

УДК 532.517

Трехмерные нестационарные процессы в вертикально стекающей пленке вязкой жидкости*

Е.А. Демехин, С.М. Шапарь, Е.Н. Калайдин

Кубанский государственный университет,
Южный научный центр РАН, Краснодар

E-mail: edemekhin@nd.edu

Рассматриваются трехмерные волновые процессы в вертикально стекающих пленках вязкой жидкости. Особый интерес представляют трехмерные локализованные возмущения, изученные недостаточно полно. Разработан численный метод, позволяющий проследить эволюцию начальных возмущений. Конечной стадией такой эволюции является образование трехмерных локализованных структур — солитонов. Определены границы устойчивости трехмерных солитонов.

Ключевые слова: пленки жидкости, солитоны, трехмерные волны.

При достаточно больших числах Рейнольдса на поверхности вертикально стекающего слоя вязкой жидкости доминируют трехмерные волновые процессы [1], которые, в отличие от двумерных, изучены недостаточно полно. Эти процессы описываются одним параметром, модифицированным числом Рейнольдса δ [2–4]

$$\delta = \frac{\text{Re}^{11/9}}{3^{7/9} 5 \gamma^{1/3}}.$$

Здесь $\text{Re} = \frac{1}{3} g h_N^3 / \nu^2$ — среднерасходное число Рейнольдса, h_N — нуссельтова безволновая толщина слоя, $\gamma = \sigma \rho^{-1} \nu^{-4/3} g^{-1/3}$ — число Капицы, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, g — ускорение свободного падения.

В настоящей работе рассмотрено поведение трехмерных локализованных возмущений. Показано, что возмущения расплываются вниз по потоку, принимая вид стохастических волновых пятен. Как оказалось, эти пятна являются причиной развала трехмерных солитонов, определяя нижнюю и верхнюю границы их существования, $\delta^* < \delta < \delta^{**}$, $\delta^* \approx 0,054$, $\delta^{**} \approx 0,312$. Проведенные численные эксперименты показали, что эволюция начальных возмущений приводит к формированию

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-08-33585_а и 06-08-96637_р_юг_а).

стохастического пятна на линейной стадии эволюции и последующему формированию когерентной структуры, трехмерного солитона, на нелинейной стадии. При $\delta^* < \delta < \delta^{**}$ солитон вырывается из расширяющегося пятна и является устойчивым образованием. При $\delta < \delta^*$ и $\delta > \delta^{**}$ солитон находится внутри пятна и разрушается им. Теоретически рассмотрено взаимодействие солитона с несущим массу сигналом, приводящее к генерации новых трехмерных солитонов.

1. В длинноволновом приближении для больших капиллярных сил система полных уравнений, описывающих трехмерные волновые процессы в вертикально стекающем вязком слое жидкости, сводится к системе уравнений [2–4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{5\delta} \left(\frac{\partial \nabla^2 h}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 \right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{5\delta} \left(\frac{\partial \nabla^2 h}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$y = h(x, z, t): v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + w \frac{\partial h}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$y = 0: u = v = w = 0,$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, h — локальная толщина слоя. Движение жидкости предполагается в направлении действия силы тяжести x .

После принятия параболического распределения по обеим компонентам скорости, $u = 3q/h \left(\eta - \frac{1}{2} \eta^2 \right)$, $w = 3p/h \left(\eta - \frac{1}{2} \eta^2 \right)$, $\eta = y/h$ и интегрирования первых трех уравнений по y от $y = 0$ до $y = h$, получается следующая система уравнений [4]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \frac{q^2}{h} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial z} \frac{qp}{h} = \frac{1}{5\delta} \left\{ h \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 h + h - \frac{q}{h^2} \right\},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \frac{qp}{h} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p^2}{h} = \frac{1}{5\delta} \left\{ h \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 h - \frac{p}{h^2} \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Здесь $q = \int_0^h u dy$ — расход в направлении действия силы тяжести x , $p = \int_0^h w dy$ —

расход в поперечном направлении z . Течение описывается одним параметром — δ .

При $\delta \rightarrow 0$ (малые числа Рейнольдса) система переходит в уравнение Курamoto–Сивашинского. Действительно, вводя разложение, беря в качестве малого параметра $\varepsilon = \sqrt{15\delta} \rightarrow 0$, так что

$$h \sim 1 + \varepsilon^3 H, \quad q \sim 1 + \varepsilon^3 Q_1 + \varepsilon^6 Q_2, \quad p \sim \varepsilon^6 P, \quad (2)$$

$$\xi = \varepsilon x, \quad \zeta = \varepsilon z, \quad \frac{\partial}{\partial t} \sim -3\varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial \tau},$$

и подставляя эти соотношения в систему (1), можно получить предельное уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 6H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right)^2 H = 0. \quad (3)$$

2. Система (1) имеет тривиальное решение $h = q = 1, p = 0$, соответствующее безволновой гладкой пленке. Эволюция малого возмущения поверхности $\hat{h} = h - 1 \rightarrow 0$ единичным локализованным импульсом, помещенным в начало координат, описывается линеаризованной версией системы (1)

$$\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial t^2} + \frac{12}{5} \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial t \partial x} + \frac{6}{5} \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial x^2} + \frac{1}{5\delta} \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + 3 \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \right) + \frac{1}{5\delta} \nabla^4 \hat{h} = \delta(x) \delta(z) \delta(t), \quad (4)$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака.

Преобразование Лапласа по времени и Фурье по пространственным переменным после соответствующих алгебраических преобразований дает решение (4) в виде двух интегралов:

$$\hat{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha, \beta) e^{i\alpha x + i\beta z - i\omega_1(\alpha, \beta)t} d\alpha d\beta + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\alpha, \beta) e^{i\alpha x + i\beta z - i\omega_2(\alpha, \beta)t} d\alpha d\beta,$$

где A и B зависят от начальных данных и $\omega_1(\alpha, \beta), \omega_2(\alpha, \beta)$ — корни дисперсионного соотношения

$$\omega^2 + \omega \left(\frac{i}{5\delta} - \frac{12}{5} \alpha \right) + \frac{6}{5} \alpha^2 - \frac{3i\alpha}{5\delta} - \frac{1}{5\delta} (\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0.$$

Второй интеграл с корнем $\omega_2, \text{Im}(\omega_2) < 0$ соответствует возмущениям, распространяющимся вверх по потоку и затухающим при $t \rightarrow \infty$, поэтому не рассматривается. Первый интеграл можно оценить при $t \rightarrow \infty$ и фиксированных x/t и z/t , представив его в виде

$$\hat{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{i \left(\alpha \frac{x}{t} + \beta \frac{z}{t} - \alpha c - \omega \right) t} d\alpha d\beta, \quad t \rightarrow \infty.$$

Для больших времен t основной вклад в интеграл возникает от экспоненты в окрестности седловой точки (α_*, β_*) , где

$$\frac{\partial \omega(\alpha_*, \beta_*)}{\partial \alpha} = \frac{x}{t}, \quad \frac{\partial \omega(\alpha_*, \beta_*)}{\partial \beta} = \frac{z}{t}.$$

Эти уравнения дают два соотношения для определения α_* и β_* :

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{t}\right) \left(2\omega + \frac{i}{5\delta} - \frac{12\alpha}{5}\right) + \frac{12}{5}(\alpha - \omega) - \frac{3i}{5\delta} - \frac{4\alpha}{5\delta}(\alpha^2 + \beta^2) = 0, \\ \left(\frac{z}{t}\right) \left(2\omega + \frac{i}{5\delta} - \frac{12\alpha}{5}\right) - \frac{4\beta}{5\delta}(\alpha^2 + \beta^2) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решение системы позволило подсчитать коэффициент нарастания $\mu = \text{Im}\{\omega(\alpha, \beta) - \alpha x/t - \beta z/t\}$ вдоль лучей $(x/t) = \text{const}$ и $(z/t) = \text{const}$.

При больших x и z асимптотика интеграла вдоль лучей x/t и z/t будет определяться как

$$\hat{h} \sim \frac{\text{const}}{t} e^{\mu t} \cos(\gamma t + \varphi).$$

Геометрическое место точек $\mu(x/t, z/t) = 0$ отделяет точки роста и затухания волн и таким образом дает форму “стохастического пятна”. Это пятно распространяется в автоматической манере, сохраняя форму, которая для различных δ показана на рис. 1. Область внутри пятна соответствует точкам неустойчивости, $\mu > 0$, вне пятна — $\mu < 0$. При $\delta \rightarrow 0$ пятно схлопывается в начало координат $z/t = 0, x/t = 3$. При $\delta > 0,4$ форма пятна не зависит от δ . Для конечных δ пятно слегка вытянуто в направлении x . При $\delta > 0,081$ профиль теряет свою гладкость и имеет две угловые точки.

Быстрее всего распространяется волна, соответствующая верхней точке области, $(x/t)_+$. Медленнее всего — волна, соответствующая нижней точке, $(x/t)_-$. Эти моды показаны на рис. 2. Заштрихованному интервалу на этом рисунке соответствует неустойчивая зона волнового пакета, задний и передний фронт которого распространяются со скоростями соответственно $(x/t)_-$ и $(x/t)_+$. На рис. 2 линией 1 изображена скорость трехмерного солитона [5]. Любое решение, в том числе трехмерный солитон, является источником малых возмущений или шума. Шум, локализованный вначале около своего источника, солитона, развивается во времени как “стохастическое пятно”, соответствующее заштрихованной области рис. 1, 2. Существует два критических значения $\delta^* \approx 0,054$ и $\delta^{**} \approx 0,312$ (последнее не показано на рис.), в которых скорость трехмерного солитона пересекает заштрихованную неустойчивую область. При критических значениях $\delta = \delta^*$ и $\delta = \delta^{**}$ скорость трехмерного солитона равна скорости переднего

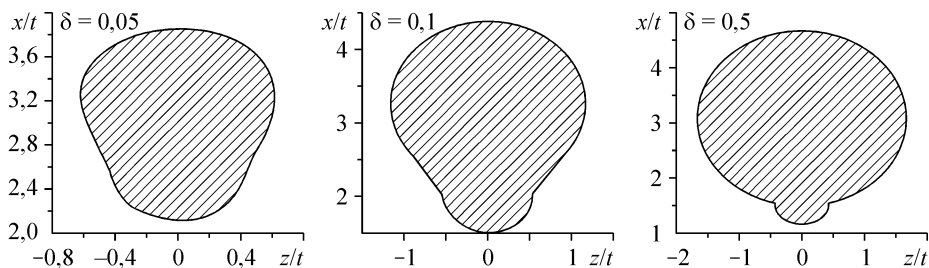
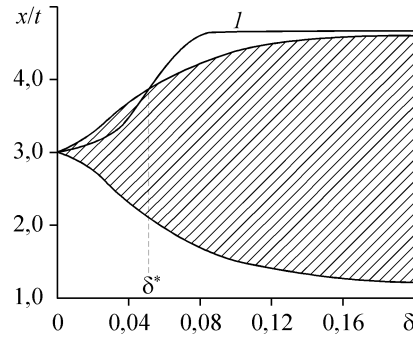


Рис. 1. Кривые конвективной неустойчивости $x/t, z/t$ как функция δ .
 $\delta = 0,05$ (a), $0,1$ (b), $0,5$ (c).

Рис. 2. Заштрихованный интервал соответствует волновому пакету, задний и передний фронт которого распространяются со скоростями (x/t) и (z/t) .
 l — скорость трехмерного солитона.



фронта пятна. При $\delta^* < \delta < \delta^{**}$ трехмерный солитон движется быстрее, чем расширяющееся “турбулентное” пятно, и поэтому оказывается устойчивым; при $\delta < \delta^*$, $\delta > \delta^{**}$ солитон попадает в зону пятна и разрушается им, δ^* определяет левую границу режима трехмерных солитонов, а δ^{**} — правую границу. Для воды $\gamma = 2850$ это соответствует $Re = 6,1$ и $Re = 25,5$.

3. Изложенное выше было подтверждено прямыми численными экспериментами по нелинейной эволюции трехмерных локализованных сигналов. Система (1) интегрировалась в движущейся со скоростью волны системе координат. Начальные условия брались в виде:

$$h = 1 + Ae^{-b(x^2+z^2)}, \quad q = 1, \quad p = 0,$$

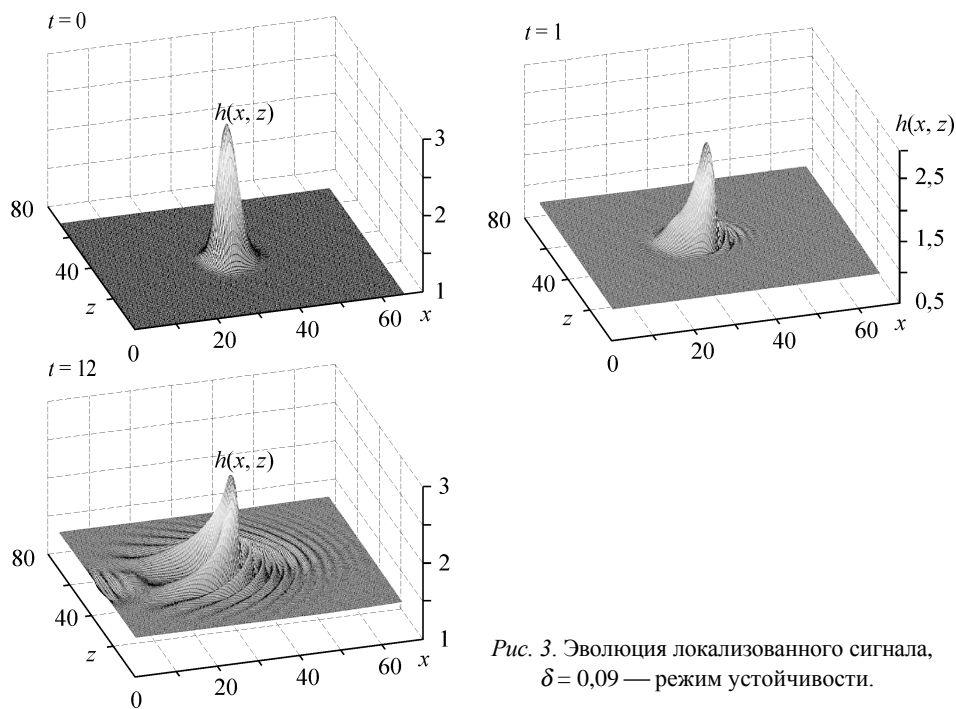
где A и b — параметры, подбиравшиеся таким образом, что объем сигнала

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (h-1) dx dy$$

был близок к объему стационарного трехмерного (равновесного) солитона [5].

Типичная эволюция сигнала для $\delta = 0,09$ (для воды число Рейнольдса около 9) изображена на рис. 3. Начальный сигнал с массой на 20 процентов большей равновесной помещался на плоский подслоя. Если масса была в два или более раз больше равновесной, сигнал распадался на два или несколько солитонов или превращался в трехмерный двугорбый солитон. Когда масса — меньше равновесной, волна подсасывает жидкость из подслоя. В численных экспериментах введение слишком малой массы могло вызывать образование сухих пятен и остановку расчетов. “Шум” от сигнала при данном $\delta = 0,09$ уносился из расчетной области и не проявлялся в расчетах. При $t = 0$ сигнал имеет тенденцию расщепиться на два, но этого не происходит, и в следующий момент времени, $t = 0,5$, формируется нелинейная головка солитона. При $t = 1$ сигнал приобретает капиллярную рябь на переднем фронте. Впадина на заднем фронте формируется при $t = 5$. При $t = 12$ трехмерный солитон практически сформировался. Можно видеть медленное выдавливание излишней массы за солитоном. Сформировавшаяся структура имеет характерные капиллярные колебания на переднем фронте и вдоль “усов”, выходящих из головки, и длинную впадину за головкой. Волна полностью устанавливается при $t = 20$ (не показано на рис.). Если пересчитать время с 12 до 20 на размерное расстояние, которое необходимо сигналу для перехода в стационарный солитон, это составит от 6 до 10 см, что близко к экспериментальному значению [1, 6, 7].

На рис. 4 изображена эволюция начального локализованного образования при меньшем δ , $\delta = 0,065$, близким к δ^* . При $t = 26$ видно образование стохастического пятна за локализованным сигналом, которое при $t = 25-44$ принимает форму, близкую к найденной аналитически (см. рис. 1).



Численные эксперименты подтверждают предсказание теории, что при $\delta^* < \delta < \delta^{**}$ волна весьма устойчива и может быстро формироваться из сигнала с равновесной массой. В численных экспериментах также менялась начальная форма сигнала при неизменной массе; результат и время достижения стационарной структуры оказались практически независимыми от формы. Вычисления с начальной массой порядка полутора от равновесной дают качественно те же этапы

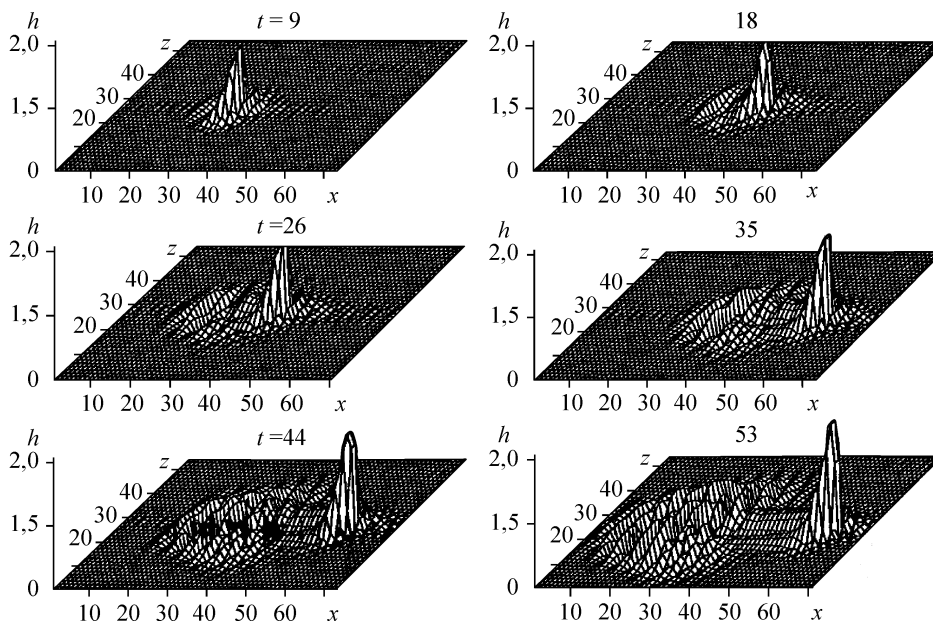


Рис. 4. Эволюция локализованного сигнала, $\delta = 0,065$ — режим устойчивости.

эволюции с выходом на стационарную структуру с почти тем же временем насыщения от $t \sim 10$ до 20.

На рис. 5 представлены результаты расчетов в неустойчивой зоне $\delta = 0,035 < \delta^*$. Сигнал, развиваясь вниз по потоку, принимает типичную форму трехмерного солитона. Одновременно развивается стохастическое пятно, которое затем расплывается в пространстве. Достаточно далеко вниз по потоку, $t = 132$, пятно приобретает конечную амплитуду и разрушает находящийся внутри пятна солитон.

В подтверждение теории конвективной устойчивости, не удалось в процессе эволюции создать трехмерный солитон при $\delta < \delta^*$ или $\delta > \delta^{**}$ из-за сильной первичной неустойчивости плоского участка. Это также объясняет почему никому (включая авторов) не удалось получить стационарные трехмерные солитоны, решая нестационарное уравнение Курамото–Сивашинского (2). Трехмерные солитоны могут существовать только в диапазоне чисел Рейнольдса $6 < Re < 26$ (для воды).

В экспериментах [6, 7] не удалось получить трехмерные солитоны при малых δ (информация и соответствующие графики не опубликованы и были получены при личном общении с авторами [6, 7]); сигнал расплывался в пространстве, как предсказывает наша теория.

На рис. 6 изображены численные результаты взаимодействия трехмерного солитона с малым несущим массу возмущением, помещенным перед волной, $\delta = 0,15$. Возмущение имеет вид $h = 1 + 0,5 \exp[-a(x^2 + z^2)]$, $a = 1/300$. В момент времени $t = 25$ масса возмущения оказалась полностью поглощенной солитоном. В момент времени $t = 33$ лишняя жидкость покидает солитон вдоль его осей, причем при $t = 41$ из этой массы формируются два малых солитона. Эти солитоны постепенно отстают от основной волны, попадают на подслой. Так формируется шахматная структура солитонов в реальном течении, которую можно увидеть на фотографии из работы [1].

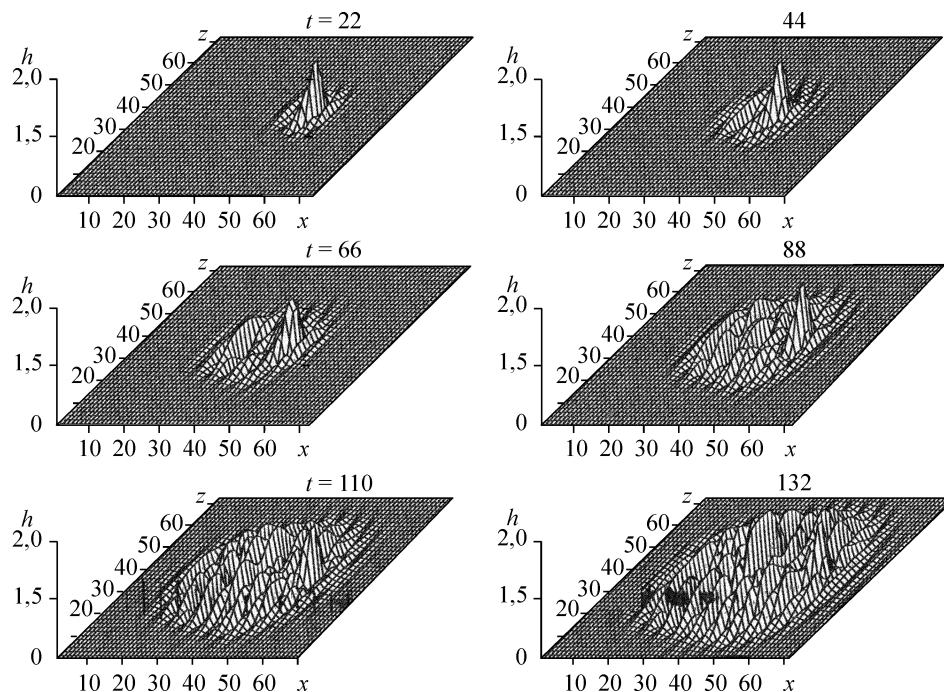


Рис. 5. Эволюция локализованного сигнала, $\delta = 0,04$ — режим устойчивости.

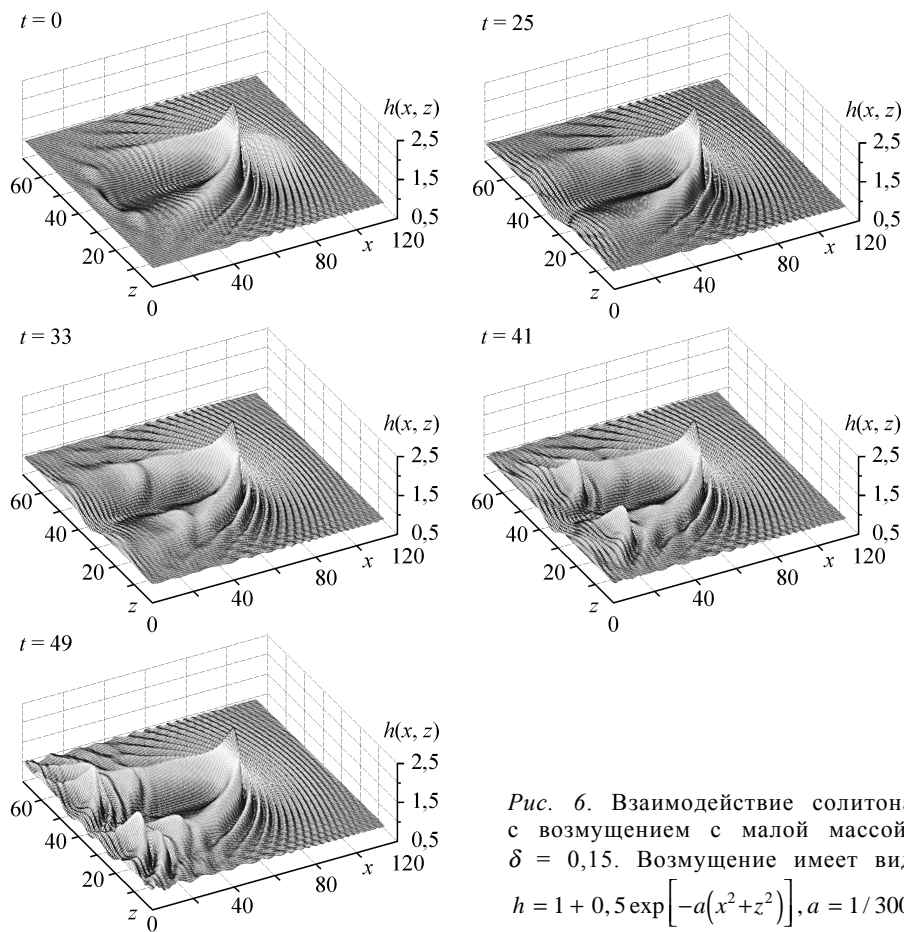


Рис. 6. Взаимодействие солитона с возмущением с малой массой, $\delta = 0,15$. Возмущение имеет вид $h = 1 + 0,5 \exp[-a(x^2 + z^2)]$, $a = 1/300$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан численный метод, позволяющий проследить развитие начальных возмущений с последующим формированием трехмерных локализованных структур — солитонов. Выделен диапазон значений чисел Рейнольдса, при которых могут существовать трехмерные солитоны. Рассмотрено взаимодействие трехмерного солитона с малым возмущением, находящимся перед волной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волновое течение пленок жидкости. — Новосибирск.: Наука, 1992. — 256 с.
2. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1967. — № 1. — С. 43–51.
3. Шкадов В.Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1968. — № 2. — С. 20–25.
4. Демехин Е.А., Шкадов В.Я. О трехмерных нестационарных волнах в стекающей пленке жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1984. — № 5. — С. 21–27.
5. Калайдин Е.Н., Власкин С.Ю., Демехин Е.А., Каллиадасис С. О трехмерных солитонах в стекающей пленке жидкости // ДАН. — 2006. — Т. 406, № 1. — С. 44–47.
6. Алексеенко С.В., Антипин В.А., Гузанов В.В., Маркович Д.М., Харламов С.М. Стационарные уединенные трехмерные волны на вертикально стекающей жидкой пленке // ДАН. — 2005. — Т. 405, № 2. — С. 193–195.
7. Alekseenko S.V., Antipin V.A., Guzanov V.V., Kharlamov S.M., Markovich D.M. Three-dimensional solitary waves on falling liquid film at low Reynolds numbers // Physics of Fluids. — 2005. — Vol. 17, Iss. 12. — P. 121704–121704–4.

Статья поступила в редакцию 27 сентября 2007 г.