbf{k}) d\omega d\mathbf{k} \quad (2)$$

Здесь интегрирование производится по всем частотам  $\omega$  и всему волновому пространству  $\mathbf{k}$ , а  $\Psi_{w_i, w_j}(\omega, \mathbf{k})$  представляет собой спектральный тензор случайного вектора  $w^s$ , введенный в работе [2]. Этот тензор определяется в [2] таким образом, что интеграл от него по волновому пространству есть обычный спектральный тензор скорости частицы в лагранжевом представлении.

Из [2] легко усмотреть, что тензор  $\Psi_{w_i, w_j}(\omega, \mathbf{k})$ , рассматриваемый как функция от  $\omega$ , удовлетворяет всем условиям, необходимым для изменения порядка интегрирования по  $\tau$  и  $\omega$  в (1), (2). Меняя порядок интегрирования и используя известное разложение  $\delta$ -функции в интеграл Фурье, получаем из (1) и (2) соотношение для тензора псевдотурбулентной диффузии частиц

$$D_{ij} = \frac{\pi}{4} \int (\Psi_{w_i, w_j}(0, \mathbf{k}) + \Psi_{w_j, w_i}(0, \mathbf{k})) d\mathbf{k} \quad (3)$$

Величины  $\Psi_{w_i, w_j}(\omega, \mathbf{k})$  стандартным путем [1] выражаются через средние от произведений соответствующих компонент спектральной меры  $dZ_w$  случайного процесса  $w^s$ . Уравнения для  $dZ_w$  и спектральных мер других случайных величин, характеризующих псевдотурбулентность в суспензии, получены в [2]. В этой работе достаточно рассмотреть, как это легко видеть из (3), указанные уравнения лишь при равной нулю частоте  $\omega$  и только для стационарного безградиентного потока, когда масштабы среднего движения намного превышают масштабы псевдотурбулентности, т. е. когда можно пренебречь производными от динамических переменных, характеризующих течение суспензии в континуальном приближении. Как указано в [2], последнее соответствует известному приближению Эйлера в гидродинамике однофазной жидкости. Тогда при  $\omega = 0$  имеем из [2]

следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{uk} dZ_p &= (1 - \rho) \mathbf{k} dZ_v \\ \kappa (\beta K + \zeta) dZ_w - \kappa \beta K dZ_v &= -\frac{i}{d_2} \mathbf{k} dZ_p + \kappa \beta \frac{dK}{d\rho} \mathbf{u} dZ_p \\ \kappa \rho \zeta dZ_w + \kappa [i(1 - \rho) \mathbf{uk} + \kappa v_0 S k^2] dZ_v &= -\frac{i}{d_2} \mathbf{k} dZ_p - \frac{\kappa}{3} v_0 S (\mathbf{k} dZ_v) \mathbf{k} \quad (4) \\ \beta &= \frac{9v_0}{2a^2}, \quad \zeta = \frac{c}{4} \frac{N}{n} \left[ \xi + 4\gamma \eta \left( \frac{n}{N} \right)^{1/2} \right], \quad \gamma = \frac{9}{2a} \left( \frac{v_0}{\pi} \right)^{1/2}, \quad \kappa = \frac{d_2}{d_1} \end{aligned}$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в [2], но знак усреднения  $\langle \rangle$  в обозначениях динамических переменных для упрощения записи опущен. При выводе (4) было использовано выражение для силы межфазового взаимодействия, верное при  $R \lesssim 1$ , где  $R = 2 au / v_0$  — число Рейнольдса, характеризующее обтекание отдельных частиц относительным потоком жидкой фазы.

Удобно перейти к безразмерным переменным, вводя характерную скорость  $u$ , характерную длину  $a$  и, следовательно, характерное время  $a / u$ . Везде ниже рассмотрение ведется именно для безразмерных переменных, равных соответствующим переменным, которые отнесены к размерным величинам, сконструированным из выбранных характерных масштабов. Так, например, размерные скорости и коэффициенты диффузии отнесены соответственно к  $u$  и  $ua$ , размерные частота и волновой вектор — к  $u / a$  и  $1 / a$  и т. д. Исключение составляет лишь безразмерная мера возмущения давления в течении  $dZ_p$ , относимая к  $d_1 \beta u a K$ . При таком обезразмеривании форма уравнений (1) — (3) сохраняется, а вместо (4) имеем уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{k} dZ_v &= \frac{u_0 \mathbf{k}}{1 - \rho} dZ_p, \quad (1 + \alpha) dZ_w - dZ_v = -i \mathbf{k} dZ_p + \frac{d \ln K}{d\rho} \mathbf{u}_0 dZ_p \\ \rho \alpha dZ_w + [i(1 - \rho) r \mathbf{u}_0 \mathbf{k} + s k^2] dZ_v &= -i \mathbf{k} dZ_p - 1/3 s (\mathbf{k} dZ_v) \mathbf{k} \quad (5) \\ \mathbf{u}_0 &= \frac{\mathbf{u}}{u}, \quad s = \frac{2}{9} \frac{S}{K}, \quad r = \frac{R}{9K} = \frac{2}{9K} \frac{ua}{v_0}, \quad \alpha = \frac{\zeta}{\beta K} \end{aligned}$$

Параметр  $\alpha$  в (5) характеризует отношение диссипативных сил, возникающих за счет мгновенного ускорения присоединенных масс жидкости при скачкообразных изменениях скоростей сталкивающихся частиц, к силам вязкого взаимодействия между фазами [2]. Порядковая оценка для  $\alpha$ , следующая из модели упругих столкновений в газе частиц с изотропным максвелловским распределением по скоростям, получена в [2], откуда в безразмерной форме имеем

$$\alpha = \frac{1}{3K} \left( \frac{3}{\pi} \langle w'^2 \rangle \right)^{1/2} (\rho \chi R)^{1/2} \left[ \frac{\xi}{3} \left( \frac{3}{\pi} \langle w'^2 \rangle \right)^{1/4} (\rho \chi R)^{1/2} + 3\eta \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \right] \quad (6)$$

Здесь также сохранены обозначения работы [2].

Из физических соображений естественно ожидать, что «столкновительная» диссипация в дисперсной системе относительно мала, т. е.  $\alpha \ll 1$ , по меньшей мере для систем, концентрация которых не слишком близка к концентрации зернистого слоя в плотноупакованном состоянии. К этому выводу приводят, в частности, следующие соображения.

1. Столкновительная диссипация по своему смыслу пропорциональна частоте столкновений в суспензии и величинам скачков скорости частиц, испытывающих столкновения, т. е. для разреженных суспензий она всегда невелика.

2. Столкновения частиц, взвешенных в жидкости, характеризуются обычно весьма плавным, а не скачкообразным изменением скорости частиц. Последнее связано с существенным повышением давления в жидкой прослойке между частицами при их сближении и необходимостью «выдавливания» этой прослойки перед непосредственным контактом частиц. Аналогичный эффект имеет место также при приближении частицы к твердой стенке [3] и в процессах смазки, когда роль указанной жидкой прослойки играет смазочная жидкость в зазоре между цапфой и подшипником [4]. Поэтому можно полагать, что оценка (6), основанная на модели чисто упругих столкновений между частицами, для не очень концентрированных суспензий завышена даже по порядку величины.

3. Наконец, существенного влияния непосредственных столкновений (контактов) частиц можно ожидать преимущественно во взвесах крупных и тяжелых частиц в жидкостях с малыми плотностью и вязкостью, в частности в газах. Но такие системы обычно локально-неоднородны, поведение соседних частиц в них сильно коррелировано, и число эффективных столкновений должно быть значительно ниже, чем в локально-однородных дисперсных системах, к которым относится оценка (6). Последнее также вызывает значительное уменьшение столкновительной диссипации.

Отметим, что малость  $\alpha$  при малых  $\rho$  и  $R$  подтверждается также и оценкой (6). Отвлекаясь здесь от рассмотрения суспензий в состояниях, близких к состоянию плотной упаковки, когда столкновительная диссипация может, вообще говоря, быть существенной, полагаем  $\alpha \approx 0$ .

Решая уравнения (5) при  $\alpha = 0$ , имеем

$$dZ_w|_{\omega=0} = \left\{ \frac{d \ln K}{d\rho} \mathbf{u}_0 + \left[ i(1-\rho) r u_0 \mathbf{k} + 1 + \frac{4}{3} s k^2 \right] \frac{u_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}{1-\rho} \right\} dZ_\rho \quad (7)$$

Удобно вести анализ в главных осях тензора  $D$ , для чего направим координатную ось  $x_1$  вдоль вектора  $\mathbf{u}_0$ . Тогда из (7) получим следующие выражения для диагональных компонент  $\Psi_{w,w}(0, \mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} \Psi_{w_1, w_1}(0, \mathbf{k}) &= \left[ \left( \frac{d \ln K}{d\rho} + \frac{1 + \frac{4}{3} s k^2}{1-\rho} \frac{k_1^2}{k^2} \right)^2 + r^2 k_1^2 \frac{k_1^4}{k^4} \right] \Psi_{\rho, \rho}(0, \mathbf{k}) \\ \Psi_{w_j, w_j}(0, \mathbf{k}) &= \left[ \left( \frac{1 + \frac{4}{3} s k^2}{1-\rho} \right)^2 + r^2 k_1^2 \right] \frac{k_1^j k_j^3}{k^4} \Psi_{\rho, \rho}(0, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (8)$$

Суммирование по  $j$  в (8) не производится; перекрестные компоненты тензора спектральной плотности не записаны, так как при интегрировании по волновому пространству в (3) они дают нуль. Спектральная плотность  $\Psi_{\rho, \rho}(\omega, \mathbf{k})$  возмущения концентрации  $\rho'$  определена в пространстве безразмерных частоты  $\omega$  и волнового вектора  $\mathbf{k}$ ; используем для нее выражение, следующее из результатов [2]

$$\begin{aligned} \Psi_{\rho, \rho}(0, \mathbf{k}) &= \frac{(\mathbf{D}\mathbf{k}\mathbf{k})^{-1}}{\pi} \Phi_{\rho, \rho}(\mathbf{k}), \quad \Phi_{\rho, \rho}(\mathbf{k}) = \frac{\Phi}{k_0^3} Y(k_0 - k) \\ \Phi &= \frac{3}{4\pi} \rho^2 \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_*} \right), \quad k_0 = \left( \frac{3\pi\rho}{2} \right)^{1/3} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-1/3}, \quad Y(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение для  $k_0$  в (9), относится, конечно, только к локально-однородным суспензиям. Для локально-неоднородных дисперсных систем нужно рассматривать  $k_0$  как некий свободный параметр, который совпадает по порядку величины с отношением радиуса частицы  $a$  к среднему радиусу возникающих в течении неоднородностей [3].

Из (3), (8) и (9) видно, что псевдотурбулентная диффузия частиц не-изотропна, но она аксиально-симметрична, причем роль выделенного направления играет направление межфазового скольжения  $\mathbf{u}_0$ . Интегрируя, получаем следующие уравнения для безразмерных эффективных коэффициентов псевдотурбулентной диффузии частиц в продольном и поперечном направлениях:

$$\begin{aligned} D_1 D_2 &= \frac{2\pi\Phi}{k_0^2} \gamma^2 \left[ \left( \frac{d \ln K}{d\rho} \right)^2 J_0 + \frac{2}{1-\rho} \frac{d \ln K}{d\rho} \left( 1 + \frac{4}{9} s k_0^2 \right) J_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1-\rho)^2} \left( 1 + \frac{8}{9} s k_0^2 + \frac{16}{45} s^2 k_0^4 \right) J_4 + \frac{r^2}{3} k_0^2 J_6 \right] \\ D_2^2 &= \frac{\pi\Phi}{k_0^2} \gamma^2 \left[ \frac{1}{(1-\rho)^2} \left( 1 + \frac{8}{9} s k_0^2 + \frac{16}{45} s^2 k_0^4 \right) (J_2 - J_4) + \frac{r^2}{3} k_0^2 (J_6 - J_4) \right] \\ \gamma^2 &= \frac{D_2}{D_1 - D_2} \left( \frac{D_1}{D_2} = \frac{1 + \gamma^2}{\gamma^2} \right), \quad J_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{t^2 + \gamma^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Ввиду приближений, сделанных при выводе (4) и (5), выражения (10) можно считать справедливыми при  $R \lesssim 1$ , что соответствует обычно локально-однородным суспензиям. В этом случае допустимо, во-первых, использовать выражение  $k_0$  из (9), а во-вторых, пренебречь членом с  $r^2$  в (10). Нетрудно видеть, что последнее эквивалентно пренебрежению импульсом жидкой фазы, осуществленному, например, в [5]. Это приближение оказывается, таким образом, оправданным при достаточно малых значениях параметра Рейнольдса  $R$ .

Уравнения (10) легко разделяются. Действительно, из (10) имеем следующее трансцендентное уравнение для величины  $\gamma$ :

$$\frac{2\gamma^2}{1+\gamma^2} = \frac{(1 + \frac{8}{9}sk_0^2 + \frac{16}{45}s^2k_0^4)(J_2 - J_4)}{n^2J_0 + 2n(1 + \frac{4}{9}sk_0^2)J_2 + (1 + \frac{8}{9}sk_0^2 + \frac{16}{45}s^2k_0^4)J_4} \quad (11)$$

Здесь введена функция

$$n(\rho) = (1 - \rho) \frac{d \ln K}{d\rho} \quad (12)$$

имеющая особенно простой вид при аппроксимациях типа  $K(\rho) \approx (1 - \rho)^{-n}$ .

Для коэффициента продольной диффузии, например, из (10) имеем, пренебрегая членами с  $r^2$ , выражение

$$D_1 = \frac{(1 + \gamma^2)(\pi\Phi)^{1/2}}{\gamma k_0(1 - \rho)} \left(1 + \frac{8}{9}sk_0^2 + \frac{16}{45}s^2k_0^4\right)^{1/2} (J_2 - J_4)^{1/2} \quad (13)$$

Здесь под  $\gamma$ , от которой зависят, в частности, интегралы  $J_n$ , понимается единственный корень уравнения (11).

Анализ показывает, что величина  $\gamma$  обычно весьма мала. Тогда из (11) нетрудно получить приближенное выражение для  $\gamma$ . Этот параметр перестает быть малым лишь при концентрациях, очень близких к концентрации плотноупакованного слоя частиц  $\rho_*$ , так как при  $\rho \rightarrow \rho_*$  величина  $s$  в (11), (13) остается ограниченной, а  $k_0$  из (9) стремится к бесконечности. Можно полагать, что при таких  $\rho$  развитая теория вообще перестает быть верной из-за сделанного пренебрежения столкновительной диссипацией.

Пренебрежение вязкими напряжениями в дисперсионной среде означало бы  $s = 0$  в выражениях (11)–(13). Нетрудно видеть, что это приближение вполне оправдано при малых и умеренных значениях  $\rho$ , но перестает быть справедливым при  $\rho \rightarrow \rho_*$ .

Для конкретных вычислений необходимо иметь зависимости  $K(\rho)$  и  $S(\rho)$ . По своему смыслу функция  $K(\rho)$  описывает увеличение эффективного гидравлического сопротивления частицы за счет стесненности обтекания в закрепленной насадке частиц, не совершающих псевдотурбулентных движений. Эффективное сопротивление слоя хаотически движущихся частиц, например псевдооживленного слоя, для которого имеется обширный экспериментальный материал [6], может быть существенно отличен от сопротивления эквивалентной по пористости неподвижной насадки [5, 6]. Опытных данных по величине  $K(\rho)$  в неподвижном слое значительно меньше и, главное, все они получены при сравнительно высоких значениях  $\rho$ , близких, как правило, к  $\rho_*$ . Одна из наиболее распространенных зависимостей  $K(\rho)$  для слоя твердых частиц была получена Эрганом [7], обобщившим большое число доступных опытных данных. При малых числах Рейнольдса  $R$  из [7] имеем

$$K(\rho) \approx \frac{25}{3} \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$$

Эта зависимость верна лишь при  $\rho > \rho_0 \approx 0.25 - 0.30$ ; при  $\rho \rightarrow 0$  она не дает необходимого предела  $K(\rho) \rightarrow 1$ . Чтобы получить соотношение, приближенно справедливое во всем интервале от нуля до  $\rho_*$ , дополним эту зависимость в области  $\rho < \rho_0$  зависимостью

$$K(\rho) \approx (1 - \rho)^{-n}$$

выбирая постоянные  $\rho_0$  и  $n$  так, чтобы  $K(\rho)$  и ее первая производная были непрерывны в точке  $\rho = \rho_0$ . Последнее приводит к уравнениям

$$\rho_0 = \frac{1}{n-1}, \quad \frac{25}{3(n-1)} = \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)}$$

решая которые, получаем  $n \approx 4.58$ ,  $\rho_0 \approx 0.28$ .

Ниже используем аппроксимацию

$$K(\rho) = \begin{cases} (1-\rho)^{-4.58}, & \rho < 0.28 \\ \frac{25}{3}\rho(1-\rho)^{-2}, & \rho > 0.28 \end{cases} \quad (14)$$

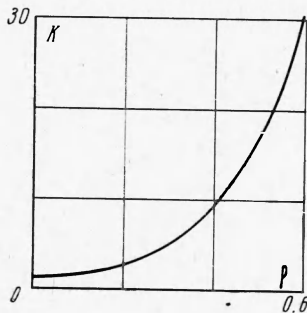
Эта функция изображена на фиг. 1; в расчете приняли  $\rho_* = 0.60$ .

Функция  $S(\rho)$  описывает увеличение вязкости жидкости в результате искривления линий тока при наличии в системе взвешенных частиц. Для определенности используем в расчетах аппроксимацию

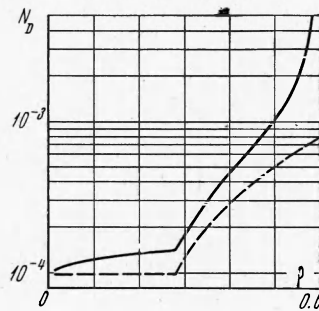
$$S(\rho) = (1-\rho)^{-2.5} \quad (15)$$

такую, что при  $\rho \rightarrow 0$  получается известный эйнштейновский предел  $S \approx 1 + 2.5\rho$ .

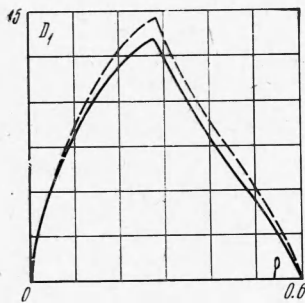
Отношение  $N_D = \gamma^2(1+\gamma^2)^{-1}$  коэффициентов поперечной и продольной псевдотурбулентной диффузии частиц, рассчитанное из (11) при помощи (14), (15) и при  $\rho_* = 0.60$ , показано сплошной кривой на фиг. 2. Пунктиром представлена зависимость  $N_D$  от  $\rho$ , соответствующая «невязкой» модели  $s = 0$ . Видно, что псевдотурбулентная



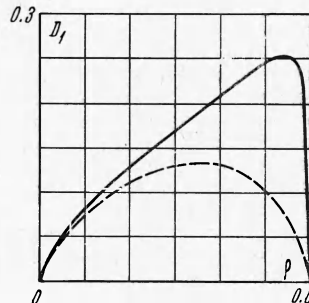
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

диффузия твердых частиц резко анизотропна: продольная диффузия оказывается в  $10^3-10^4$  раз интенсивнее поперечной. Во многих приложениях, вообще, имеет смысл говорить только о продольной диффузии частиц.

Зависимости  $D_1$  из (13), соответствующие  $s \neq 0$  (сплошная кривая) и  $s = 0$  (пунктир) приведены на фиг. 3. Из данных на фиг. 2,3 легко найти также величину  $D_2$ . Точки излома на кривых  $N_D$  и  $D_1$  появляются ввиду разрыва второй производной от  $K(\rho)$  при  $\rho = 0.28$ .

Определенный интерес представляет также система газовых пузырьков, взвешенных в жидкости. Предполагаем, разумеется, что в процессе псевдотурбулентных движений пузырьки не теряют своей индивидуальности, т. е. не коалесцируют, не дробятся и не слипаются с образованием пены. Для этого нужно, в частности, чтобы поверхностное натяжение на границе раздела жидкость — газ было достаточно большим, а сами пузырьки — малыми.

В этом случае допустимо считать  $K(\rho) \approx 1 = \text{const}$ ; этот результат вытекает, например, из расчета гидравлического сопротивления решетки пузырьков на основе ячеистой модели. Для  $S(\rho)$  используем аппроксимацию  $S(\rho) = (1-\rho)^{-1}$ , так что при  $\rho \rightarrow 0$  получается известный результат Гута и Марка  $S \approx 1 + \rho$ . Расчет  $\gamma$  по формуле



(11) дает  $\gamma = 0.8546$ ,  $N_D = 0.4221$ . В отличие от суспензии твердых частиц псевдотурбулентная диффузия пузырьков значительно менее анизотропна. Это происходит, прежде всего, потому, что в системе взвешенных пузырьков отсутствует сила, возникающая из-за нелинейности зависимости  $K$  от  $\rho$  и флуктуаций  $\rho'$  в системе. Отношение  $N_D$  в этом случае оказывается универсальным — оно не зависит ни от  $\rho$ , ни от физических параметров фаз эмульсии. Соответствующее значение  $N_D$  для суспензий твердых частиц также не зависит от физических параметров, но зато изменяется с  $\rho$ .

Зависимости коэффициента  $D_1$  для газовых пузырьков от  $\rho$  при  $s \neq 0$  и  $s = 0$  изображены на фиг. 4 сплошной и пунктирной кривыми соответственно.

Учитывая сложность исследуемых систем и неоднозначность экспериментальных данных о диффузии в них (см., например, [6]), небольшим количественным различием между моделями с  $s \neq 0$  и с  $s = 0$  можно во многих случаях пренебрегать.

Отметим, что результаты (11) и (13) при  $s = 0$  не согласуются, вообще говоря, с соответствующими результатами для псевдотурбулентной диффузии частиц в газе, полученными в [5] на основе модели, в которой импульсом и вязкими напряжениями в газе пренебрегали априори [5]. Это связано с тем, что

$$\lim_{\omega \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} \Psi_{w, w}(\omega, k) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0} \Psi_{w, w}(\omega, k)$$

где через  $\varepsilon$  обозначен набор параметров, характеризующих влияние импульса и вязких напряжений в газе. Поэтому модель [5], хотя она и приводит в ряде случаев к качественно верным результатам, имеет несколько формальное содержание.

Опыты по определению эффективных коэффициентов диффузии частиц ставились, в основном, для псевдооживленных систем. Ввиду различия типов использованных при этом установок и слоев и способов измерения или расчета (по измеренным вязкости или теплопроводности слоя) коэффициентов продольной и поперечной диффузии наблюдается весьма значительный разброс результатов, полученных различными авторами [6]. Кроме того, во всех таких системах имеются циркуляционные потоки обеих фаз, обусловленные пристеночным трением. Компонента  $u_n$  относительной скорости жидкой фазы этого циркуляционного течения, нормальная к направлению основного потока, примерно на порядок ниже  $u$ . Точно такое же соотношение наблюдается для измеренных значений поперечного и продольного коэффициентов диффузии частиц в узких слоях [6]. Поэтому в экспериментах фактически имеют дело не с коэффициентом поперечной диффузии в смысле этой работы, а с коэффициентом продольной (относительно  $u_n$ ) диффузии частиц.

В настоящее время можно говорить лишь об экспериментальной проверке выражения для коэффициента продольной псевдотурбулентной диффузии частиц, который значительно меньше зависит от наличия циркуляции. Нетрудно убедиться, что значения этого коэффициента, рассчитанного из результатов этой работы, по порядку величины совпадают со значениями, определяемыми экспериментально (см. обзор в [6]).

Вывод о значительном преобладании продольной диффузии над поперечной согласуется также с прямыми наблюдениями пульсаций частиц в сравнительно разреженных системах. Достаточно сказать, что в первых работах на эту тему речь вообще шла только о продольных пульсациях (см., например, описание опытов А. К. Бондаревой в [6]). Однако следует отметить, что физическая причина преобладания продольной диффузии может заключаться не только в анизотропии скорости псевдотурбулентных пульсаций, но и в анизотропии соответствующих длин перемешивания. Если длина смещения в поперечном направлении имеет порядок среднего расстояния между взвешенными частицами, то в продольном направлении она может быть значительно выше [6].

Поступила 4 IX 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., «Наука», 1967.
2. Бувевич Ю. А. О гидродинамике однородных суспензий. ПМТФ, 1969, № 6.
3. Brenner H., The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. Chem. Engng. Sci., 1961, vol. 16, № 3—4, p. 242.
4. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
5. Бувевич Ю. А., Марков В. Г. Структура равновесной псевдотурбулентности в газовзвесах в условиях локальной неоднородности. ПМТФ, 1969, № 5.
6. Аэров М. Э., Годес О. М., Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л., «Химия», 1968.
7. Ergun S. Fluid flow through packed columns. Chem. Engng Progr., 1952, vol. 48, № 2, p. 89.