пряжением S, ортогональным плоскости $0x_1x_2$ на бесконечности. Требуется определить, каким степеням P и S пропорционален линейный размер a зазора, образующегося между полупространствами, при условии, что на границе полупространств полностью отсутствуют силы сцепления.

Из решения задачи Буссинеска [2] следует, что нормальные перемещения точки границы выражаются в виде

$$u_3^{\pm} = \frac{1-\nu^{\pm}}{2\pi\mu^{\pm}} \frac{P}{r}, \quad \text{где} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Отсюда следует, что до приложения напряжения S расстояние между границами тел $f(x_1, x_2)$ задавалось положительной гладкой положительно-однородной функцией степени минус единица

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{1-\nu^+}{2\pi\mu^+} + \frac{1-\nu^-}{2\pi\mu^-}\right)\frac{P}{r}.$$

Тогда справедливы условия теоремы. Из (1.5) получаем, что радиус зазора между полупространствами пропорционален корню квадратному из P/S: $a \sim P^{1/2}S^{-1/2}$.

Этот результат совпадает с результатом теории трещин, полученным при рассмотрении дискообразной трещины, в центре которой приложены разрывающие сосредоточенные силы, а на бесконечности действует сжимающее напряжение. Записывая выражение коэффициента интенсивности напряжений для такой трещины и приравнивая его нулю, получаем уравнение на a. Методика решения этой задачи по теории трещин описана в [1].

Автор благодарит В. Д. Клюшникова и И. Д. Грудева, заинтересовавших его этой тематикой, а также А. Г. Хованского за обсуждение работы.

Поступила 8 II 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976.
2. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
3. **Бородич Ф. М.** Подобие в задаче контакта упругих тел.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 3.

УДК 539.375

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

В. Г. НОВИКОВ, Б. М. ТУЛИНОВ

(*Москва*)

Стационарное движение прямолинейной полубесконечной трещины в безграничном упругом теле рассматривалось в [1, 2]. Часто бывает, что в среде распространяется не одна трещина, а несколько. В связи с этим представляет интерес рассмотреть движение системы полубесконечных параллельных трещин. В данной работе ограничимся рассмотрением случая трещин продольного сдвига. Сходная в математическом отношении задача об установившемся движении трещины отрыва в полосе изучалась в [3, 4].

Рассмотрим движение системы полубесконечных параллельных трещин — разрезов продольного сдвига с постоянной скоростью. В движущейся вместе с трещинами системе координат xOy поверхности разрезов представляют собой систему параллельных полупрямых x, $y \in S$, где

$$S = \{x < 0,\ y = d(2n+1),\ n = 0,\ \pm 1,\ +2, \dots\}.$$

Пусть скорость роста трещин V меньше скорости поперечных волн в среде c. Предполагается также, что движение трещин стационарно, т. е. в движущейся системе координат деформации и напряжения не зависят от времени. В этом случае уравнения теории упругости, описывающие задачу, имеют вид

$$\beta^2\partial^2 w/\partial x^2 + \partial^2 w/\partial y^2 = 0,\quad \tau = \mu\partial w/\partial y, \tag{1}$$

где $\beta^2 = 1 - V^2/c^2$; w — смещение вдоль оси z; $\tau = \sigma_{yz}$ — компонента тензора напряжений; μ — модуль сдвига. Пусть к берегам всех трещин приложена одна и та же однородная нагрузка:

$$\tau(x, y) = -\tau_0,\quad x,\ y \in S.$$

Тогда деформации и напряжения являются периодическими функциями координаты y с периодом $2d$ и задача сводится к построению решения уравнений (1) в области

$-d < y < d$, удовлетворяющего граничным условиям

$$\tau(x, \pm d) = -\tau_0, \; x < 0; \tag{2}$$

$$w(x, \pm d) = 0, \; x > 0. \tag{3}$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом, предложенным в [5—7]. Временно заменим неоднородное граничное условие (2) условием вида

$$\tau(x, \pm d) = -\tau_0 e^{\alpha x}, \; x < 0, \tag{4}$$

где α — положительное число, которое в конечных формулах следует положить равным нулю. Решение уравнений (1) представим в виде

$$w(x, y) = -\frac{1}{2\pi\mu\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{q}\frac{\operatorname{sh}(\beta q y)}{\operatorname{ch}(\beta q d)}C(q)\,e^{-iqx}dq, \tag{5}$$

$$\tau(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}(\beta q y)}{\operatorname{ch}(\beta q d)}C(q)\,e^{-iqx}dq,$$

где $C(q)$ — неизвестная функция. Принимая во внимание, что

$$e^{\alpha x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iqx}}{q - i\alpha}dq, \quad x < 0,$$

получаем для функции $C(q)$ из граничных условий (3), (4) парные интегральные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(\beta q d)\,C(q)\,e^{-iqx}dq = 0, \quad x > 0, \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{C(q) - \frac{1}{i}\frac{\tau_0}{q - i\alpha}\right\}e^{-iqx}dq = 0, \quad x < 0.$$

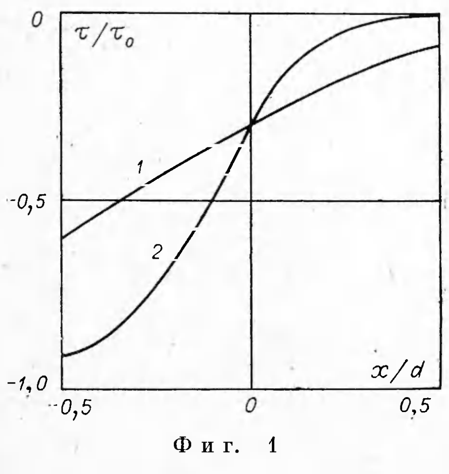
Здесь $K(z) = \pi\,\operatorname{th}(z)/z$. Представляя функцию $K(z)$ в виде $K(z) = K_+(z)K_-(z)$, где $K_+(z) = \Gamma(1/2 - iz/\pi)/\Gamma(1 - iz/\pi)$, $K_-(z) = K_+(-z)$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, и учитывая аналитические свойства функций $K_+(z)$ и $K_-(z)$, можно показать [5—7], что решение уравнений (6) имеет вид

$$C(q) = \frac{1}{i}\frac{\tau_0 K_+(i\beta\alpha d)}{(q - i\alpha)K_+(\beta q d)}.$$

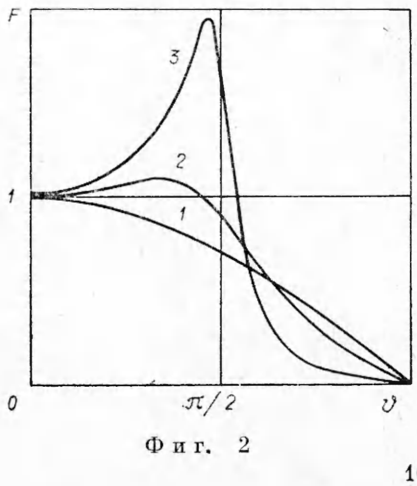
Подставляя найденное значение $C(q)$ в равенства (5), вычисляя интегралы и устремляя затем параметр α к нулю, получим решение исходной задачи. Опуская промежуточные выкладки, приводим конечный результат:

$$\frac{w(x, y)}{w_0} = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\left\{-z + \ln\left(e^z + \sqrt{1 + e^{2z}}\right)\right\}, \tag{7}$$

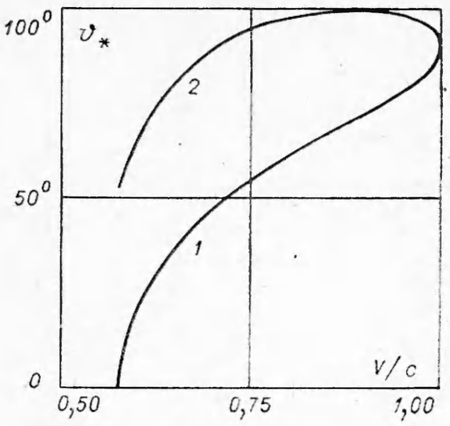
$$\frac{\tau(x, y)}{\tau_0} = \operatorname{Re}\left\{-1 + \frac{e^z}{\sqrt{1 + e^{2z}}}\right\},$$



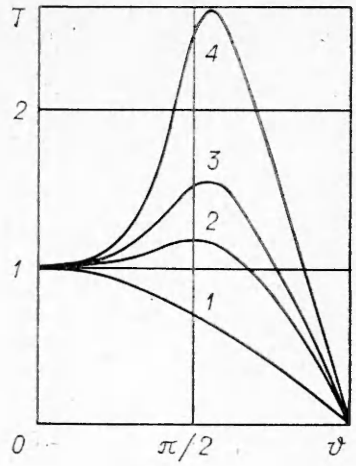
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

где $w_0 = d\tau_0/\mu$; $z = \pi(x/\beta + iy)/2d$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение в виде (7) удовлетворяет уравнениям (1) и граничным условиям (2), (3). Распределение напряжений τ/τ_0 на оси $y = 0$ представлено на фиг. 1. Кривые *1* и *2* соответствуют значениям скорости фронта трещин $V = 0$ и $0{,}95\ c$.

Исследуем поведение решения вблизи вершины отдельной трещины. Введем полярную систему координат r, θ с началом в вершине трещины и вспомогательные переменные ρ, φ, связанные с углом θ соотношением

$$\rho e^{i\varphi} = \cos(\theta) + i\beta \sin(\theta), \quad -\pi < \theta < \pi,$$

причем берегам трещины соответствуют значения $\theta = \pm\pi$.

Из формул (7) следует, что вблизи вершины трещины справедливы асимптотические соотношения [8]

$$w(r, \theta) = \frac{K}{\mu} \sqrt{2r} \frac{\sqrt{\rho}}{\beta} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \tau(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2r}} F(\theta),$$

где $F(\theta) = \cos(\varphi/2)/\sqrt{\rho}$, а для коэффициента интенсивности напряжений получается выражение

$$K = \tau_0 \sqrt{\frac{2d}{\pi}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/4}. \tag{8}$$

На фиг. 2 приведены графики функции $F(\theta)$. Кривые *1—3* соответствуют значениям $V = 0$; $0{,}8\ c$ и $0{,}985\ c$. При $V < c/\sqrt{3}$ напряжение τ как функция θ имеет максимум непосредственно на продолжении трещины при $\theta = 0$. При $V > c/\sqrt{3}$ τ имеет два симметричных максимума при $\theta = \pm\theta_*$, где θ_* — решение уравнения

$$\frac{V^2}{c^2} = \frac{\sqrt{1 + 8\cos^2\theta_*} - 1 - 2\cos^2\theta_*}{2\sin^2\theta_* \cos^2\theta_*}.$$

Зависимость θ_* от параметра V/c приведена на фиг. 3 (кривая *1*). С изменением V/c от $1/\sqrt{3}$ до 1 значение θ_* меняется от нуля до 90°.

Аналогичным образом для компоненты тензора напряжений $\sigma_{\theta z}$ вблизи вершины трещины имеем асимптотическое выражение [9]

$$\sigma_{\theta z} = \frac{K}{\sqrt{2r}} T(\theta),$$

где

$$T(\theta) = \frac{1}{\rho\sqrt{2}} \left\{ \frac{\sqrt{\rho - \cos\theta}}{\beta} \sin\theta + \sqrt{\rho + \cos\theta} \cos\theta \right\}. \tag{9}$$

Зависимость (9) приведена на фиг. 4. Кривым *1—4* отвечают значения $V = 0$; $0{,}7c$; $0{,}8c$; $0{,}9c$. Как и для напряжений σ_{yz}, при $V < c\sqrt{3}$ напряжения $\sigma_{\theta z}$ имеют максимум в угловом распределении при $\theta = 0$. При $V > c/\sqrt{3}$ максимум наблюдается при значениях $\theta = \pm\theta_*$, где θ_* определяется следующим образом:

$$\cos^2\theta_* = \frac{5}{3} - \frac{c^2}{V^2} - \frac{2}{3}\sqrt{1 + 12\frac{c^2}{V^2}}\cos\left(\frac{\gamma + \pi}{3}\right), \tag{10}$$

где
$$\cos\gamma = -\frac{1 - 90c^2/V^2 + 54c^4/V^4}{(1 + 12c^2/V^2)^{3/2}}.$$

Зависимость θ_* от параметра V/c, определяемая соотношением (10), приведена на фиг. 3 (кривая *2*). При изменении отношения V/c от $1/\sqrt{3}$ до $1/\sqrt{2}$ θ_* изменяется от $52°24'$ до $90°$. В области $1/\sqrt{2} < V/c < 1$ значения θ_* лежат в области $\theta_* > 90°$, и при $V/c = 1$ имеем $\theta_* = 90°$.

Вычислим скорость освобождения энергии G для отдельной трещины. Известно [9], что скорость освобождения энергии для трещины продольного сдвига связана с коэффициентом интенсивности напряжений соотношением

$$G = \frac{\pi}{2\mu}\frac{K^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Подставляя из (8) значение коэффициента интенсивности напряжений, получим $G = \tau_0^2 d/\mu$, т. е. в данной задаче скорость освобождения энергии не зависит явным образом от скорости роста трещин.

Поступила 7 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Craggs J. W.** On the propagation of a crack in an elastic-brittle material.— J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol. 8, N 1.
2. **Jahashahi A.** A difraction problem and crack propagation.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, N 3.
3. **Гольдштейн Р. В., Матчинский М.** О стационарном движении трещины в полосе.— Инж. журн. МТТ, 1967, № 4.
4. **Кулиев В. Д.** Стационарное движение трещины в полосе.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
5. **Лебедев Н. Н., Скальская И. П.** Осесимметричная электростатическая задача для проводника, имеющего форму полубесконечной трубы с тонкими стенками.— ЖТФ, 1958, т. 28, № 4.
6. **Лебедев Н. Н.** Электростатическое поле у края плоского конденсатора с диэлектрической прокладкой.— ЖТФ, 1958, т. 28, № 6.
7. **Лебедев Н. Н., Скальская И. П.** Электростатическое поле электронной линзы, состоящей из двух коаксиальных цилиндров.— ЖТФ, 1960, т. 30, № 5.
8. **Freund L. B.** The mechanics of dynamic shear crack propagation.— J. Geophys. Res., ser. B, 1979, vol. 84, N 5.
9. **Ахенбах Дж. Д.** Распространение волн, сингулярные эластодинамические напряжения и разрушение.— В кн.: Теоретическая и прикладная механика. М.: Мир, 1979.