ПМТФ, № 5, 1975

УДК 232.5.031

К ТЕОРИИ ДЛИННЫХ ВОЛН*

М. А. Лаврентьев

(*Новосибирск*)

В данной статье излагается новый метод для изучения плоских установившихся волновых движений тяжелой жидкости. Этим методом удается установить, например, существование уединенной волны и дать впервые полное обоснование приближенной теории Релея [1], которая касается теории длинных волн конечной амплитуды. В основе метода лежат общие граничные свойства однолистных функций, ранее использованные автором при построении качественной теории струйных движений жидкости [2].

1. Постановка задачи. Как известно, задача об установившемся волновом движении тяжелой жидкости в канале переменной глубины сводится к такой граничной задаче теории конформных отображений: пусть в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ задана линия $\Gamma_0: y=y_0(x)$, где функция $y_0(x)$ однозначна и непрерывна вместе со своими двумя производными при всех значениях x; необходимо задать линию Γ: $y=y(x)$, $y(x)>y_0(x)$ так, чтобы при конформном отображении $\zeta=f(z,\Gamma_0,\Gamma)$, $\zeta=\xi+i\eta$ области $D(\Gamma_0,\Gamma)$, ограниченной Γ_0 и Γ, на полосу $v<\eta<h$, $f(\pm\infty,\Gamma_0,\Gamma)=\pm\infty$ вдоль линии Γ имело место соотношение

$$I_v(\Gamma_0,\Gamma)=|f'(z,\Gamma)|^2-C+\lambda y=0, \tag{1}$$

где C и λ — заданные постоянные. Гидродинамически функция f означает комплексный потенциал движущейся жидкости, число h — расход; условие (1) соответствует постоянному давлению на свободной поверхности. Если $y_0(x)=\mathrm{const}$, то, налагая на движение с потенциалом f некоторые условия, получим волновое движение в канале конечной глубины с нулевой поперечной скоростью жидкости.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда h достаточно мало и когда вместе с h малы величины $\frac{1}{h}|y_0(x)^{-h}|$, $\frac{1}{h}|y(x)-h|$ вместе с первыми тремя производными, а также $|C-\zeta|$, $\left|\lambda-\frac{2}{h}\right|$. В соответствии с этим установим некоторые соотношения, касающиеся конформных отображений областей $D(\Gamma_0,\Gamma)$, близких к полосе $0<y<h$ на полосу $0<\eta<h$.

---

* Развитые М. А. Лаврентьевым вариационные методы конформных отображений (теоремы сравнения М. А. Лаврентьева) нашли богатое применение в трудах самого Михаила Алексеевича, его учеников и последователей в теории квазиконформных отображений, в задачах гидродинамики со свободными границами, в теории фильтрации, в численных методах решения прикладных задач и других разделах математики и механики. Обзор полученных здесь результатов и ссылки на соответствующие работы можно найти, например, в [3,4].

Предлагаемый вниманию читателей перевод с украинского языка одноименной статьи М. А. Лаврентьева ([5], 1947 г.) является первой публикацией на русском языке полного доказательства классической теоремы существования уединенной волны, анонсированной автором еще в 1943 г. в Докл. АН СССР [6].

Редактор перевода *В. Н. МОНАХОВ*,
переводчик *М. П. Щербюк*.

2. Вспомогательные формулы. Пусть $z_1=x_1+iy_1$ — произвольная точка линии Г. Проведем через z_1 окружность C, касающуюся Г, и нормаль T к Г до ее пересечения с линией Γ_0, например, в точке z_0; через z_0 проведем окружность C_0, касающуюся Γ_0. Область, ограниченную C_0 и C, обозначим через Δ_{z_1}. Отобразим конформно

$$\zeta=f(z, z_1)$$

область Δ_{z_1} на полосу $0<\eta<h$ при условии, чтобы вершины луночки Δ_{z_1} переходили в точки $\pm\infty$.

Получим

$$|f'(z_1, z)|=\frac{h}{y-y_0}\left[1-\frac{1}{3}(y-y_0)y''+\frac{1}{6}(y-y_0)y_0''+\frac{11}{6}y'^2-\right.$$
$$\left.-\frac{5}{3}y_0'y'+\frac{1}{3}y_0'^2\right]+r, \tag{2}$$

где

$$r=r\left(y_0, y, y_0', y', y_0'', y''\right)$$

такая функция, что разложение по t функции $r\left(\pm y_0, ty, ty_0', \ldots\right)$ начинается с третьих степеней t.

При достаточной гладкости линий Γ_0, Γ величина $|f'(r_1, z)|$ будет давать приближенное значение для $|f'(z_1, \Gamma_0, \Gamma)|$. Займемся оценкой и свойствами остаточного члена этого приближения. Для простоты записи условимся в дальнейшем через k и θ обозначать величины, которые остаются ограниченными при стремлении к нулю соответствующих параметров, в частности h. Обозначим соответственно через $\varphi_0(x)$ и $\varphi(x)$ разность ординат точек C_0, Γ_0 и C, Г; там, где эта разность не определена, функции φ_0 и φ считаем заданными так, чтобы они оставались непрерывными. Определим линии $\Gamma_0(\tau)$ и $\Gamma(\tau)$ уравнениями:

$$y=y_0(x)+\tau\varphi_0(x)=\varphi_0(x, \tau);$$
$$y=y(x)-\tau\varphi(x)=\varphi(x,\tau).$$

Обозначая через $V(\tau)$ значение модуля производной в точке z_1 функции $\zeta=f[z, \Gamma_0(\tau), \Gamma(\tau)]$, которая реализует конформное отображение области $Д[\Gamma_0(\tau), \Gamma(\tau)]$ на полосу $0<\eta<h$ при условии соответствия бесконечно отдаленных точек, будем иметь [2]

$$\frac{1}{v(\tau)}\frac{d}{d(\tau)}V(\tau)=\frac{\pi}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|f'[z, \Gamma_0(\tau), \Gamma(\tau)]|\,\varphi(x)\cos\arg f'dt}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi_1-t}{h}}+$$
$$+\frac{\pi}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|f'[z, \Gamma_0(\tau), \Gamma(\tau)]|\,\varphi(x)\cos\arg f'dt}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-t}{h}}, \tag{3}$$

где z — точка $\Gamma(\tau)$, которая соответствует при отмеченном отображении точке t верхней границы полосы, ξ_1 соответствует z_1. Отсюда, полагая

$$\bar{\varphi}(t)=\int\limits_0^1|f'(z, \Gamma_0(\tau), \Gamma(\tau)|\,\varphi(x)\cos\arg f'dt, \quad z\in\Gamma(\tau),$$

$$\bar{\varphi}_0(t)=\int\limits_0^1|f'(z, \Gamma_0(\tau), \Gamma(\tau)|\,\varphi_0(x)\cos\arg f'dt, \quad z\in\Gamma_0(\tau),$$

имеем

$$\log \frac{V(1)}{V(0)} = \frac{\pi}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\varphi}(t)\,dt}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{\xi_1 - t}{h}} + \frac{\pi}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\varphi}_0(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{2} \frac{\xi_1 - t}{h}},$$

откуда получаем следующий вид остаточного члена R:

(4) $$R = \log |f'(z_1, \Gamma_0, \Gamma)| - \log |f'(z_1, z_2)| =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{k\varphi_0(\theta - t)\,dt}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{\xi - t}{h}} + \frac{\pi}{4} \int \frac{k\varphi_0(\theta - t)\,dt}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{2} \frac{\xi - t}{h}}$$

или, замечая, что

$$\varphi(x) = y(x) - y(x_1) - y'(x_1)(x - x_1) - \frac{1}{2} y''(x_1)(x - x_1)^2 + \\ + \theta |y''|^3 (x' - x_1)^3,$$

$$\varphi_0(x) = y_0(x) - y\left(x_1^{(0)}\right) - y_0'\left(x_1^{(0)}\right)(x - x_1) - \frac{1}{2} y_0'\left(x_1^{(0)}\right)(x - x_1)^2 + \\ + \theta_0 |y''|^3 (x - x_1)^3,$$

имеем

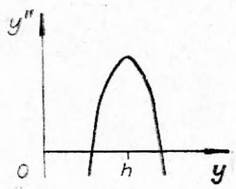
(5) $$|R| < k \{\max |y_0''| + \max |y'''|\} h^2.$$

3. Волна на произвольном дне и волна Релея. Переходя к установившимся волновым движениям, положим в первом приближении в соотношении (1) значение

(6) $$|f'(z, \Gamma_0, \Gamma)|^2 = \frac{(h - v)^2}{(y - y_0)^2} \left(1 + \frac{2}{3} yy'''\right),$$

тогда получим

$$\left(\frac{h - v}{y - y_0}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{3} yy'''\right) = C - \lambda y$$



или, отбросив малые высших порядков,

$$\left(\frac{h - v}{y}\right)^2 \left[1 + \frac{2}{3} yy'' + 2 \frac{y_0}{y} + 3 \left(\frac{y_0}{y}\right)^2\right] = C - \lambda y.$$

Отсюда

(6′) $$yy'' = -\frac{3}{2} - 3 \frac{y_0}{y} - \frac{9}{2} \left(\frac{y_0}{y}\right)^2 + \frac{3}{2} \frac{C}{(h - v)^2} y^2 - \frac{3}{2} \frac{\lambda}{(\lambda - v)^2} y^3.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $y_0 = 0$, $v = 0$. В этом случае (6) имеет вид

(6″) $$yy'' = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \frac{C}{h^2} y^2 - \frac{3}{2} \frac{\lambda}{h^2} y^3 = \varphi(y).$$

Выберем значения констант так, чтобы максимум $\varphi(y)$ достигался в точке $y = h$ и расстояние между положительными корнями $\varphi(y)$ было порядка h^2, тогда

$$\varphi'(y) = \frac{3C}{h^2} y - \frac{9}{2} \frac{\lambda}{h^2} y^2.$$

Отсюда, полагая $y = h$, получим

(7) $$2C - 3\lambda h = 0.$$

Если теперь допустить, что один из корней $\varphi(y)$ равен $h^2 + h$, то получим другое соотношение для определения C и λ

(7′) $$-1 + \frac{C}{h^2} (h + h^2)^2 - \frac{\lambda}{h^2} (h + h^2)^3 = 0.$$

Из (7) и (7′) получаем

$$\lambda = \frac{2}{h}\frac{1}{1 - 3h^2 + 2h^3}$$

или, сохраняя главные члены, далее полагаем

$$\lambda = \frac{2}{h} + 6h; \tag{8}$$

$$C = 3 + 9h^2.$$

При принятых значениях λ и C отметим некоторые свойства функции $\psi = \frac{1}{y}\varphi(y)$.

Нули y_1 и y_2 функции ψ имеют вид

$$y_{1,2} = h \pm h^2 + \theta h^3. \tag{9}$$

В интервале $y_1 < y < y_2$ функция ψ положительна и в точке

$$y_0 = h + \theta h^3$$

допускает максимум, равный

$$\psi_{\max} = \psi(y_0) = \frac{9}{2}h + \theta h^2.$$

Вне интервала $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ при $y > 0$ функция ψ отрицательна и слева выпукла, справа выпукла при $y < \frac{3}{2}h$. При $\frac{h}{4} < y < \frac{5}{4}h$

$$\psi''(y) = \frac{k}{h^3},$$

кроме того,

$$\psi'(h \pm \theta h^2) = \mp \frac{k}{h}.$$

В дальнейшем будет удобно уравнению (6′) придать иной вид. Для этого положим

$$y_1(x) = y(x) - y_0(x)$$

и заменим функцию $y_0(x)$ функцией

$$\eta_0(x) = y_0(x) - v.$$

Соотношение (6) принимает вид

$$\left(\frac{h - v}{y_1}\right)^2\left(1 + \frac{2}{3}y_1 y_1''\right) = C - \lambda(y_0 + v + \eta_0). \tag{10}$$

Полученное уравнение вследствие оценок для ψ' и ψ'' эквивалентно уравнению (6) с точностью до малых порядка выше h^2. Подставив в (10) вместо C и λ их выражение (8) и заменив правую часть квадратичным членом, получим

$$y'' = \frac{9}{2}h + \frac{1}{2}\frac{v^2}{h^3} - \frac{3\eta_0}{h^2}\frac{9}{2h^3}\left[y - \left(h + \frac{1}{3}v\right)\right]^2 = \psi(y, v). \tag{11}$$

Интегральную кривую уравнения (11) при $\eta = v = 0$ будем называть волной Релея [1].

4. Свойства волны Релея. Полагая $\eta = v = 0$, получим

$$y'' = \frac{9}{2}h - \frac{9}{2h^3}(y - h)^2. \tag{11′}$$

Первый интеграл будет иметь вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9hy - \frac{3}{h^3}(y - h)^2 + 9A, \quad A = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Изучим изменение интегралов уравнения (11′), которые достигают максимума при $x=0$, в зависимости от начальной ординаты $y(0)=h+\alpha$, $\alpha>0$.

Условие максимума дает

$$h^2+h\alpha-\frac{\alpha^3}{3h^3}+A=0,$$

откуда

$$A=\frac{\alpha^3}{3h^3}h^2-h\alpha. \tag{12′}$$

Найдем значение y, $y\neq h+\alpha$, при котором $\frac{dy}{dx}=0$. Имеем

$$hy-\frac{1}{3h^3}(y-h)^3-h\alpha-h^2+\frac{\alpha^3}{3h^3}=0,$$

что после деления на $y-h-\alpha$ дает

$$(y-h)^2+\alpha(y-h)+(\alpha^2-3h^4)=0$$

или

$$y=h+\alpha,\quad (\alpha)=h-\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4h^4-\alpha^2}. \tag{13}$$

Отсюда видим, что наибольшее значение α, при котором получаем волну, равно $2h^2$. Кроме того, очевидно, что при α, бесконечно близком к h^2, интегральная кривая будет близка к прямой $y=h+h^2$, значит, в (13) следует брать знак плюс.

Из приведенных вычислений и непосредственно из вида уравнения (11′) вытекает, что для каждого значения α

$$-h^2\leqslant\alpha<2h^2$$

существует интегральная кривая уравнения (11′) $y=Y(x,\alpha)$, которая имеет максимум при $x=0$ и имеет конечный период $2\omega(\alpha)$:

$$Y(x+2\omega(\alpha),\alpha)=Y(x,\alpha),$$

кроме того, очевидно,

$$Y(-x,\alpha)=Y(x,\alpha).$$

Период 2ω определяется путем интегрирования уравнения (12)

$$\omega=\frac{h^{3/2}}{\sqrt{3}}\int\limits_{h+\alpha_1(\alpha)}^{h+\alpha}\frac{dz}{\sqrt{3h^4(z-\alpha)-(z^3-\alpha^3)}}, \tag{14}$$

$$\text{где}\quad \alpha_1(\alpha)=-\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4h^4-\alpha^2}.$$

Из полученного выражения для ω видно, что при $\alpha\to h^2$ полупериод ω стремится к $\frac{\pi\sqrt{h}}{3}$

$$\lim_{\alpha\to h^2}\omega(\alpha)=\frac{\pi\sqrt{h}}{3},$$

при увеличении α ω увеличивается, причем при $\alpha\to 2h^2$ ω стремится к ∞, значит, при $\alpha=2h^2$ интегральная кривая будет допускать единственный максимум и прямая $y=h-h^2$ будет асимптотой этой кривой. Кривая $y=Y(x,2h^2)$ дает приближенный профиль «уединенной волны».

Найдем асимптотическое выражение для $\omega(\alpha)$ при значениях α, близких к $2h^2$. Для этого представим ω в виде

$$\omega(\alpha)=\frac{h^{/2}}{\sqrt{3}}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha}\frac{dz}{\sqrt{(\alpha-z)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}},$$

где $\alpha_2=\alpha_2(\alpha)$ определяется по формуле (13), причем перед радикалом нужно взять знак минус.

Положим

$$\alpha-\alpha_1=\frac{3}{2}\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4h^4-\alpha^2}=2\delta,$$

$$\alpha_1-\alpha_2=\sqrt{3}\sqrt{4h^4-\alpha^2}=\varepsilon\delta, z=\delta t,$$

тогда

$$(15)\qquad \omega(\alpha)=\frac{h^{3/2}\delta^{-1/2}}{\sqrt{3}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+\varepsilon-t)}}=$$

$$=\frac{h^{3/2}\delta^{-1/2}}{\sqrt{6}}\left[\log\frac{2}{\varepsilon}+A+B\varepsilon\log\frac{1}{3}\right].$$

Введем вместо переменной α переменную τ

$$\alpha=2h^2-\tau h^2,$$

тогда при малых τ будем иметь

$$\delta=\frac{3}{2}h^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\tau}+\ldots\right);$$

$$\varepsilon=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{\tau}+\ldots$$

Отсюда окончательно

$$\omega(\alpha)=\frac{1}{6}h^{\frac{1}{2}}\log\frac{1}{\tau}+\frac{\sqrt{3}}{36}h^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}\log\frac{1}{\tau}+\ldots$$

Отправляясь от соотношений (11′), (12) и (12′), можно получить следующие оценки для наклона и кривизны волны Релея при любых значениях $|x|\leqslant\omega(\alpha)$:

$$(16)\qquad Y'(x,\alpha)<kh^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3x}{\sqrt{h}}},$$

$$Y''(x,\alpha)<kh e^{-\frac{3x}{\sqrt{h}}},$$

$$Y'''(x,\alpha)<h^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{3x}{\sqrt{h}}}.$$

Первая из этих оценок оправдывает тот факт, что при переходе от (2) к (6) отбросили член, который содержит y', так как в соответствии с (16) этот член имеет порядок h^3.

Вернемся к общему уравнению (11) и установим следующее свойство его интегралов. Пусть $y=z(x)$ есть интеграл уравнения (11). $Z(0)=h+\alpha$, $Z(-x)=Z(x)$, $Z(x+2\omega)=Z(x)$ при $v=0$ и при $\eta=\eta_0(x)$, $\eta_0(-x)=\eta_0(x)$, $\eta_0(x+2\omega)=\eta_0(x)$ $|\eta_0(x)|<\beta h^3$ и функция $\eta=\eta(x)$ такая, что интеграл уравнения (11) совпадает с $Z(x)$. Обозначим через $Z(x)$ интеграл уравнения (11) при $\eta=\eta(x)-\Delta$, где $\Delta=\text{const}$ такой, что $Z_1(0)=h+\alpha$, $Z'(0)=0$.

Лемма 1. Если $2h^2 - \alpha$ и β достаточно малы, при $x < \omega(\alpha)$ разность

$$\delta Z = Z_1(x) - Z(x)$$

имеет тот же самый знак, что и Δ, $|\delta Z|$ возрастает, причем $x = k\sqrt{h}$

$$|\delta Z| > \frac{k\Delta}{h}.$$

Доказательство. Вследствие непрерывности интеграла как функции параметров уравнения достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha = 2h^2$ и $\eta_0(x) = 0$. Пусть при этом Z перейдет в $Y(x,\alpha)$, Z_1 — в $Y_1(x_1,\alpha)$. Отметив это, займемся сначала частным случаем уравнения (11)

$$y'' = \frac{9}{2}h + \frac{3\overline{\Delta}}{h^2} - \frac{9}{2h^3}(y-h)^2. \tag{11''}$$

Будем при этом полагать, что $\overline{\Delta} = 0$ при $2h^2 > y \geqslant y_0$ и $\overline{\Delta} = \Delta$ при меньших значениях y. Рассмотрим интеграл $y = y(x)$ этого уравнения при начальных данных

$$y(x_0) = Y(x_0,\ 2h^2),$$
$$y'(x_0) = Y'(x_0,\ 2h^2),$$

где x_0 определяется уравнением $Y(x_0,\ 2h^2) = y_0$.

Пусть

$$x = x(y),$$
$$\overline{x} = \overline{x}(y)$$

есть функции, обратные соответственно функциям $y = Y(x,\ 2h)$ и $y = y(x)$. В соответствии с уравнениями (11′), (11″) и начальными условиями получим

$$x = \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} \int\limits_y^{y_0} \frac{dy}{(y - h + h^2)\sqrt{h + 2h^2 - y}} = \int\limits_y^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{v}},$$

$$\overline{x} = \int\limits_y^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{U + \frac{27\Delta}{h^2}(y - y_0)}} = \int\limits_y^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{U}} + \frac{27\Delta}{2h^2} \int\limits_y^{y_0} \frac{y_0 - y}{U^{\frac{3}{2}}}\, dy.$$

Следовательно,

$$\delta x = \overline{x} - x = kh^{\frac{5}{2}}\Delta \int\limits_{y-h}^{y_0-h} \frac{y_0 - h - y}{(y + h^2)^3 (2h^2 - y)^{\frac{3}{2}}}\, dy.$$

Отмечая, что

$$y(x) - Y(x,\ 2h^2) \equiv Y'(x,\ 2h^2)\delta x,$$

и вводя новую переменную u

$$y = h + 2h^2 - h^2u^2,$$
$$y_0 = h + 2h^2 - h^2u_0,$$

найдем

$$\delta y = y(x) - Y(x, 2h^2) = \frac{k\Delta}{h}(3 - u^2)u^2 \int\limits_{u_0}^{u} \frac{u^2 - u_0^2}{(3 - u^2)^3 u^2}\, du,$$

где k — числовая постоянная, $0 < u_0 < u < \sqrt{3}$. Дифференцируя последнее соотношение по u, найдем

$$\frac{d}{du}\delta y = \frac{k\Delta}{h}\left\{\frac{u^2 - u_1^2}{(3-u^2)^2} - 2(2u^2-3)u\int\limits_{u_0}^{u}\frac{u^2-u_0^2}{(3-u^2)^2u^2}du\right\}.$$

Правая часть последнего уравнения явно положительна при $u^2 < \frac{3}{2}$; непосредственным вычислением можно убедиться, что это имеет место при всех u_0 и u, $0 < u_0 < u < \sqrt{3}$. Значит, вариация δy увеличивается. Кроме того, проведенные вычисления показывают, что при $x_0=0$ и при значениях x порядка $\sqrt{h}$ вариация δy имеет порядок $\frac{\Delta}{h}$.

Составив для уравнения (11) уравнение в вариациях, получим для δy дифференциальное уравнение

$$\delta y'' = -\frac{9}{h^3}(Y-h)\,\delta y + \frac{3\bar{\Delta}}{h^2},$$

$$\bar{\Delta}=0 \text{ при } x < x_0 \text{ и } \bar{\Delta}=\Delta \text{ при } x \geqslant x_0.$$

Из доказанной выше монотонности δy при любом x_0 приходим к такому результату: если $\varphi(x)$ — неубывающая положительная функция, то $\varphi'(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) > 0$, $x > 0$, и если $z(x)$

$$z(0)=z'(0)=0$$

есть интеграл уравнения

$$z'' = -\frac{9}{h^3}(Y-h)z + \varphi(x),$$

то $z(x)$ — неубывающая функция.

Вернемся к уравнению (11) и составим для него уравнение в вариациях, когда функция η приращения — Δ; так как при условии, что $\Delta=0$, интеграл (11) есть Y, для δY получим уравнение

$$\delta Y'' = -\frac{9}{h^3}\left(Y - h - \frac{1}{3}v\right)\delta Y + \frac{3\Delta}{h^2}.$$

Приравниваем интеграл этого уравнения к интегралу уравнения

$$\delta Y_1'' = -\frac{9}{h^3}(Y-h)\,\delta Y_1 + \frac{3\Delta}{h^2},$$

$$\delta Y(0) = \delta Y_1(0) = \delta Y'(0) = \delta Y_1'(0) = 0,$$

полагая

$$X = \delta Y - \delta Y_1,$$

получим

$$X'' = -\frac{9}{h^3}(Y-h)X + \frac{1}{3}v\delta Y.$$

При v, бесконечно малом, δY можно заменить неубывающей функцией δY_1, тогда в соответствии с приведенным выше будем иметь

$$X' \geqslant 0,$$

но, рассуждая, как выше, докажем монотонность интеграла уравнения

$$X'' = -\frac{9}{h^3}(Y-h-dh)X + \varphi(x),$$

$$\varphi(x) > 0,\ \varphi'(x) \geqslant 0,\ dh > 0.$$

Отсюда по индукции делаем вывод, что при любом $v > 0$ имеем $X' > 0$, что полностью доказывает лемму.

5. Оператор I и его вариация. Введем следующий дифференциальный оператор

$$I(\Gamma_0, \Gamma) = \left(\frac{h-v}{y}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{3} yy''\right) - C + \lambda (y + v + \eta). \tag{17}$$

Изучим вариацию этого оператора при переходе от линии Γ к ближайшей линии $\overline{\Gamma}$.

Лемма 2. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция $|f(x)| < vh^2$, $v \to 0$ при $h \to 0$ и вдоль линии Γ: $y = y(x)$, $y'(0) = 0$, $y(0) = h + \alpha$

$$I(\Gamma_0, \Gamma) = f(x), \tag{17'}$$

а вдоль линии $\overline{\Gamma}$: $y = \overline{y}(x)$, $\overline{y}'(0) = 0$, $\overline{y}(0) = y(0)$

$$I(\Gamma_0, \overline{\Gamma}) = \overline{f}(x).$$

причем

$$|\overline{f}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда при $0 \leqslant v < kh^2$, $0 \leqslant \eta < kh^2$ имеем

$$|\overline{y}(x) - y(x)| \leqslant \varepsilon \operatorname{ch} \frac{(3+\delta) x}{\sqrt{h}}, \tag{18}$$

где $\delta \to 0$ при $h \to 0$.

Доказательство. Действительно, учитывая (11), уравнение (17') можно представить в виде

$$y'' = \psi(y, v) + \mu(y) + \frac{3}{2} \frac{y}{(h-v)^2} f(x),$$

где $\mu(y)$ — непрерывная и дифференцируемая функция y, причем $\mu(y) = 0(\psi)$ и $\mu'(y) = 0(\psi')$ соответственно в окрестностях нулей ψ и нуля ψ'.

Полагая

$$\overline{f}(x) - f(x) = \varepsilon(x), \quad |\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \overline{y}(x) - y(x) = \varphi(x)$$

и составляя для (18) уравнение в вариациях, получим

$$\varphi'' = \left\{\psi' + \mu' + \frac{3}{2} \frac{f}{(h-v)^2}\right\} \varphi + \frac{k\varepsilon(x)}{h}$$

или, принимая во внимание выражение для ψ и условия относительно v и η,

$$\varphi'' = \frac{\theta}{h} \varphi + \frac{k\varepsilon(x)}{h}, \tag{19}$$

где θ удовлетворяет неравенству

$$-G - 0(h) \leqslant \theta \leqslant G + 0(h).$$

Отмечая, что для нашего случая $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = 0$ и наибольшее значение для φ'' получим, полагая в (9) $\theta = G + 0(G)$ и $\varepsilon(x) = \varepsilon$, путем интегрирования находим исходную оценку.

6. Вспомогательная задача. Сохраняя обозначения, принятые в п. 1, рассмотрим следующую задачу: пусть Γ_0: $y = y_0(x)$ такая, что $y_0(x)$ периодична с периодом 2ω, при $|x| \leqslant \omega$ допускает единственный максимум при $x = 0$, $y_0(-x) = y_0(x)$, кроме того,

$$|y_0(x) - v| < kh^3, \quad |y_0'(x)| < kh^{2+\nu}, \quad |y_0''(x)| < kh^{1+\nu}, \tag{20}$$

$$v < kh^2, \ \nu > 0.$$

Обозначим через Γ_0' линию $y=y_0(x)+\Delta$, где Δ — некоторая постоянная. Требуется определить линию Γ: $y=y(x)$

$$y(x+2\omega)=y(x), \ y(0)=h+\alpha$$

так, чтобы $y(\Gamma_0', \Gamma)=0$,
где α — заданное число, а число Δ подлежит определению, $\Delta=\Delta\{y_0\}$. Решение поставленной задачи обозначим

$$y(x)=H\{y_0(x)\}=H\{y_0\}.$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда числа C и λ определяются из (8), а число α принадлежит интервалу $h^2<\alpha<2h^2+0(h^2)$. Кроме того, рассмотрим решения поставленной задачи такие, чтобы H была четной и допускала при $x=0$ единственный максимум в интервале периода.

Полагая, что решение поставленной задачи существует и $|\Delta\{y_0\}|<$ $<kh^3$, установим ряд его свойств.

7. Оценки производных волновой линии. Пусть $y=y_0(x)$ — решение поставленной вспомогательной задачи. Займемся оценками для y', y'' и y'''. В силу (20) при условии $|\Delta\{y_0\}|<kh^3$ можем, не нарушая общности, дополнительно считать, что $\Delta\{y_0\}=0$.

Лемма 3. Имеем

$$|y'(x)|<\frac{\bar{k}h}{\log\frac{1}{h}},$$

где $\bar{k}$ — постоянная, зависящая только от введенных выше констант k.

Доказательство. Отметим, что в силу элементарной вариационной леммы из теории конформных отображений [2] имеем

$$|y(x)-h|>kh^2.$$

Обозначим через c максимальное значение $|y'(x)|$, и пусть

$$y'(x_0)=c.$$

С целью получения искомой оценки для c рассмотрим в точке $z_0=x_0+iy(x_0)$ производную по x функции

$$P=\log V=\log|f'(z_0, \Gamma_0', \Gamma)|.$$

В силу (1) в рассматриваемой точке имеем

$$\frac{dP}{dx}=\frac{\lambda c}{2V^2}=-\left(\frac{1}{h}+3h\right)\frac{c}{V^2}=-\frac{c}{h}+\theta c. \tag{21}$$

Оценим теперь эту же величину сверху, отправляясь от геометрических условий, наложенных на Γ_0 и Γ. С этой целью построим область A, ограниченную: 1) отрезком α касательной к Γ в точке $z_0=x_0+iy(x_0)$, заключенной между прямыми $y=h+kh^2$ и $y=h-kh^2$, 2) лучами прямых $y=$ $=h\mp kh^2$, что выходят из концов построенного выше отрезка, 3) отрезком α_0 прямой $y=kh^{2+\nu}(x-x_1)+v$ (где x_1 — абсцисса середины отрезка α), заключенным между прямыми $y=v\pm kh^3$, 4) лучами прямых $y=v\pm kh^3$, что выходят из концов отрезка α_0. Пусть $\zeta=f_1(z)$, $f_1(\pm\infty)=\pm\infty$ отображает A на полосу $v<\eta<h$ и $P_1=\log|f_1'(z)|$.

В силу указанной выше леммы можно видеть, что

$$\left[\frac{dP_1}{d\xi}\right]_{x=x_1}>\left[\frac{dP}{d\xi}\right]_{x=x_0}-\frac{dP}{dx}(1+\theta h). \tag{21'}$$

Пусть при отображении $\zeta=f_1(z)$ отрезку d соответствует отрезок $(-\xi_1, \xi_1)$, а отрезку d_0 — отрезок $(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$, очевидно,

$$\xi_1 = \theta\frac{h^2}{c}, \quad \xi_1^{(0)} = -\theta_1 h^{1-\nu}, \quad \xi_2^{(0)} = \theta_2 h^{1-\nu}.$$

Построим в полосе $v < \eta < h$ гармоническую функцию Q, равную c на отрезке $(-\xi_1, \xi_2)$ прямой $\eta=h$, равную $kh^{2+\nu}$ на отрезке $(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$ и равную нулю на остальной границе.

Имеем

$$(21'') \qquad \left|\frac{dP_1}{d\xi}\right|_{x=x_1} = \left|\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right|_{\substack{\xi=0\\ \eta=h}} < -\frac{c}{h} + \frac{kh^{1+\nu}}{h^2}\int_{-kh}^{kh}\frac{dt}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t}{h-v}+k} +$$

$$+\frac{\theta c}{h^2}\int_{\frac{kh^2}{c}}^{\infty}\frac{dt}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t}{h-v}} = -\frac{c}{h} + kh^{1+\nu} + \frac{\theta c}{h}\int_{\frac{kh}{c}}^{\infty}\frac{dt}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}t}.$$

Отсюда, сопоставляя (21), (21′) и (21″), получим

$$\int_{\frac{kh}{c}}\frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} < \theta h.$$

Значит,

$$\frac{kh}{c} > \theta\log\frac{1}{h},$$

что дает для c окончательную оценку.

Лемма 4. Имеем $|y''(x)| < kh$.

Доказательство. Будем вести вычисления в переменных ξ, η и в соответствии с этим для точек волновой линии и дна полагаем

$$\bar{y}(\xi)=y[x(\xi, h)], \quad \bar{y}_0(\xi)=y[x_0(\xi, v)],$$

где $x=x(\xi, \eta)$ есть действительная часть функции, обратной $f(z, \Gamma_0', \Gamma)$. Кроме того, введем сопряженные гармонические функции $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$:

$$P = -\log U = -\log|f'(z, \Gamma_0', \Gamma)|,$$

$$Q = -\arg f'(z, \Gamma_0', \Gamma).$$

В точках волновой линии имеем

$$(22) \qquad y'=\operatorname{tg} Q,$$

$$y'' = \frac{1}{V\cos^2 Q}\frac{\partial Q}{\partial\xi} = (1+\theta h)Q'.$$

Аналогично вдоль дна

$$(22') \qquad y_0'' = (1+\theta h)Q'.$$

Последние соотношения показывают, что Q' имеет тот же самый порядок, что и y''. Пусть ξ_1 — точка, в которой $|Q'|$ достигает абсолютного максимума; допустим для определенности, что

$$(23) \qquad Q'(\xi) = \frac{\partial Q(\xi, h)}{\partial\xi} \geqslant Q'(\xi_1).$$

Вычислим в точке (ξ_1, h) значение $\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2} = P''$. В соответствии с (1) имеем

$$P = -\frac{1}{2}\log(C-\lambda y)$$

или, заменяя C и λ их значениями из (8) и полагая

$$y=h+\tau h,\ |\tau|<kh,$$

получим

(24) $$P=\tau+kh^2+\theta\tau^2,$$

откуда

(25) $$P'=\frac{v}{h}y',$$

$$P''=\frac{v^2}{h}y''-\frac{2}{h^2}Vy'^2=(1+\theta h)\frac{Q_1'}{h}+\frac{k}{\log^2\frac{1}{h}}.$$

Эту же величину можем выразить через значение Q' по формуле Пуассона. Полагая $h-v=h_1$, получим

(26) $$P''=\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{Q_1'}{h}(1+\theta h)+\frac{\pi}{4}\frac{1}{h_1^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Q'-Q_1'}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_1}{h_1}}d\xi+$$

$$+\frac{k}{h_1^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(\xi,v)\,d\xi}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_1}{h_1}}+k.$$

Сопоставляя (25) и (26), покажем, что при $h\to 0$ $Q'\to 0$. Действительно, из этих уравнений, если принять во внимание (22′), (20), получается

(27) $$\frac{1}{h_1^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Q'-Q_1'}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_1}{h_1}}d\xi<\theta Q_1'+0(1)h.$$

Кроме того, в силу леммы 2 при $h\to 0$ $Q\to 0$. Отсюда, полагая $|Q|=\varepsilon$, можно видеть, что

(27′) $$\frac{1}{h_1^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Q'-Q_1'}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_1}{h_1}}d\xi>\frac{2Q_1'}{h_1^2}\int\limits_{\frac{\varepsilon h}{Q_1'}}^{\infty}\frac{d\xi}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{h_1}}=\frac{4Q_1'}{\pi h}\left(\operatorname{cth}\frac{\pi\varepsilon}{2Q_1'}-1\right).$$

Значит, исходя от противного, $Q_1'>K$,

$$\operatorname{cth}\frac{2\varepsilon}{2Q_1'}-1<kh$$

или

(28) $$Q_1'<\frac{\theta\varepsilon}{\log\frac{1}{h}},$$

что противоречит предположению.

Для получения искомой оценки воспользуемся выражением для P через функцию $\bar y(\xi)$. В соответствии с формулой Пуассона для полосы $0<\eta<h_1=h-v$ имеем

$$\frac{1}{V}-\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{1}{\cos Q}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{1}{\cos Q}=\frac{\bar y-\bar y_0}{h_1}\frac{1}{\cos\theta}+$$

$$+\frac{\pi}{4}\frac{1}{h^2\cos Q}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar y(t)-\bar y(\xi_0)-(t-\xi_0)\bar y'(\xi_0)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t-\xi_0}{h_1}}dt+kh^2.$$

Или в силу леммы 2, полагая $\bar{y}-\bar{y}_0=h_1+\tau h_1$,

$$\frac{1}{V}=1+\tau+\frac{\pi}{4h_1^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(t)\,dt}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t-\xi_0}{h_1}}+k\bar{y}(\xi_0)\,\bar{y}''(\xi_0)+\theta h^2, \tag{29}$$

где

$$\beta(t)=\bar{y}(t)-\bar{y}(\xi_0)-(t-\xi_0)\bar{y}'(\xi_0)-\tfrac{1}{2}(t-\xi_0)^2\bar{y}''(\xi_0).$$

А в силу (24) имеем

$$\frac{1}{V}=1+\tau+\theta h^2. \tag{30}$$

Допустим теперь от противного, что $\frac{1}{h}\bar{y}''(\xi_0)$ может быть как угодно большим, тогда из уравнений (29), (30) получим

$$\frac{1}{h^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(t)\,dt}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t-\xi_0}{h}}\geqslant Kh\bar{y}''(\xi_0). \tag{31}$$

При этом же предположении из (27), (22) получается, что

$$\frac{1}{h^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q-Q_1'}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t-\xi_0}{h_1}}\,dt\leqslant KQ_1'+0(1). \tag{32}$$

Для доказательства леммы остается показать, что (31), (32) и (23) противоречивы. Для этого, записав в (31) вместо функции δ функцию Q, имеем

$$\delta(t)=\int_0^t dt\int_0^t[\bar{y}''(t)-\bar{y}''(\xi_0)]\,dt=\int_0^t dt\int_0^t\left[\frac{1}{V}\frac{Q'}{\cos^2 Q}-\frac{1}{V_1}\frac{Q_1'}{\cos^2 Q_1}\right]dt=$$

$$=(1+\theta h)\int_0^t dt\int_0^t(Q'-Q_1')\,dt+\int_0^t dt\int_0^t\theta Q'(V-V_1)\,dt+$$

$$+\int_0^t dt\int_0^t\theta Q'(Q-Q_1)\,dt.$$

Отправляясь от предположения леммы 2 и неравенства (28), можно показать, что два последних слагаемых в выражении $\delta(t)$, представленные (31), дадут величины порядка $0(Q_1')$. Отмечая дополнительно, что порядки малости $\bar{y}''(\xi_0)$ и Q_1' одинаковые и полагая $Q'-Q_1'=\varphi(t+\xi_0)$, $\psi(t)=$ $=\int_0^t dt\int_0^t\varphi(t)\,dt$, получим следующие неравенства:

$$\frac{1}{h^2}\int_0^{\infty}\frac{\psi(t)\,dt}{\operatorname{sh}^2\frac{t}{h}}\geqslant KhQ_1', \tag{33}$$

$$\frac{1}{h^2}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{\operatorname{sh}^2\frac{t}{h}}=0(1), \tag{34}$$

$$0\leqslant\varphi(t)\leqslant 2Q_1'.$$

Интегрируя левую часть (34) дважды по частям, получим

$$\frac{1}{h^2}\int\limits_0^\infty \psi(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{t}{h}}\,dt = O(1)$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{t}{h}} > \frac{k}{h^2}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{t}{h}}.$$

Следовательно, в (33) окончательно получим $KhQ_1' < kh^2$, что дает искомое неравенство.

Лемма 5. В условиях леммы 4 имеем

$$|y'(x)| < kh^{3/2}.$$

Доказательство. Пусть $a = y'(x_0)$ — максимальное значение $y'(x)$. В силу леммы 3 имеем

$$y(x) - y(x_0) \geqslant a(x - x_0) - \frac{1}{2}\theta h(x - x_0)^2,$$

но по условию $|y(x) - y(x_0)| < \theta_1 h^2$, следовательно, при любом x

$$a(x - x_0) - \frac{1}{2}\theta h(x - x_0)^2 < \theta_1 h^2,$$

в частности, при $x = x_0 + \frac{a}{\theta h}$

$$\frac{a^2}{\theta h} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{\theta h} < \theta_1 h^2$$

или

$$a < \sqrt{2\theta\theta_1}\,h^{3/2}.$$

Лемма 6. Если дополнительно $y_0'' < kh^2$, то

$$|y'''(x)| < \frac{k}{\log\frac{1}{h}}. \tag{35}$$

Доказательство. Придерживаясь метода, приведенного при доказательстве леммы 3, найдем выражение для функции $P''' = \frac{\partial^3 P}{\partial \xi^3}$, получающееся, с одной стороны, из (24) и, с другой — из значения $Q'' = \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2}$.

В соответствии с (25) и леммами 3 и 4 имеем

$$P''' = \frac{V^3}{h}y''' + \frac{2VV'}{h}y'' - \frac{4V}{h^2}y'y'' - \frac{2V'}{h^2}y'^2 = (1 + \theta h)Q'' + kh^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

причем очевидно, что

$$y''' = (1 + \theta h)Q'' + kh^{\frac{3}{2}}.$$

Рассмотрим теперь точку ξ_1, в которой $|Q''|$ достигает абсолютного максимума. Пусть для определенности в этой точке достигает также абсолютного минимума функция $Q''(\xi)$

$$Q''(\xi) \geqslant Q''(\xi_1) = Q_1''.$$

В соответствии с формулой Пуассона в точке $[\xi_1, \bar{y}(\xi_1)]$ имеем

$$P''' = \frac{Q_1'''}{h_1} + \frac{\pi}{4}\frac{1}{h^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Q'' - Q_1''}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t-\xi_1}{h_1}}dt + \frac{k}{h^2}Q_1' \tag{37}$$

или, так как y_0'', а вместе с ней и $Q'(\xi, v)$ имеют порядок h^2, остаточный член ограничен, следовательно, из (36), (37) получаем

$$\frac{1}{h^2}\int\limits_{\xi_1}^{\infty}\frac{Q'' - Q_1''}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t-\xi_1}{h_1}}dt > \theta Q_1'' + k,$$

причем

$$0 \leqslant Q'' - Q_1'' < 2Q'',$$

а в силу леммы 3

$$|Q'| < kh.$$

Отсюда

$$\frac{1}{h_1^2}\int\limits_{\xi_1}^{\infty}\frac{Q'' - Q_1''}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t-\xi_1}{h_1}}dt > \frac{2Q_1''}{h_1^2}\int\limits_{\frac{kh}{Q_1''}}^{\infty}\frac{dt}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t}{h_1}}. \tag{38}$$

Таким образом, получим соотношение, аналогичное (27'), которое дает

$$Q_1'' < \frac{\theta}{\log\frac{1}{h}}.$$

8. Оценка производных вариаций волновой линии. Пусть даны две линии $\Gamma_0 : y = y_0(x)$ и $\bar{\Gamma}_0 : y = y_0(x) + \delta y_0(x)$, где $y_0(x)$ удовлетворяет условиям **п. 7** и леммы 6, а функция $\delta y_0(x)$ такая, что

$$\begin{gathered}|\delta y_0(x) - \varepsilon'| < \varepsilon_0,\\ |\delta y_0'(x)| < kh^{5/2},\\ |\delta y_0''(x)| < kh^2.\end{gathered} \tag{39}$$

Кроме того, линиям Γ_0 и $\bar{\Gamma}_0$ отвечают волновые линии $\Gamma : y = y(x) = H\{y_0(x)\}$ и $\bar{\Gamma} : y = y(x) + \delta y(x)$ с одинаковым периодом 2ω, которые удовлетворяют условиям, принятым в п. **7**, и такие, что

$$|\delta y(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \underset{\varepsilon_1 < \varepsilon}{\Delta}\{y_0(x)\} = 0, \quad |\Delta\{y_0 + \delta y_0\}| = 0. \tag{40}$$

Задачей четырех последующих лемм является получение оценок для найденных трех производных функций $\delta y(x)$. Ввиду того, что при дальнейших предположениях не используем симметрию $y(x)$, можем путем перенесения начала координат свести задачу оценки $|\delta y'|$, $|\delta y''|$, $|\delta y'''|$ к оценке этих же величин в какой-либо фиксированной окрестности точки $x=0$. По аналогии с предыдущим пунктом будем вести вычисления в переменных ξ, η, в соответствии с этим сведем данные условия к переменным ξ, η.

Пусть в силу конформных отображений $z = z(\xi) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta)$, $z = z_1(\zeta) = x_1(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta)$ областей $D(\Gamma_0, \Gamma) : D(\bar{\Gamma}_0, \bar{\Gamma})$ на полосу $0 < \eta < h_1$ между точками линий Γ, $\bar{\Gamma}$ и прямой $\eta = h$ устанавливается соответствие

$$\xi = \xi(x), \quad x = x(\xi); \quad \xi(0) = x(0) = 0;$$

$$\xi = \xi_1(x), \quad x = x_1(\xi); \quad \xi_1(0) = x_1(0) = 0,$$

а между точками линий Γ_0, $\bar{\Gamma}_0$ и прямой $\eta = v$ — соответствие

$$\xi = \xi^{(0)}(x), \quad x = x^{(0)}(\xi);$$

$$\xi = \xi_1^{(0)}(x), \quad x = x_1^{(0)}(\xi).$$

Имеем

$$\xi_1(x) - \xi(x) = \int_0^x \left(\frac{V_1}{\cos Q_1} - \frac{V}{\cos Q}\right) dx, \tag{41}$$

где Q и Q_1 — углы наклона кривых Γ и $\bar{\Gamma}$ относительно оси x, а V и V_1 — скорости движения жидкости в соответствующих точках Γ и $\bar{\Gamma}$. Оставляя в правой части (41) лишь главные члены, получим

$$\xi_1(x) - \xi(x) = \int_0^x \frac{V_1 - V}{\cos Q} dx - \int_0^x \frac{V \sin Q}{\cos^2 Q}(Q_1 - Q)\, dx.$$

Отмечая, что в силу (1) $|V_1 - V| < \frac{2\varepsilon}{h}$, а в силу леммы 4 $|\theta| < kh^{3/2}$, и интегрируя второй интеграл по частям, получим

$$|\xi_1(x) - \xi(x)| < \frac{k\varepsilon}{h} x + kh^{3/2} \int_0^x (Q_1 - Q)\, dx < \frac{k\varepsilon}{h} x + kh^{3/2}\varepsilon, \tag{41'}$$

$$|\xi_1(x) - \xi(x)| < \frac{k\varepsilon}{h} x + kh^{3/2}_{\max} |Q_1 - Q|\, x. \tag{41''}$$

Кроме того, $\frac{d\xi_1}{dx} = 1 + kh$. Поэтому

$$|\delta x(\xi)| = |x_1(\xi) - x(\xi)| < \frac{k\varepsilon}{h} \xi + kh^{3/2}\varepsilon, \tag{42}$$

а также

$$|\delta x(\xi)| < \frac{k\varepsilon}{h} \xi + kh^{3/2}_{\max} |Q_1 - Q| \xi. \tag{42'}$$

Аналогичной оценки для соответствия между прямой $\eta = 0$ и Γ_0 получить невозможно, для этого случая оценим

$$\sigma(\xi) = \int_0^\xi |x_1(\xi) - x(\xi)|\, d\xi.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $y_0(x) = v$ и $\varepsilon' = 0$, при этом условии, используя теорему 1′ работы [2], можно показать, что мажоранту для σ получим, если положим

$$\delta y_0(x) = \varepsilon_0 \text{ при } 0 < x < \xi,$$

$$\delta y_0(x) = -\varepsilon_0 \text{ при } x < 0 \text{ и } x < \xi.$$

Или, не изменяя порядка σ,

$$\delta y_0(x) = 0 \text{ при } |x| < \xi,$$

$$\delta y_0(x) = -\varepsilon \text{ при } x \geqslant \xi.$$

Однако в этом случае будем иметь

$$\delta x'(t) = \frac{k\varepsilon}{h} + \frac{k\varepsilon_0}{h^2} \int_\xi^\infty \frac{d\tau}{\operatorname{sh}^2 \frac{t - \tau}{h_1}}, \quad t < \xi.$$

Интегрируя дважды это равенство, окончательно получим

$$\sigma(\xi) = \int_0^\xi |\delta x(\xi)\, d\xi < \frac{k\varepsilon_1}{h}\xi^2 + \varepsilon_0\xi, \quad \eta = 0.$$

Путем дополнительного конформного отображения можно показать, что такая же оценка будет иметь место и в общем случае.

Положим для линий Γ и $\overline{\Gamma}$

$$y = y[x(\xi)] = \bar{y}(\xi),$$
$$y = y[x_1(\xi)] + \delta y[x_1(\xi)] = \bar{y}(\xi) + \delta\bar{y}(\xi).$$

Аналогично для линий Γ_0 и $\overline{\Gamma}_0$

$$y = y_0[x^{(0)}(\xi)] = \bar{y}_0(\xi),$$
$$y = y_0(x) + \delta y_0(x) = \bar{y}_0(\xi) + \delta\bar{y}_0(\xi).$$

Вследствие (41) и условия $|y'| < kh^{1/2}$ получаем

$$\delta\bar{y}(\xi) < \varepsilon + kh^{1/2}\varepsilon\xi.$$

Отправляясь от (41′), оценим $\int_a^\xi |\delta\bar{y}_0|\, d\xi$, $a \geqslant 0$. Имеем

$$(43) \qquad \int_a^\xi |\delta\bar{y}_0|\, d\xi \leqslant \int_a^\xi |\delta y_0|\, d\xi + \int_a^\xi |y_0'|\, |\delta x|\, d\xi \leqslant \varepsilon d\xi - a + |y_0'(\xi)|\, \sigma(\xi) +$$
$$+ \int_a^\xi |x' y_0''|\, \sigma(\xi)\, d\xi < \varepsilon d\xi - a + kh^{3/2}\varepsilon\xi^2.$$

Отметим, что

$$(44) \qquad |\delta\bar{y}'| < |\delta y'|\,(1 + \theta h) + kh\varepsilon\xi + kh^{1/2}\varepsilon.$$

Займемся теперь оценками $\delta y', \delta y''$ и $\delta y'''$.

Л е м м а 7. При $\varepsilon_0 < kh\varepsilon$ имеем

$$|\delta y'| = |y_1'(x) - y'(x)| < \frac{\bar{k}\varepsilon}{h \log \frac{1}{h}},$$

где $\bar{k}$ — постоянная, зависящая только от ранее введенных постоянных k.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $m(\xi)$ функцию, равную $2\varepsilon_1$ при $|\xi| < \frac{1}{k\sqrt{h}}$ и равную $2k\sqrt{h}\,\varepsilon\,|\xi|$ при $|\xi| \geqslant \frac{1}{k\sqrt{h}}$, а через $m_0\,|\xi|$—функцию, равную $2\varepsilon_0$ при $|\xi| < \frac{\varepsilon_0}{k\varepsilon} h^{-3/2}$ и равную $2kh^{3/2}\varepsilon\,\xi$ при остальных значениях ξ. В силу (42)

$$|\delta\bar{y}(\xi)| < m(\xi), \qquad \int_0^{|\xi|} |\delta\bar{y}_0(\xi)|\, d\xi < m_0(\xi)\xi.$$

Рассмотрим отрезок $|\xi| \leqslant \frac{1}{2x\sqrt{h}}$. Пусть функция $|\delta\bar{y}'(\xi)|$, рассмотренная на этом отрезке, достигает в точке a_1, $|a_1| \leqslant \frac{1}{2k\sqrt{h}}$, абсолютного максимума, для определенности это будет максимум для $\delta\bar{y}'(\xi)$. При этих условиях можно видеть, что на отрезке $\left[a_1, \frac{2\varepsilon}{\delta\bar{y}'(a_1)}\right]$ найдется точка a, которая обладает свойством: если проведем через точку $[a,\ \delta\bar{y}(a)]$ касательную L к линии $y=\delta\bar{y}(\xi)$, справа от a наша линия будет расположена ниже L, а слева — выше L; при этом в точке a будем иметь

(45)
$$q=\delta\bar{y}'(a)\geqslant\delta\bar{y}'(a_1),\ \delta\bar{y}''(a)=0.$$

Для получения требуемой оценки q выразим через q значение второй производной функции

$$\delta x(\xi)=x_1(\xi)-x(\xi).$$

В соответствии с (1) имеем

$$\delta x'(\xi)=\frac{\cos Q_1}{V_1}-\frac{\cos Q}{V}=-\frac{\cos Q}{V^2}\delta V-\frac{\sin Q}{V}\delta\theta+\ldots,$$

где

$$V=\sqrt{c-\lambda y},\ V_1=\sqrt{c-\lambda y_1},$$
$$\operatorname{tg}Q=\bar{y}'V,\quad \operatorname{tg}Q_1=\bar{y}_1'V_1,$$

причем в силу (8)

$$\delta V=-\frac{\delta y}{h}(1+\theta h),$$
$$\delta Q=\cos^2 Q\left\{V\delta y'+\bar{y}'\frac{\delta y}{h}(1+\theta h)\right\}.$$

Значит,

(46)
$$\delta x'(\xi)=\frac{\delta y}{h}+\bar{y}'\frac{\delta\bar{y}}{h}+\theta h\frac{\delta\bar{y}}{h}+\bar{y}'\delta\bar{y}'+\ldots$$

Отсюда, принимая во внимание (45), в точке a будем иметь

(47)
$$\delta x''(a)=\frac{\delta\bar{y}'(a)}{h}(1+\theta h)=\frac{q}{h}+\theta h.$$

Найдем теперь эту же величину, рассматривая $x(\xi)$ как граничное значение функции, сопряженной с функцией $\delta y(\xi,\ \eta)$. Имеем

(48)
$$\delta x''(a)=\left[\frac{\partial^2\delta y}{\partial\xi_0\partial\eta}\right]_{\substack{\xi=a\\ \eta=h_1}}.$$

Из формулы Пуассона непосредственно вытекает, что если функция δy справа (слева) от точки a получает положительные (отрицательные) приращения, то правая часть (48) уменьшается. Аналогично, если функция δy_0 справа (слева) от точки a получает положительное (отрицательное) приращение, то правая часть (48) также уменьшается. Таким образом, получим для $\delta x''(a)$ оценку снизу, если заменим в (48) функцию δy функцией $v(\xi,\ \eta)$, которая превосходит на прямой $\eta=h_1$ значение $\rho:\rho(\xi)=\delta\bar{y}(a)+q(\xi-a)$, когда ξ принадлежит интервалу $\gamma:|\delta\bar{y}(a)+q(\xi-a)|<m(\xi)$; $\rho=m(\xi)$, когда ξ правее γ, и $\rho=-m(\xi)$, когда ξ левее γ, а на прямой $\eta=0$ значение ρ такое, что $\int\limits_a^\xi\rho d\xi=m_0(\xi)(\xi-a)$ при $\xi>a$ и $\int\limits_a^\xi\rho d\xi=-m_0(\xi)(\xi-a)$ при $\xi<a$. Представим функцию v суммой

$$v(\xi,\ \eta)=v_1(\xi,\ \eta)+v_2(\xi,\ \eta),$$

где v_1 и v_2 — гармонические функции, определяемые условиями:

$$v_1(\xi,\ h_1)=v(\xi,\ h),\ v_1(\xi,\ 0)=0,$$
$$v_2(\xi,\ h_1)=0,\ v_2(\xi,\ 0)=v(\xi,\ 0).$$

В силу приведенных выше рассуждений в точке a имеем

$$\delta x''(a) > \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial^2 v_2}{\partial\xi\partial\eta}. \tag{49}$$

Для первого слагаемого по формуле Пуассона получим

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\xi}\right) \geqslant \frac{q}{h_1} + \frac{\pi}{h_2^2}\int\limits_{\frac{2\varepsilon_1}{q}}^{\infty} \frac{q - m'(\xi - a)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{h_1}}\,d\xi =$$

$$= \frac{q}{h_1} + \frac{\pi q}{h_1^2}\int\limits_{\frac{2\varepsilon_1}{q}}^{\frac{1}{k\sqrt{h}}-a} \frac{d\xi}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{h_1}} + \pi\frac{q - 2k\sqrt{h}\varepsilon}{h^2}\int\limits_{\frac{1}{k\sqrt{h}}-a}^{\infty}\frac{d\xi}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{h_1}}$$

или, принимая во внимание, что $q > \varepsilon$, и интегрируя, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial v_1}{\partial\xi} \geqslant \frac{q}{h} + \frac{kq}{h}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi\varepsilon_1}{qh} - 1\right]. \tag{50}$$

Применяя ту же формулу Пуассона для второго слагаемого в (49), интегрируя по частям и принимая во внимание (41″), получим

$$\left|\frac{\partial^2 v_2}{\partial\xi\partial\eta}\right| < \frac{k}{h^3}\int\limits_0^{\infty}\frac{m_0(\xi - a)\,|\xi - k\sqrt{h}|\,d\xi}{\operatorname{ch}^2\frac{\varepsilon}{h_1}} < \frac{k\varepsilon_0}{h^{\frac{3}{2}}} + kh\varepsilon. \tag{51}$$

Сопоставляя (47), (49), (50) и (51), получим

$$\frac{q}{h}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi\varepsilon}{qh} - 1\right] - Qq - \frac{k\varepsilon_0}{h^{3/2}}.$$

Следовательно, или

$$q < \frac{k\varepsilon_0}{h^{3/2}},$$

или

$$\operatorname{cth}\frac{\pi\varepsilon}{qh} - 1 < \theta h,$$

т. е.

$$q < \frac{k\varepsilon}{h\log\frac{1}{h}}.$$

Искомую оценку получим, если воспользуемся дополнительно (43).

Лемма 8. При $\varepsilon > \frac{\theta\varepsilon_0}{h^{3/2}}$ имеем

$$|\delta y''| = |y_1''(x) - y''(x)| < \frac{k\varepsilon}{h}. \tag{52}$$

Доказательство. Перейдем прежде всего от вариации $\delta y''$ к вариации $\delta\bar{y}''$. В соответствии с (41), (46) и (47) имеем

$$\delta\bar{y}' = y'(x_1)x_1' - y'(x)x' + \delta y' x_1', \tag{53}$$

$$\delta\bar{y}'' = y''(x_1)x_1'^2 - y''(x)x'^2 + y'(x_1)x_1'' + \delta y' x_1'' - y'(x)x'' + \delta y'' x_1'^2 =$$

$$= y''' x'^2\delta x + 2y'' x'\delta x' + y'' x''\delta x + y'\delta x'' + \delta y' x_1'' + \delta y'' x_1'^2 \ldots$$

Отсюда, принимая во внимание (41) и леммы 2—6, получим

$$\delta\bar{y}'' = (1+\theta h)\,\delta y'' + \frac{k\varepsilon}{h\log\frac{1}{h}}.$$

Тем самым задача сводится к оценке $\delta\bar{y}''$.

Придерживаясь способа, приведенного при доказательстве леммы 6, рассмотрим функцию $\delta\bar{y}''$ на отрезке $[-\xi_1, \xi_1]$, $\xi_1 = k\sqrt{h}$ и обозначим через a_1 точку, в которой $|\delta\bar{y}''|$ достигает абсолютного максимума, пусть при этом в a достигается максимум для $\delta\bar{y}''$ и этот максимум не меньше, чем $\frac{k\varepsilon}{h}$. В таком случае видно, что на отрезке $\left[a_1, a_1+\sqrt{\frac{h}{k}}\right]$ найдется точка a такая, что при любом ξ будем иметь

$$-u(\xi) = \delta\bar{y}(\xi) - \delta\bar{y}(a) - \delta\bar{y}'(a)(\xi-a) - \frac{1}{2}\delta\bar{y}''(a)(\xi-a)^2 > 0,$$

кроме того,

$$q = \delta\bar{y}''(a) \geqslant \delta\bar{y}''(a_1).$$

Выразим теперь $\delta x'(a)$ через значения $\delta\bar{y}(\xi)$ и $\delta\bar{y}_0(\xi)$. С этой целью обозначим соответственно через $v_1(\xi, \eta)$ и $v_2(\xi, \eta)$ гармонические функции, определяемые граничными условиями

$$v_1(\xi, h) = \delta\bar{y}(\xi),\ v_1(\xi, 0) = 0,$$

$$v_2(\xi, h) = 0,\ v_2(\xi, 0) = \delta\bar{y}_0(\xi).$$

Имеем

(54) $$\delta x'(a) = \left[\frac{\partial v_1}{\partial\eta}\right]_{\substack{\xi=a\\ \eta=h}} + \left[\frac{\partial v_2}{\partial\eta}\right]_{\substack{\xi=a\\ \eta=h}}.$$

Используя интеграл Пуассона, получим

(55) $$\frac{\partial v_1}{\partial\eta} = \frac{\delta\bar{y}}{h} \frac{\pi}{4h^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta\bar{y}''(a)(\xi-a)^2}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-a}{h}}\,d\xi - \frac{\pi}{h^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)\,d\xi}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-a}{h}} =$$

$$= \frac{\delta\bar{y}}{h} + khq - \frac{\pi}{h^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)\,d\xi}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-a}{h}}.$$

При $|\varepsilon_1| < \theta\sqrt{h}$ в соответствии с (43) получим

(56) $$\left|\frac{\partial v_2}{\partial\eta}\right| < \frac{\theta}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_0|\xi| + kh^{3/2}\varepsilon\xi^2}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-a}{h}}\,d\xi < \theta\varepsilon.$$

Сопоставим (46), (54), (55) и (56). Согласно (46) и лемме 6,

(57) $$\delta x'(a) = \frac{\delta(\bar{y})}{h} + \theta\varepsilon.$$

Если от противного

$$q > \frac{K\varepsilon}{h},$$

где K выбирается достаточно большим в зависимости от k, θ, и если

$$\varepsilon_0 < \theta h\varepsilon_1,$$

то в силу (54, (55) и (56) получим

$$\delta x'(a) = \frac{\delta \bar{y}}{h} + Kk\varepsilon \frac{\theta}{h^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)\, d(\xi)}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{\xi - a}{h}}. \tag{58}$$

Следовательно, приравнивая (57), (58), получим

$$\frac{1}{h^2} \int\limits_{-\infty}^{a} \frac{u(\xi)\, d(\xi)}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{\xi - a}{h}} > \theta h q. \tag{59}$$

Для того, чтобы прийти отсюда к противоречию, займемся вычислением $\delta x'''(a)$. Дифференцируя (46) и отмечая, что $\delta \bar{y}'''(a)=0$, получим

$$\delta x'''(a) = \frac{q}{h}(1 + \theta h) + \frac{\theta\varepsilon}{h \log \frac{1}{4}}. \tag{60}$$

Выразим эту же величину через значения $\delta \bar{y}''(\xi)$ и $\delta \bar{y}_0''(\xi)$ по формуле Пуассона. Пользуясь введенными выше функциями $v_1(\xi, \eta)$ и $v_2(\xi, \eta)$, получим

$$\delta x'''(a) = \left[\frac{\partial^3 v_1}{\partial \eta \partial \xi^2}\right]_{\substack{\xi=a\\ \eta=h}} + \left[\frac{\partial^3 v_2}{\partial \eta \partial \xi^2}\right]_{\substack{\xi=a\\ \eta=h}}. \tag{61}$$

Для первого слагаемого имеем

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} = \frac{h}{q} + \frac{\pi}{2h^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u''(\xi)\, d\xi}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{\xi - a}{h}}, \tag{62}$$

а для второго, используя (43), получаем

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial v_2}{\partial \eta}\right| < \frac{\theta\varepsilon}{h^5} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi - a| + kh^{3/2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\xi - a}{h}}\, d\xi < \frac{\theta\varepsilon}{h^{3/2}}. \tag{63}$$

Предполагая, что q велико по сравнению с ε/h и используя условие

$$\varepsilon_0 < Qh^{3/2}\varepsilon,$$

из сопоставления (60), (61), (62) и (63), получим

$$\frac{1}{h^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u''(\xi)\, d\xi}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{\xi - a}{h}} < \frac{1}{K} \frac{q}{h}, \tag{64}$$

где K можно взять сколь угодно большим. Интегрируя (64) дважды по частям, получим

$$\frac{\theta}{h^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)\, d\xi}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{\xi - a}{h}} < \frac{hq}{K},$$

что при больших K противоречит (59).

Из доказанного непосредственно вытекает следующее уточнение леммы 6.

Л е м м а 9. В условиях леммы 7 имеем

$$|\delta y'| = |y_1'(x) - y'(x)| < \frac{\bar{k}\varepsilon}{h^{1/2}}. \tag{65}$$

Лемма 10. При $\varepsilon_0 < kh^2\varepsilon$

(66) $$|\delta y'''| = |y_1'''(x) - y'''(x)| < \frac{\bar{k}\varepsilon}{h^2 \log\frac{1}{h}}.$$

Доказательство. Для того, чтобы иметь возможность вести вычисление в переменных ξ, η, найдем оценку для $Q''' = \frac{\partial^3 Q}{\partial \xi^3}$ при $\eta = h$. Отправляясь от (24), (25) и имея оценки для Q, Q' и Q'', можно видеть, что $|P''| < k$, $|P'''| < \frac{k}{h\log\frac{1}{h}}$ и $Q''' = \bar{y}^{\mathrm{IV}}(1+\theta h)$, отсюда, принимая во внимание (24), получим

(67) $$P^{\mathrm{IV}} = \frac{\theta Q'''}{h}.$$

Учитывая, что функция $\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}$ является сопряженной к функции $\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2}$, при $\eta = h$ имеем

$$Q''' = \frac{\partial P''}{\partial\eta}.$$

Построим гармонические функции P_0'' и P_1'':

$$P_0'' = \begin{cases} P'' & \text{при} \quad \eta = h, \\ 0 & \text{при} \quad \eta = 0; \end{cases}$$

$$P_1'' = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \eta = h, \\ P'' & \text{при} \quad \eta = 0. \end{cases}$$

Очевидно, имеем

(68) $$Q''' = \frac{\partial P_0''}{\partial\eta} + \frac{\partial P_1''}{\partial\eta}.$$

Обозначим через ξ_0 точку, в которой $|Q'''|$ достигает абсолютного экстремума, и оценим каждое из слагаемых справа отдельно. Имеем

(69) $$\left|\frac{\partial P_0''}{\partial\eta}\right| < \frac{(P''\xi_0)}{h} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{h^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P''(\xi) - P''(\xi_0) - (\xi-\xi_0)P'''(\xi_0)}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_0}{h}}\,d\xi + \\ + \frac{\pi}{2}\frac{1}{h^2}\int\limits_{|\xi-\xi_0|>a} \frac{(\xi-\xi_0)P'''(\xi_0)\,d\xi}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_0}{h}}.$$

Последний интеграл, очевидно, равен нулю при любом $a > 0$. Отмечая, что

(70) $$|P''(\xi) - P''(\xi_0)| < k,$$

положим

$$a = \sqrt{\frac{kh}{Q'''(\xi_0)}},$$

тогда (69) можно переписать в виде

(71) $$\left|\frac{\partial P_0''}{\partial\eta}\right| < \frac{k}{h} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{h^2}\int\limits_{\xi_0-a}^{\xi_0+a} \frac{|P^{\mathrm{IV}}|(\xi-\xi_0)^2}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_0}{h}}\,d\xi + \\ + \frac{\pi}{2}\frac{k}{h^2}\int\limits_{|\xi-\xi_0|>a} \frac{d\xi}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_0}{h}} < \frac{k}{h} + k\sqrt{\frac{Q'''(\xi_0)}{h}}.$$

Перейдем к оценке второго слагаемого в (68). Имеем

$$\frac{\partial P_1'''}{\partial \eta} = \frac{k}{h^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P''(\xi, 0) - d\xi}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_0}{h}+k} = \frac{k}{h^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\xi_1, 0) - P'(\xi_0, 0)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_0}{h}}. \tag{72}$$

Оценим $|P'(\xi, 0) - P'(\xi_0, 0)|$, рассматривая P как функцию, сопряженную с Q,

$$P'(\xi, 0) = \frac{1}{h}\{Q(\xi, h) - Q(\xi, 0)\} +$$

$$+ \frac{\pi}{2}\frac{1}{h^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(t, 0) - Q(\xi, 0) - (t-\xi)Q'(\xi, 0)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t-\xi}{h}}dt +$$

$$+ \frac{\pi}{2}\frac{1}{h^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(t, h) - Q(\xi, h) - (t-\xi)Q'(\xi, h)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{t-\xi}{h}+k}dt.$$

Следовательно, принимая во внимание явные оценки для Q и их производных, получим

$$|P'(\xi, 0) - P'(\xi_0, 0| < k\,|\xi-\xi_0| + kh,$$

но тогда (72) даст

$$\left|\frac{\partial P_1''}{\partial \eta}\right| < \frac{k}{h}. \tag{73}$$

Сопоставляя теперь (63), (71) и (73), получим

$$Q'''(\xi_0) < \frac{k}{h} + k\sqrt{\frac{Q''(\xi_0)}{h}},$$

что окончательно дает

$$|Q'''| < \frac{k}{h}. \tag{74}$$

В силу ранее полученных оценок $\delta Q''$ можно представить в таком виде

$$\delta Q'' = \delta y''' + \frac{k\varepsilon}{h\log\frac{1}{h}} + Q'''\delta x,$$

отсюда, принимая во внимание (42), (74), получим

$$|\delta y'''| = |\delta Q''| + \frac{k\varepsilon}{h^2}(Qh + \xi). \tag{75}$$

Значит, для наших целей достаточно доказать, что

$$|\delta Q''| < \frac{k\varepsilon}{h^2\log\frac{1}{h}}. \tag{76}$$

Предположим от противного, что на отрезке $|\xi| < k\sqrt{y}$ найдется точка, в которой

$$|\delta Q''| > \frac{K\varepsilon}{h^2\log\frac{1}{h}},$$

где K велико вместе с $\frac{1}{h}$, но тогда, согласно лемме 7, $|\delta Q'| < \frac{\theta\varepsilon}{h}$, в интервале $|\varepsilon| < 2k\sqrt{h}$ найдется точка ξ_0 такая, что

$$|\delta Q''(\xi_0)| > -\frac{K\varepsilon}{h^2 \log \frac{1}{h}}, \quad \delta Q'''(\xi_0) = 0,$$

при этом или

$$\delta Q'(\xi) \begin{cases} \leqslant \delta Q'(\xi_0) + \delta Q''(\xi_0)(\xi - \xi_0), & \xi > \xi_0, \\ \geqslant \delta Q'(\xi_0) + \delta Q''(\xi_0)(\xi - \xi_0), & \xi < \xi_0, \end{cases}$$

или

$$\delta Q'(\xi) \begin{cases} \geqslant \delta Q'(\xi_0) + \delta Q''(\xi_0)(\xi - \xi_0), & \xi > \xi_0, \\ \leqslant \delta Q'(\xi_0) + \delta Q''(\xi_0)(\xi - \xi_0), & \xi < \xi_0. \end{cases}$$

Остановимся для определенности на первом случае. В силу (24)

(77) $$\delta P''' = \frac{\delta \bar{y}'''}{h}(1 + \theta h) = \frac{\delta Q''}{h}(1 + \theta h) + \frac{k\varepsilon}{h \log \frac{1}{h}}$$

или, полагая $q = \delta Q''(\xi_0)$ и принимая во внимание (75),

$$\delta P''' = \frac{q}{h}(1 + \theta h).$$

Найдем $\delta P'''$, рассматривая $\delta P''$ как функцию, сопряженную с $\delta'' Q$. Имеем

(78) $$\delta P'''(\xi_0) = \frac{\partial}{\partial \eta} \delta Q''.$$

Построим в полосе $0 < \eta < h$ гармонические функции $u_1(\xi, \eta)$ и $u_0(\xi, \eta)$ с граничными условиями:

$$u_1(\xi, h) = \int_0^\xi \delta Q(\xi, h)\, d\xi, \quad u_1(\xi, 0) = 0,$$

$$u_2(\xi, h) = 0, \quad u_2(\xi, 0) = \int_0^\xi \delta Q(\xi, 0)\, d\xi.$$

В соответствии с (78) имеем

(79) $$\delta P'''(\xi_0) = \frac{\partial u_1'''}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^3 u^2}{\partial \xi^3}.$$

Оценим отдельно каждое из слагаемых в правой части (79).

Для первого слагаемого имеем

(80) $$\frac{\partial u_1'''}{\partial \eta} = \frac{q}{h} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q - \delta Q''}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{\xi - \xi_0}{h}}\, d\xi.$$

В соответствии с рассуждениями, которые неоднократно использовались выше, и принимая во внимание, что $|\delta Q'| < \frac{k\varepsilon}{h}$, наименьшее значение для интеграла правой части (80) получим, если положим $\delta Q'' = q$ при $|\xi - \xi_0| < \frac{k\varepsilon_1}{qh}$ и $\delta Q'' = 0$ при остальных значениях ξ. Таким образом,

(81) $$\frac{\partial u_1'''}{\partial \eta} \geqslant \frac{q}{h} + \frac{\pi q}{h^2} \int_{\frac{\varepsilon}{qh}}^{\infty} \frac{d\xi}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{h}} = \frac{q}{h} + \frac{2q}{h}\left[\operatorname{cth} \frac{\varepsilon}{qh^2} - 1\right].$$

Займемся другим слагаемым в (79.) Имеем

$$\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial^3 u_2}{\partial\xi^3}\right| < \frac{k}{h^5}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|u_2(\xi,0)|\,d\xi}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_0}{h}+k} = \frac{\theta}{h^6}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\int\limits_{\xi_0}^{\xi}|u_2|\,d\xi}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi-\xi_0}{h}+k}. \tag{82}$$

Получим оценку $\int\limits_{\xi_0}^{\xi}|u_2|\,d\xi$. В соответствии с заданием u_2, полагая $\xi_0 \geqslant 0$, имеем

$$v = \int\limits_{\xi_0}^{\xi}|u_2|\,d\xi \leqslant \int\limits_{0}^{\xi}|u_2|\,d\xi = \int\limits_{0}^{\xi}d\xi\left|\int\limits_{0}^{\xi}\delta Q(\xi,0)\,d\xi\right|.$$

Для дальнейшего вычисления считаем, что при сохранении только главных членов имеем

$$\bar{y}' = \mathrm{tg}\, Q e^{P} = Q + QP,$$

$$\delta\bar{y}' = \delta Q(1+P) + Q\delta P,$$

$$\delta\bar{y}'(\xi)\,\delta\bar{y}(0) = u_2 + \int\limits_{0}^{\xi}P\delta Q\,d\xi + \int\limits_{0}^{\xi}Q\delta P\,d\xi$$

или

$$v \leqslant \int\limits_{0}^{\xi}|\delta\bar{y}(\xi) - \delta\bar{y}(0)|\,d\xi + \int\limits_{0}^{\xi}d\xi\left|\int\limits_{0}^{\xi}P\delta Q\,d\xi\right| + \int\limits_{0}^{\xi}d\xi\left|\int\limits_{0}^{\xi}Q\delta P\,d\xi\right|.$$

Для последних двух интегралов, считая, что $|Q(\xi,0) < kh^{5/2}$ и $|Q'(\xi,0)| < < kh^2$, имеем

$$\int\limits_{0}^{\xi}d\xi\left|\int\limits_{0}^{\xi}P\delta Q\,d\xi\right| \leqslant \int\limits_{0}^{\xi}|Pv|\,d\xi + \int\limits_{0}^{\xi}d\xi\int\limits_{0}^{\xi}|P'v|\,d\xi < kh^{1/2}v,$$

$$\int\limits_{0}^{\xi}d\xi\left|\int\limits_{0}^{\xi}Q\delta P\,d\xi\right| \leqslant \int\limits_{0}^{\xi}|Q|\,d\xi\left|\int\limits_{0}^{\xi}\delta P\,d\xi\right| + \int\limits_{0}^{\xi}d\xi\left|\int\limits_{0}^{\xi}Q''\,d\xi\int\limits_{0}^{\xi}\delta P\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant kh^{5/2}\int\limits_{0}^{\xi}|\delta x|\,d\xi + kh^2\int\limits_{0}^{\xi}d\xi\int\limits_{0}^{\xi}|\delta x|\,d\xi \leqslant kh^{5/2}\varepsilon\xi^2 + kh^{5/2}\varepsilon_0|\xi| +$$

$$+ kh\varepsilon|\xi|^3 + kh^2\varepsilon_0\xi^2.$$

Значит, с учетом (42′) и условия $|\xi_0| < k\sqrt{h}$

$$v < k\varepsilon_0|\xi| + kh^{5/2} + kh^2|\xi-\xi_0| + kh^{3/2}|\xi-\xi_0|^2 + kh|\xi-\xi_0|^3.$$

Подставляя найденное выражение для v в (82), окончательно получаем

$$\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial^3 u_2}{\partial\xi^3}\right| < k\varepsilon_0 h^{-9/2} + k\varepsilon h^{-5/2} < k\varepsilon h^{-5/2}. \tag{83}$$

Сопоставляя (79), (81) и (83), получим

$$\delta P'''(\xi_0) > \frac{q}{h} + \frac{2q}{h}\left[\mathrm{cth}\frac{\varepsilon}{qh^2} - 1\right] - k\varepsilon h^{-5/2}.$$

Сравнивая это неравенство с (77) и принимая во внимание (75), найдем

$$\mathrm{cth}\frac{\varepsilon}{qh^2} - 1 < \theta h + \frac{h^{1/2}}{K}\log\frac{1}{h} < kh^{1/2}$$

или

$$q < \frac{k\varepsilon}{h^2\log\frac{1}{h}},$$

что противоречит (75).

9. Оценка производной остаточного члена. Отправляясь от полученных выше оценок вариаций производных волновой линии, оценим вариацию остаточного члена в приближенной формуле (2) при переходе от данной волны к волне бесконечно близкой. Используя обозначения (1), (17), положим

$$R=I(\Gamma_0,\ \Gamma)-I(\Gamma_0,\ \Gamma)=|f'(z_1,\ \Gamma_0,\ \Gamma)|-|f'(z_1,\ z_1)+ky'^2+z. \tag{84}$$

Обозначим функцию $F(z)$ $(F(\pm\infty)=z_1)$, $F(\pm\infty)=z_1)$, которая реализует конформное отображение области $D(\Gamma_0,\ \Gamma)$ на область $D(C_0,\ C)$ при соответствии бесконечно удаленных точек $D(\Gamma_0,\ \Gamma)$ угловым точкам луночки $D(C_0,\ C)$. За C_0 принята прямая, которая параллельна оси x и проходит через точку z_0. Очевидно, имеем

$$f'(z_1,\ \Gamma_0,\ \Gamma)=f'(z_1,z_1F'(z_1))$$

или, сохраняя лишь главные члены,

$$|f'(z_1,\ \Gamma_0,\ \Gamma)|=|f'(z_1,\ z_1)|^2+2|f'(z_1,\ z_1)|^2\log|F'(z_1)|,$$

отсюда

$$R=2|f'(z_1,\ z_1)|^2\log|F'(z_0)|+ky'^2+r. \tag{85}$$

Л е м м а 11. В условиях леммы 10 имеем

$$|\delta R|<\frac{\bar{k}\varepsilon}{\log\frac{1}{h}}, \tag{86}$$

где $\bar{k}$ — постоянная, зависящая только от постоянных k, фигурирующих в условиях лемм 7—10.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с (85) имеем

$$\delta R=k\frac{\delta|F'|}{|F'|}+4|f'|\log|F|\,\delta|f'|+ky'\delta y'+\delta r, \tag{87}$$

причем вариацию будем рассматривать при фиксированном значении $x=x_1$, $|x_1|<k\sqrt{h}$. В соответствии с полученными выше оценками три последних члена в (87) будут иметь порядок $h\varepsilon$, значит, достаточно оценить первый член. Обозначим через $\bar{C}$ контур, который проходит через точку $\bar{z}_1=x_1+i[y(x_1)+\delta y(x_1)]$ и касается $\bar{\Gamma}$ в этой точке, а через C_0 — прямую, которая параллельна оси x и отстоит от C_0 на расстоянии $\delta y_0(x_1)$

$$|\delta y_0(x_1)|\leqslant\varepsilon'+\varepsilon_0.$$

Отобразим конформно область $D(\bar{C}_0,\ \bar{C})$ на область $D(C_0,\ C)$ при условии соответствия угловых точек, а также точек z_1, $\bar{z}_1$. Пусть при этом линия $\bar{\Gamma}$ перейдет в линию γ, а линия $\bar{\Gamma}_0$ — в линию γ_0. Отобразим конформно $z'=y(z)$, $\varphi(\pm\infty)=\pm\infty$, $\varphi(z_1)=z_1$ область $D(\Gamma_0,\ \Gamma)$ на область $D(\gamma_0,\ \gamma)$. В силу элементарного правила дифференцирования сложных функций получим

$$\frac{\delta|F'|}{|F'|}=\log|\varphi'(z_1)|. \tag{88}$$

Обозначим $\rho=\rho(x)$ и $\rho_0=\rho_0(x)$ соответственно разности ординат точек линий γ, Γ и γ_0, Γ_0. Оценим отдельно каждую из этих функций. С этой целью обозначим через $u(x)$, $u_0(x)$ разности ординат точек C, Γ и C_0, Γ_0, а через $\bar{u}(x)$ и $\bar{u}_0(x)$ — разности ординат точек $\bar{C}$, $\bar{\Gamma}$ и $\bar{C}_0$, $\bar{\Gamma}_0$. В силу леммы 9 имеем

$$|\bar{u}(x)-u(x)|<\frac{k\varepsilon}{h^2\log\frac{1}{h}}|x-x_1|^3$$

и по условию

$$|\bar{u}_0(x) - u_0(x)| < \varepsilon_0 < kh^2\varepsilon.$$

Отсюда, принимая во внимание леммы 7, 8, получим

$$\rho = \bar{u}(x) - (1+\mu)\ u\ (x+\nu x),$$

где $|\mu|$ и $|\nu|$ не превышают $\frac{k\varepsilon}{h}$, т. е.

$$|\rho| < \frac{k\varepsilon}{h^2 \log \frac{1}{h}} |x - x_1|^3 + \frac{\varepsilon}{h} u + \frac{\varepsilon}{h} u' |x - x_1|,$$

или, отмечая, что $u = \iiint y''' dx^3$, и используя лемму 5,

$$|\rho| < \frac{k\varepsilon}{h^2 \log \frac{1}{h}} |x - x_1|^3.$$

Совершенно аналогично для функции $\rho_0(x)$ получим

$$|\rho_0| = |\bar{u}_0(x) - (1+\mu)\, u_0(x + \delta x)| < \varepsilon_0 + \mu |u_0| + k u_0' |\delta x|,$$

где функция δx в силу соотношения (41') удовлетворяет неравенству

$$\int_{x_1}^{x} |\delta(x)|\, dx < \frac{k\varepsilon}{h}(x - x_1)^2 + k\varepsilon_0 |x - x_1|.$$

Воспользуемся теперь формулой Пуассона. В соответствии с определением функции $y(z)$ будем иметь

$$|\log |\varphi'(z_1)|| < \frac{k}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\rho|\, dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{x - x_1}{h}} + \frac{k}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\rho_0|\, dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{x - x_1}{h} + k} < \frac{k\varepsilon}{\log \frac{1}{h}}.$$

10. Непрерывность оператора $H\{y_0\}$ и функционала $\Delta\{y_0\}$. Вернемся к основной задаче, сформулированной в п. 6. Допустим, что для некоторого класса линий с периодом 2ω, $\{y_0(x)\}$ решение этой задачи $y = y(x) = H\{y_0\}$, $y(0) = h + \alpha$ существует. В этом пункте покажем, что это решение непрерывно зависит от $y_0(x)$, а также установим степень этой непрерывности.

Л е м м а 12. Пусть $|\delta y_0(x)| < \varepsilon_0$, $\Delta\{y_0\} = 0$ и пусть $y_0(x)$ удовлетворяет условиям п. 8 и такое, что

(89) $$|Y_0(x) - y_0(x)| < \nu h^3,$$

где ν стремится к нулю вместе с h, а при $\eta = Y_0(x) - h$ уравнение (11) имеет интегралом функцию $Y(x, \alpha)$, обозначенную в п. 4, причем $2h^2 > \alpha > 2h - \mu$, $\lim \mu = 0$; тогда при ε_0, достаточно малом, получим

(90) $$|\delta H\{y_0\}| = |\{y_0 + \delta y_0\} - H\{y_0\}| < \frac{k\varepsilon_0}{h^2},$$

(90') $$|\delta\Delta\{y_0\}| < \frac{k\varepsilon_0}{h}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем прежде всего, что при $|x| < k\sqrt{h}$ имеем

(91) $$|Y - y| < k\nu h^2.$$

Действительно, вдоль линии $\Gamma : y = (x)$

$$I(\Gamma_0,\ \Gamma) = I(\Gamma_0,\ \Gamma) + R = 0,$$

но в соответствии с (5) и леммой 6

$$|R| < \frac{kh^2}{\log \frac{1}{h}},$$

откуда, применяя лемму 2, при $|x| < k\sqrt{h}$ получим искомое неравенство.

Отсюда, принимая во внимание отмеченные в п. 4 свойства функции $Y(x, \alpha)$ при α, близких к $2h^2$, для функции $y(x)$ при $x\sqrt{h} < x < \omega$ имеем

(92) $$y(x) < h - \theta h^2, \; 0 < \theta < 1.$$

Докажем теперь, что если

$$|\Delta| > \frac{k\varepsilon_0}{h},$$

то

(93) $$|\delta y| < \frac{k\,|\Delta|}{h}.$$

Возьмем для определенности $\Delta < 0$ и допустим от противного, что

$$|\delta y| > \frac{K\,|\Delta|}{h},$$

где K может быть взято как угодно большим. Обозначим через k_0 точку, в которой $|\delta y|$ достигает наибольшего значения, и рассмотрим отдельно два случая: а) $x_0 < k\sqrt{h}$, б) $x_0 \geqslant k\sqrt{h}$.

Начнем с первого случая.

Пусть $|\delta y(x_0)| = \frac{K_0\,|\Delta|}{h}$, $K_0 \geqslant K$. В точке x_0 имеем

(94) $$\delta J = \delta I + \delta R = 0,$$

причем в соответствии с леммой 2

(95) $$|\delta I| > \frac{K_0 - K}{h}\,|\Delta|,$$

а в соответствии с леммой 11

(96) $$|\delta R| < \frac{k\,|\delta y(x_0)|}{\log \frac{1}{h}} = \frac{kK_0\,|\Delta|}{h \log \frac{1}{h}}.$$

Сравнивая (94), (95) и (96), приходим к противоречию.

Рассмотрим теперь случай б), когда $x_0 \geqslant k\sqrt{h}$. Допустим для определенности, что $\delta y(x_0) = |\delta y(x_0)| = \frac{K_0\,|\Delta|}{h}$. Как и в случае а), имеем соотношение (94). Оценим в точке x_0 δI. В силу (92) и условия

$$\delta y''(x_0) \leqslant 0$$

найдем

$$\delta I < \frac{6K_0\theta - k}{h}\,\Delta,$$

что противоречит соотношениям (94), (96). Случай, когда в точке x_0 $\delta y(x_0) < 0$, рассматривается совершенно аналогично. Этим самым неравенство (93) полностью доказано. Если $|\Delta| < \frac{k\varepsilon_0}{h}$, то аналогичными рассуждениями покажем, что $|\delta y| < \frac{k\varepsilon_0}{h^2}$. Значит, остается оценить $|\Delta|$. Ограничимся снова случаем $\Delta = -\Delta_1 < 0$. Допустим от противного, что

$$\Delta_1 > \frac{k\varepsilon_0}{h},$$

где K как угодно велико. По условию вдоль кривых $\Gamma_0 : y=y_0(x)$ и $\Gamma : y=y(x)$ имеем

$$I(\Gamma_0,\ \Gamma)+R=0,$$

а вдоль кривых Γ_0 : $y=y_0(x)+\delta y_0(x)-\Delta_1$ и Γ: $y=y(x)+\delta y(x)$

$$I(\bar{\Gamma}_0,\ \Gamma)+R+\delta R=0,$$

причем в силу (5), (93), лемм 6 и 11 имеем

$$|R|<\frac{kh^2}{\log\frac{1}{h}};$$

$$|\delta R|<\frac{k\Delta_1}{h\log\frac{1}{h}}.$$

Откуда, рассматривая вариацию δI и принимая во внимание (91), получим

$$\delta y''=-\frac{9}{h^3}\left(Y-h-\frac{1}{3}v+\frac{\theta h^2}{\log\frac{1}{h}}\right)\delta y+\frac{3\Delta}{h^2}+\frac{k\Delta}{h^2\log\frac{1}{h}}.$$

Отсюда в силу леммы 1 при достаточно малом h и при $0<x<2k_0\sqrt{h}$ будем иметь

$$\delta y'>0,$$

причем при $x_1=k_0\sqrt{h}$

$$\delta y(x_1)=\frac{k\Delta_1}{h}.$$

Здесь k_0 фиксировано так, чтобы при $x>x_1$ имело место (92).

Рассмотрим параболу

$$\varphi=\frac{k_0\Delta_1}{h}\frac{(x-\omega)^2}{(\omega-x_1)^2}$$

и обозначим через x_0 точку, в которой разность $\delta y-\varphi$ достигает наибольшего значения. При построении получим

$$x_0>x_1,\quad y(x_0)<h-\theta h^2,\quad \delta y(x_0)>\frac{k_0\Delta_1}{h},$$

$$\delta y-\varphi-[\delta y(x_0)-\varphi(x_0)]\leqslant 0.$$

Отметив это, рассмотрим снова в точке x_0 вариацию δI; при достаточно малом h

$$\delta I>\frac{k\Delta_1}{h},$$

но в рассмотренном случае

$$|\delta R|<\frac{k\Delta_1}{h\log\frac{1}{h}},$$

и мы снова пришли к противоречию с (94). Значит, $\Delta_1<\frac{k\varepsilon_0}{h}$, что вместе с (93) полностью доказывает лемму. Докажем еще одно утверждение, которое дает оценку $\Delta\{y_0\}$ для одного специального класса линий y_0.

Лемма 13. Пусть при $\eta=y_0(x)-v$ интеграл уравнения (11) есть функция $Y(x,\alpha)$, $\alpha=2h^2-\nu h^2$, а при $y=\bar{y}_0(x)-v$ тот же самый интеграл есть функция $Y(x)$, $Y(0)=Y(0,\ x)$ и период Y совпадает с периодом $Y(x,\alpha)$. Кроме того, $\nu=kh^2$ и $|\bar{y}_0(x)-y_0(x)|<\nu h^3$, $|\Delta\{\bar{y}_0\}|<\mu h^3$.

При этих условиях, если числа ν и μ будут достаточно малыми, получим

$$|\Delta\{\bar{y}_0\}| < \frac{kh^3}{\log\frac{1}{h}};$$

$$|H\{\bar{y}_0\} - Y(x)| < \frac{kh^2}{\log\frac{1}{h}}.$$

Доказательство. Можно видеть, что достаточно рассмотреть случай, когда $\bar{y}_0(x) = y_0(x)$. Кроме того, будем считать $\Delta = -\Delta_1 < 0$, так как при $\Delta > 0$ доказательство совершенно аналогично. Допустим от противного, что

(97) $$\Delta_1 = \frac{K_1h^3}{\log\frac{1}{h}},$$

где K_1 как угодно велико. Построим интегральную кривую $\bar{\gamma}$ $y = Y_1(x, \alpha)$ уравнения (11), полагая в этом уравнении $\eta = y_0(x) - v - \Delta_1$. Получим выражение

$$I(\bar{\Gamma}_0, \bar{\gamma}) = 0,$$

где $\bar{\Gamma}_0$ — кривая $y = y_0(x) - \Delta_1$. Кроме того, в силу леммы 6 вдоль линии $\Gamma: y = H\{y_0\} = y\{x\}$

(98) $$|I(\bar{\Gamma}_0, \Gamma)| < \frac{kh^2}{\log\frac{1}{h}}.$$

Следовательно, в силу леммы 2 при $|x| < x_1 = x\sqrt{h}$ будем иметь

(99) $$|Y_1(x, \alpha) - y(x)| < \frac{k_1h^2}{\log\frac{1}{h}},$$

причем x_1 можно выбрать так, чтобы $Y\left(\frac{1}{2}x_0\alpha\right) < h - \theta h^2$.

Кроме того, в силу леммы 1 и (97) при $x = \frac{x_1}{2}$

(100) $$\delta Y = Y_1\left(\frac{1}{2}x_1, \alpha\right) - Y\left(\frac{1}{2}x_1, \alpha\right) = \frac{k_2K_1h^2}{\log\frac{1}{h}},$$

а при $x = x_1$

$$\delta Y = \frac{(k_2 + k_3)K_1h^2}{\log\frac{1}{h}}.$$

Построим параболу

(101) $$\varphi = \varphi(x) = \frac{(k_1 + k_2)K_1h^2}{\log\frac{1}{h}} \frac{(x-\omega)^2}{\left(\frac{1}{2}x_1 - \omega\right)^2}.$$

В силу (99), (101) при $|x| \leqslant \frac{1}{2}x$ получим $y(x) < Y + \rho$, при $x = x_2$

$$y(x_2) > Y(x_2, \alpha) + \varphi(x_2).$$

Значит, разность $y(x) - Y(x, \alpha) - \varphi(x)$ будет достигать в некоторой точке $x_0 > \frac{1}{2}x$ абсолютного положительного максимума, причем в этой точке при достаточно малом μ будем иметь

(102) $$y(x_0) < h - \theta h^2.$$

Введем в рассмотрение кривые $\Gamma_0 : y=y_0(x)$ и $\gamma : y=Y(x, \alpha)$. В силу (4), (16) в точке получим

$$J(\Gamma_0, \gamma) = I(\Gamma_0, \gamma) + kh^{\frac{5}{2}} = kh^{\frac{5}{2}}.$$

Значит, в той же точке

$$|J(\overline{\Gamma}_0, \gamma)| > \frac{\Delta_1}{h}(1+\theta h) - kh^{5/2} > \frac{(K_1-k)h^2}{\log\frac{1}{h}}.$$

Но при $x=x_0$ в силу (102) и условия максимума $y - Y - \varphi$ получим

$$|J(\overline{\Gamma}_0, \overline{\Gamma})| > J(\overline{\Gamma}_0, \gamma) - (1+\theta h)h\varphi''(x_0) > \frac{(K_1-k)h^2}{\log\frac{1}{h}},$$

что невозможно, так как по условию $J(\overline{\Gamma}_0, \overline{\Gamma})=0$. Этим самым неравенство (97) полностью доказано. Однако из (97) и леммы 2 вытекает другое искомое неравенство (98) при $|x| < x\sqrt{h}$. При любом x это неравенство можно получить, если использовать соотношения

$$y(x) < h - \theta h^2, \quad k\sqrt{h} < x < \omega,$$

применяя рассуждения, совершенно аналогичные приведенным при доказательствах леммы 11 и первой части рассматриваемой леммы.

11. Отметим дополнительно несколько простых вспомогательных утверждений относительно соответствия границ при конформных отображениях областей, которые имеют общую часть границы.

Пусть область D ограничена линиями $\Gamma_0 : y=y_0(x)$ и $\Gamma : y=y(x)$, где $y_0(x)$ удовлетворяет условию (20) при $v=kh^2$, а $y(x)$ такая, что

$$|y(x) - h| < kh^2, \quad |y'(x)| < kh^{3/2}, \quad |y''(x)| < kh.$$

Пусть, кроме того, дана линия $\Gamma_1 : y=y_1(x)$, которая делит область D на области $D_0 : y_0(x) < y < y_1(x)$ и $D_1 : y_1(x) < y < y(x)$ и при этом такая, что

$$0 < \theta_0 h^3 < y_1(x) - y_0(x) < \theta_1 h^3.$$

Отобразим конформно области D_0 и D_1 соответственно на полосы $0 < \eta < \alpha h^3$, $\alpha h^3 < \eta < h_1 = h(1+\theta h)$ при условии соответствия бесконечно отдаленных точек. Пусть $\zeta=f_0(z)$ и $\zeta=f_1(z)$ — функции, которые реализуют эти отображения, $f_0(\pm\infty)=\pm\infty$, $f_1(\pm\infty)=\pm\infty$.

Будем, как и прежде, через P_0 и P_1 обозначать соответственно $\log|f_0'(z)|$, $\log|f_1'(z)|$, а через Q_0 и Q_1 — функции, сопряженные с P_0, P_1, $Q_0 = \arg f_0'(z)$, $Q_1 = \arg f_1'(z)$.

Лемма 14. Пусть $y_1(x)$ имеет непрерывную производную, x_0 — точка, в которой $y_1'(x)$ достигает абсолютного максимума (минимума); в окрестности точки x_0 функция $y_1(x)$ линейна. При этих условиях, если θ_0, $\theta_1=k\alpha$, $|P_{0,1}| < k$ и

$$y_1'(x_0) > \max y_0'(x) + K\alpha h^{7/2} \left(y_1'(x_0) < \min y_0'(x) - K\alpha h^{7/2}\right),$$

то при $K > K_0(k)$ в точке $[x_0, y_1(x_0)]$ линии Γ_1 будем иметь

$$\frac{d}{ds}(P_1 - P_0) < -kh^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{ds}(P_1 - P_0) > kh^{\frac{1}{2}}\right),$$

где ds — элемент дуги линии Γ_1.

Доказательство. Действительно, в соответствии с определением P имеем

$$\frac{dP_1}{ds} - \frac{\partial P_1}{\partial \xi} e^{P_1}, \quad \frac{dP_1}{\partial s} - \frac{\partial P_0}{\partial \xi} e^{P_0}.$$

В то же время

$$\frac{\partial P_1}{\partial \xi} = \frac{\partial Q_1}{\partial \eta} < \frac{kh^{3/2} + kh^{2+\nu}}{h_1} < kh^{1/2},$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial \xi} = \frac{\partial Q_0}{\partial \eta} < \frac{K\alpha h^{7/2}}{\alpha h^3} = Kh^{1/2}.$$

Значит,

$$\frac{d}{ds}(P_1 - P_0) < kh^{1/2} - Kh^{1/2} < kh^{1/2}.$$

Вторая часть леммы доказывается совершенно аналогично.

Лемма 15. Допустим, что линии $\Gamma_0 : y = y_0(x)$ и $\Gamma : y = y(x)$ имеют следующие свойства:

$$k_0\sigma < y(x) - y_0(x) < k\sigma, \tag{103}$$

$$|y_0'(x)| < \tau, \quad |y'(x)| < \tau,$$

$$|y_0''|(x)| \leqslant \nu, \quad |y'(x)| \leqslant \nu,$$

где τ, ν; $\nu > \tau^2$ как угодно малы. Обозначая через $\xi = f(z)$ ($f(\pm\infty) = \pm\infty$) функцию, которая реализует конформное отображение области $D(\Gamma_0, D)$ на полосу $0 < \eta < \sigma$, и полагая для точек $\Gamma : V(s) = |f'(z)|$, получим

$$|V(s_1 + \Delta s) - V(s_1)| < k\nu\Delta s \log\frac{1}{\Delta s} + k\frac{\tau}{s}\Delta s, \tag{104}$$

где ds — элемент дуги Γ, а s_1 соответствует точке z_1.

Доказательство. Проводя подобное расширение плоскостей z и ζ в $1/\sigma$ раз, можно убедиться в том, что достаточно рассмотреть случай, когда $\sigma = 1$. Отметив это, проведем через точку s_1 дугу контура, ортогональную Γ и Γ_0 и расположенную в области D. Через концы этой дуги проведем касательные L_0 и L соответственно к Γ_0 и Γ. В соответствии с условием леммы угол между прямыми L_0 и L не превышает 2τ. Отобразим конформно двуугольник L_0L на единичную полосу $0 < \eta < 1$ так, чтобы вершины углов перешли в точки $\pm\infty : \omega = \varphi(z) \frac{e^{i\alpha}}{\tau} \log(z - t_0)$, где t_0 — вершина угла LL_0L; расстояние от точки z_0 до s_1 будет $\frac{1}{2\tau}$. Отрезки кривых Γ_0 и Γ, которые находятся в полосе $|x - x_1| \leqslant \frac{1}{4\tau}$, $z_1 = x_1 + iy_1$, при отображении φ перейдут в линии Γ_0' и Γ', причем в силу условия $\nu = \tau^2$ эти линии будут также удовлетворять соотношению (103) ($\sigma = 1$) при некоторых других константах τ и ν. Кроме того, линии Γ_0' и Γ' будут доходить до прямых $y = 0$, $y = 1$ соответственно в точках $\frac{1}{\tau_0}\log|z_1 - z_0|$, $\frac{1}{\tau_0}\log|z_1 - z_0| + i$. Обозначим через $\bar{\Gamma}_0 : y = \bar{y}_0(x)$ и $\bar{\Gamma} : y = \bar{y}(x)$ линии, которые совпадают с Γ_0', Γ' при $|x - x_1| < \frac{1}{4\tau}$ и удовлетворяют условию (103) в том же смысле, что и линии Γ_0', Γ'. Пусть $\omega = \psi(z)$ отображает область $D(\Gamma_0, \Gamma)$ на $D(\bar{\Gamma}_0, \bar{\Gamma})$ при условии соответствия точек z_1, $\omega_1 = \frac{1}{\tau_0}\log|z_1 - z_0| + i$ и линий Γ_0, $\bar{\Gamma}_0$ и $\zeta = f'(\omega)$ отображает область $D(\bar{\Gamma}_0, \bar{\Gamma})$ на полосу $0 < \eta < 1$, $f_1(\pm\infty) = \pm\infty$.

Отсюда, полагая $V_1 = |f_1'|$, $v = |\varphi'|$, получаем

$$f(z) = f_1[\psi(z)],$$

$$V(s) = |f_1'(\omega)|\,|\psi'(z)| = V_1 - v.$$

Значит,

$$|V(s+\Delta s) - V(s)| < k\,|V_1(s+\Delta s) - V_1(s)| + k\,|v(s+\Delta s) - v(s)|.$$

Для второго слагаемого при $|\Delta s| < \frac{1}{8\tau}$ будем иметь

$$|v(s+\Delta s) - v(s)| < k\tau\Delta s.$$

Для первого слагаемого в силу теоремы 10 для ограниченных значений Δs, $|\Delta s| < 1$ получим

$$|V_1(s+\Delta s) - V_1(s)| < k\nu\Delta s \log\frac{1}{\Delta s},$$

а при $\Delta s > \frac{1}{2}$ после элементарной оценки этого же выражения получим оценку $k\tau\Delta s + k\nu$. Складывая полученные неравенства, придем к искомому соотношению (104).

Вернемся к обозначениям, принятым в начале этого пункта, и докажем лемму.

Лемма 16. Допустим, что функции $y_0(x)$ и $y_1(x)$ удовлетворяют дополнительно следующим условиям:

$$|y_0'(x)| < kh^{5/2}, \quad |y_0''(x)| < kh^2,$$

$$|y_1'(x)| < kh^{5/2}, \quad |y_1''(x)| < kh^2,$$

Пусть, кроме того, вдоль линии Γ_1 имеем

$$|P_1 - P_0| < k, \tag{105}$$

а линия Γ_1 содержит дугу γ, которая имеет дифференцируемую кривизну.

При этих условиях, если в некоторой точке дуги имеем

$$P_1'(s_0) = kP_0'(s_0) + Q, \quad k > 0, \tag{106}$$

то в этой точке $|P_0'(s_0)| < kh^{-1/2}$.

Доказательство. Допустим от противного, что $|P_0'(s_0)| > Kh^{-1/2}$ или для определенности

$$P_0'(s_0) > Kh^{-1/2}, \tag{106'}$$

где K как угодно велико; в таком случае (106) будет эквивалентно условию

$$P_1'(s_0) = kP_0'(s_0). \tag{107}$$

В силу условия (106) найдется такое ограниченное число θ, что в точке s_0

$$|f_1'| = \theta\,|f_0'|.$$

Отсюда, заменяя функцию f_0 функцией θf_0, в точке s_0

$$P_1(s_0) = P_0(s_0). \tag{108}$$

Так как при этом P_0' не меняется, то, не нарушая общности, в условиях леммы условие (105) можно заменить условием (108). Кроме того, рассматривая P_0, P_1 как функции ξ, η, в силу ограниченности $|f_0'|$ и $|f_1'|$ можно в условии (107) и в искомом неравенстве дифференцирование по s

заменить дифференцированием по ξ. Отметив это, в дальнейшем будем считать, что при отображениях f_0 и f_1 точке s_0 соответствует точка $i\alpha h^3$.

Положим

$$s^+(\xi)=\int_0^\xi e^{-P_1(\xi,\alpha h^3)}d\xi,\ s^-(\xi)=\int_0^\xi e^{-P_0(\xi,\alpha h^3)}\,d\xi.$$

В силу леммы 15 имеем

$$(109)\qquad |s^+(\xi)-s-(\xi)|<\frac{k}{\alpha}h^{-\frac{1}{2}}\left(\xi^2+|\xi|^{1+\delta}\right),\quad \delta>0.$$

Представим теперь значения $\frac{dP_1}{d\xi}$ и $\frac{dP_0}{d\xi}$ в точке через функции Q_0 и Q_1; имеем

$$\frac{\partial P_1}{\partial\xi}=\frac{\partial Q_1}{\partial\eta}=k\max\left|\frac{Q_1(t,2\alpha h^3)-Q_1(\tau,\alpha h^3)}{\alpha h^3}\right|+$$

$$+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha^2h^6}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_1(\xi,\alpha h^3)-Q_1(0,\alpha h^3)}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}}\,d\xi,$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial\xi}=\frac{\partial Q_0}{\partial\eta}=k\max\left|\frac{Q_0(t,0)-Q_0(\tau,\alpha h^3)}{\alpha h^3}\right|+$$

$$+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha^2h^6}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_0(\xi,\alpha h^3)-Q_0(0,\alpha h^3)}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}}\,d\xi.$$

Первые слагаемые в полученных выражениях для $\frac{\partial P_1}{\partial\xi}$ и $\frac{\partial P_0}{\partial\xi}$ в силу условий леммы меньше, чем $kh^{-1/2}$. В соответствии с предположением (106′) сумма остальных слагаемых должна быть больше, чем $Kh^{-1/2}$. Покажем, что эта сумма мала вместе с h. Действительно, вводя переменные s^+ и s^-, рассмотренную сумму можно представить в виде

$$[Q_0(0,\alpha h^3)=Q_1(0,\alpha h^3),\ Q_0(s)=Q_1(s)];$$

$$\left|\frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha^2h^6}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q[s^+(\xi)]-Q[s^-(\xi)]}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}}\right|<\frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha^2h^6}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|Q'|\,|s^+-s^-|\,d\xi}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}},$$

где через $Q(s)$ обозначен угол, составленный касательной к Γ_1 в точке s с осью x. Отмечая, что $|Q'|<kh^2$, и подставляя вместо $|s^+-s^-|$ ее мажоранту из (109), получим, что последнее выражение мало вместе с h. Тем самым лемма полностью доказана.

Л е м м а 17. В условиях предыдущей леммы допустим, что кривизна $K(s)$ линии Γ_1 не превышает ν_1 и линия Γ_1 содержит дугу γ контура радиуса $1/\nu_1$.

При этих условиях найдется такое $N=N(k)$, что, когда

$$\nu_1=\nu_0+r\alpha h^3,\ r>N,$$

где ν_0 — максимум кривизны линии Γ_0, то в любой точке s_0 дуги γ будем иметь

$$P_1''(s_0)-P_0''(s_0)<-r+\left\{\left|\frac{\partial P_0}{\partial s}\right|+\left|\frac{\partial P_1}{\partial s}\right|\right\}\left|\frac{\partial P_1}{\partial s}-\frac{\partial P_0}{\partial s}\right|+\left(\frac{\partial P_1}{\partial s}\right)^2(e^{-P_1}-e^{-P_0}),$$

если дуга γ обращена к D_0 вогнутостью, $y_1'' < 0$, и

$$P_1''(s_0) - P_0''(s_0) > r - \left\{\left|\frac{\partial P_0}{\partial s}\right| + \left|\frac{\partial P_1}{\partial s}\right|\right\}\left|\frac{\partial P_1}{\partial s} - \frac{\partial P_0}{\partial s}\right| + \left(\frac{\partial P_1}{\partial s}\right)^2 (e^{-P_1} - e^{-P_0}),$$

если дуга γ обращена к D_0 выпуклостью, $y_1'' > 0$.

Доказательство. Остановимся на первой части леммы. Допустим, что при отображениях $\zeta = f_0(z)$, $\zeta = f_1(z)$ рассматриваемая точка s_0 переходит в точку $i\alpha h^3$. Обозначим через $Q_0'(\xi, \eta)$ и $Q'(\xi, \eta)$ значения производных по ξ функций Q_0 и Q_1. Найдем выражения для $\frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^2 P_1}{\partial \xi^2}$ в точке $i\alpha h^3$ соответственно через функции Q_0' и Q_1'. Отмечая, что при $\eta = 0$, αh^3

$$Q_0' = K e^{-P_0}, \tag{110}$$

принимая во внимание лемму 15 и получаемое неравенство *

$$|P_0(\xi, \alpha h^3) - P_0(\xi, 0)| < \nu_1 \alpha h^3 < k\alpha h^5 , \tag{111}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} = K e^{-P},$$

имеем

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} = \frac{\partial Q_0'}{\partial \eta} = k\frac{\nu_1 - \nu_0}{\alpha h^3} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha^2 h^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_0'(\xi, \alpha h^3) - Q_0'(0, \alpha h^3)}{\mathrm{sh}^2 \frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}} d\xi$$

или, рассматривая кривизну K линии Γ_1 как функцию ξ и используя равенство (110), получим

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial \zeta^2} = r + \frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha^2 h^6}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{[K(\xi) - K(0)]\, e^{-P_0}}{\mathrm{sh}^2 \frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}} d\xi + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_0'(0, \alpha h^3)\,[e^{P_0(\xi)} - e^{-P_0(0)}]}{\mathrm{sh}^2 \frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}}\right) d\xi. \tag{112}$$

Оценим третье слагаемое. С этой целью считаем, что

$$Q_0'(0, \alpha h^3) = \frac{\partial P_0}{\partial \eta} = \frac{P_0(0, \alpha h^3) - P_0(0, 0)}{\alpha h^3} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha^2 h^6}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P_0(\xi) - P_0(0)}{\mathrm{sh}^2 \frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}} d\xi +$$
$$+ \frac{k}{\alpha^2 h^6}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P_0(\xi, 0) - P_0(0, 0)}{\mathrm{sh}^2 \frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3} + k} d\xi.$$

Отсюда, принимая во внимание (112) и лемму 14, получим

$$\left|\frac{1}{\alpha^2 h^6}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P_0(\xi) - P_0(0)}{\mathrm{sh}^2 \frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}} d\xi\right| < \frac{k}{\alpha} h^{-1/2}.$$

* Для получения этого неравенства достаточно воспользоваться соотношением $dP/d\eta = dQ/d\xi = Ke^{-P}$.

Кроме того, в силу этой же леммы 14

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[P_0(\xi)-P_0(0)]^n}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}}d\xi\right|<k^n h^{\frac{n}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi|^n d(\xi)}{\operatorname{sh}^2\frac{\xi}{\alpha h^3}}<k^n\alpha^{n+1}h^{5/2n}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{Q_0'(0,\alpha h^3)}{\alpha^2 h^6}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-P_0(\xi)}-e^{P_0(0)}}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}}d\xi\right|<\frac{k}{\alpha}h^{3/2}.$$

Отсюда (112) даст

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2}=r+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha^2 h^6}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[K_0(\xi)-K_0(0)]\,e^{-P_0(\xi)}}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\alpha h^3}}d\xi. \tag{113}$$

Проделывая совершенно аналогичное вычисление для $\frac{\partial^2 P_1}{\partial(\xi)^2}$, в той же самой точке $0,\alpha h^3$, получим

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial\xi^2}=k-\frac{\pi}{2}\frac{1}{h_1^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1(\xi)-K_1(0)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{h_1}}d\xi. \tag{114}$$

Отметим, что подынтегральное выражение в (113), (114) неотрицательно, ибо по условию на дуге γ кривизна линии Γ_1 достигает своего максимума, кроме того, r велико по сравнению с k

$$\left|\frac{\partial^2 P_1}{\partial\xi^2}\right|<k\left\{\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 P_1}{\partial\xi}\right\}. \tag{115}$$

Перейдем теперь от производных по ξ к производным по s, очевидно, имеем

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2}e^{2P_0}+\left(\frac{\partial P_0}{\partial\xi}\right)^2 e^{P_0}=\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2}e^{2P_0}+\left(\frac{\partial P_0}{\partial s}\right)^2 e^{-P_0},$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 P_1}{\partial\xi^2}e^{2P_1}+\left(\frac{\partial P_1}{\partial\xi}\right)^2 e^{P_1}=\frac{\partial^2 P_1}{\partial\xi^2}e^{2P_1}+\left(\frac{\partial P_1}{\partial s}\right)^2 e^{-P_1}.$$

Отсюда, принимая во внимание (113), (114) и (115), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_1}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2}&<\left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2}\right)e^{2P_0}+\frac{\partial^2 P_1}{\partial\xi^2}\left(e^{2P_1}-e^{2P_0}\right)+\\&+\left\{\left(\frac{\partial P_1}{\partial s}\right)^2-\left(\frac{\partial P_0}{\partial s}\right)^2\right\}e^{-P_0}+\left(\frac{\partial P_1}{\partial s}\right)^2\left(e^{-P_1}-e^{P_0}\right)<\\&<-r+\left\{\left|\frac{\partial P_0}{\partial s}\right|+\left|\frac{\partial P_1}{\partial s}\right|\right\}\left|\frac{\partial P_1}{\partial s}-\frac{\partial P_0}{\partial s}\right|+\left(\frac{\partial P_1}{\partial s}\right)\left(e^{-P_1}-e^{P_0}\right).\end{aligned} \tag{116}$$

Вторая часть леммы доказывается совершенно аналогично.

Лемма 18. В условиях леммы 17 допустим дополнительно, что вдоль Γ_1

$$|P_1(s)-P_0(s)|<\frac{kh}{\log\frac{1}{h}}. \tag{117}$$

При этих условиях на дуге γ, включая ее концы, функция $q(s)=P_1(s)-P_0(s)$ не может достигать своего максимума, если γ обращена к D_0 выпуклостью, не может достигать минимума, если γ обращена к D_0 вогнутостью.

Доказательство. Остановимся снова на первом случае, когда γ обращена к D выпуклостью. Допустим, что в произвольной точке s_0 дуги γ имеем

$$\frac{\partial P_1}{\partial s} = \frac{\partial P_0}{\partial s} + \frac{k\sqrt{h}}{\log \frac{1}{h}},$$

но в таком случае в соответствии с леммой 15 будем иметь

$$\left|\frac{\partial P_1}{\partial s}\right| < kh^{-1/2}, \quad \left|\frac{\partial P_r}{\partial s}\right| < kh^{-1/2}.$$

В этом случае неравенство (116) принимает вид

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 p_0}{\partial s^2} > r - \frac{k}{h}\left(e^{-P_1} - e^{P_0}\right) - \frac{k}{\log^2 \frac{1}{h}}$$

или, принимая во внимание (117), окончательно

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} > \frac{1}{2} r$$

Отсюда непосредственно вытекает, что максимум не может достигаться ни в одной внутренней точке дуги γ. Кроме того, отсюда следует, что когда максимум достигается на левом конце дуги γ, пусть при $s=s_1$, то или

$$\overline{\lim_{\Delta s \to +0}} \frac{q(s_1 + \Delta s) - q(s_1)}{\Delta s} < -\frac{k\sqrt{h}}{\log \frac{1}{h}},$$

или в точке s_1 правая производная функции q будет существовать и будет отрицательна, причем в этом случае справа от s_1 функция q будет выпуклой. В обоих случаях, согласно лемме 8 работы [2], можно показать, что при $\Delta s < 0$

$$\lim \frac{q(s_1 + \Delta s) - q(s_1)}{\Delta s} < 0,$$

т. е. в точке s_1 максимум не достигается, Совершенно аналогично рассматривается случай правого конца дуги γ.

12. Теорема существования. Используя доказанные выше вспомогательные предложения и применяя метод, аналогичный методу, развитому в задаче о струйных движениях жидкости, докажем существование решения задачи, сформулированной в п. **6**. Докажем существование волн с любым достаточно большим периодом и как предельный случай получим так называемую уединенную волну.

Теорема. При любом достаточно малом h и достаточно большом ω всегда найдется значение Δ, при котором будет существовать решение $y = y(x, \omega)$ уравнения

$$J(\gamma_0 \Gamma) = |f'(z, \gamma_0, \Gamma)|^2 - C + \lambda y = 0,$$

$$C = 3 + 9h^2, \quad \lambda = \frac{2}{h} + 6\lambda,$$

где γ_0 — прямая $y = \Delta(\omega)$, $|\Delta| < \dfrac{kh^3}{\log \frac{1}{h}}$. При этом функция $y = (x, \omega)$ будет иметь следующие свойства:

1) $y(x, \omega)$ — периодическая функция с периодом 2ω,

2) $y(x, \omega)$ симметрична относительно оси y,

3) $y(x, \omega)$ допускает на отрезке $(-\omega, \omega)$ единственный максимум в точке $x=0$, $y(0, \infty) = h + \theta h^2$, $1 < 0 < 2$.

При $\omega \to \infty$ функция $y(x,\omega)$ также стремится к решению уравнения (1), причем значение $y(x,\infty)$, которое допускает единственный максимум в точке $x=0$ и имеет асимптоту $y=\Delta$, имеет вид

$$y(0,\infty)=h+2h^2,$$

$$|\Delta(\infty)| < \frac{kh^3}{\log \frac{1}{h}}.$$

Доказательство. Доказательство будем вести методом индукции путем перехода от больших значений v к меньшим. В соответствии с этим докажем прежде всего существование решения такой задачи:

а) Требуется построить решение уравнения

$$J_v(\Gamma_0,\Gamma)=0, \quad v=Kh^2,$$

где Γ_0: $y=y_0(x)=v+\eta(x)$ удовлетворяет условиям:

$$y_0(-x)=y_0(x), \quad y_0(x+2\omega)=y_0(x), \tag{118}$$

$$|\eta(x)| < 3h^3, \quad |y_0'(x)| \leqslant h^{5/2}, \quad |y_0''(x)| \leqslant h^{3/2}.$$

Докажем существование решения этой задачи для $K \geqslant 10$, причем для этого решения будем иметь

$$|h - y(x)| < 2h. \tag{119}$$

Рассмотрим семейство E функций $\{y(x)\}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$|h - y(x)| < 2h^2, \quad y(-x)=y(x), \quad y(x+2\omega)=y(x), \tag{120}$$

$$|y'(x)| \leqslant 1, \quad \lim \left| \frac{y'(x+\Delta x) - y'(x)}{\Delta(x)} \right| \leqslant \left[1 + y'^2(x)\right]. \tag{121}$$

На этом семействе определим функционал $T(y)$

$$T(y) = \max_{|x| \leqslant \omega} |J_v(\Gamma_0, \Gamma)|.$$

Этот функционал, очевидно, непрерывен на E, а семейство E компактно. Значит, в E существует функция $y_1(x)$, которая дает абсолютный минимум T на E. Нам необходимо показать, что $T(y_1)=0$. Допустим от противного, что $T(y_1) > 0$.

Чтобы отсюда прийти к противоречию, достаточно показать, что в E можно так проварьировать $y_1(x)$, чтобы соответствующая вариация T была отрицательной. С этой целью отметим некоторые свойства функции

$$\varphi(x) = J_v\left(\Gamma_0', \Gamma\right),$$

где за Γ_1 принята линия, которая изображает функцию $y=y(x)$.

1) В любой точке x, где $y_1(x)=h+2h^2$, $\varphi(x) < 0$, а где $y_1(x)=h-2h^2$, $\varphi(x) > 0$.

Действительно, в первом случае в силу теоремы 1 ([2], с. 398) увеличим значение $J_v(\Gamma_0, \Gamma_1)$, если Γ_1 заменим прямой $y=h+2h^2$, а Γ_0 — прямой $y=v+8h^3$, т. е. в рассмотренной точке имеем

$$\varphi = J_v(\Gamma_0, \Gamma_1) < \left(\frac{h-v}{h-v+2h^2-3h^3}\right)^2 - C + \lambda(h+2h^2) < 0.$$

Второй случай рассматривается совершенно аналогично.

2) В точках, где $|\varphi(x)|$ достигает абсолютного экстремума, $|y_1'(x)| < 1$. Это свойство непосредственно вытекает из рассмотрений, проведенных

при доказательстве леммы 3. Совершенно аналогично, отправляясь от вычислений, проведенных при доказательстве леммы 4, и используя результаты пп. 8,9 данной статьи, можно видеть, что

3) если кривая Γ_1 содержит дугу контура единичного радиуса, то на этой дуге, включая ее концы, функция φ не может достигать своего абсолютного максимума или минимума в зависимости от того, будет ли вдоль этой дуги $y_1'' < 0$ или $y_1'' > 0$.

4) Пусть ε — произвольное малое положительное число и пусть линия $\Gamma_1 : y = \bar{y}_1(x)$ такая, что

$$|\bar{y}_1(x) - y_1(x)| \leqslant \varepsilon$$

и в некоторой точке x_0

$$\bar{y}_1(x_0) = y_1(x_0) + \varepsilon, \quad [\bar{y}_1(x_0) = y_1(x_0) - \varepsilon].$$

Утверждается, что при этих условиях в точке x_0 имеем

$$J_v(\Gamma_0, \bar{\Gamma}_1) < J_v(\Gamma_0, \Gamma_1) \quad (J_v(\Gamma_0, \bar{\Gamma}_1) > J_v(\Gamma_0, \Gamma_1)).$$

Действительно, в силу указанной теоремы 1 [2] наше утверждение достаточно доказать для случая, когда $\bar{y}_1(x) = y_1(x) + \varepsilon\, [\bar{y}_1(x) = y_1(x) - \varepsilon]$ при любом x, но в этом случае

$$J_v(\Gamma_0, \Gamma_1) - J_v(\Gamma_0, \bar{\Gamma}_1) = (1 + \theta h) \frac{2\varepsilon}{h} \frac{}{v} - \frac{2\varepsilon}{h} - 6h\varepsilon,$$

где $|\theta| < 8$. Или, подставляя вместо v ее наименьшее значение, окончательно получим

$$J_v(\Gamma_0, \Gamma_1) - J_v(\Gamma_0, \bar{\Gamma}_1) > k\varepsilon, \quad k > 0. \tag{122}$$

Аналогично, если $\bar{y}_1(x) = y_1(x) - \varepsilon$, то

$$J_v(\Gamma_0, \Gamma_1) - J_v(\Gamma_0, \bar{\Gamma}_1) < -k\varepsilon. \tag{122'}$$

Принимая во внимание перечисленные свойства линии Γ_1, а также очевидную непрерывность функции φ, можем применить конструкцию, данную в п. **10** [2] теории струй, и получить в классе E линию $\bar{\Gamma}_1$, для которой T принимает меньшее значение, чем на Γ_1. Этим самым устанавливается существование решения поставленной задачи при $k \geqslant 10$. Из (122), (122′) непосредственно следует, что решение поставленной задачи единственно и непрерывно зависит от $y_0(x)$.

в) Покажем теперь, что в условиях а) при h, достаточно малом, найдется такая постоянная $\Delta = \Delta\{y_0\}$, $|\Delta| < h^2$, что решение уравнения

$$J_v(\Gamma_0', \Gamma) = 0, \tag{123}$$

где $\Gamma_0' : y = y_0(x) + \Delta$, будет проходить через точку $(0, h + \alpha)$, $0 \leqslant 2 \leqslant 2h^2$. Действительно, обращаясь последовательно к (122), (122′) и принимая $\Delta = \pm \frac{2}{k} h^2$, получим решения уравнения (123), одно из которых отвечает знаку плюс и при $x = 0$ будет больше $h + 2h^2$, а другое, отвечающее знаку минус, при этом же x будет меньше h. Отсюда и из непрерывности решения относительно $y_0(x)$ получаем искомый результат.

с) Перейдем к осуществлению индукции. Обозначим через $Y = S\{y_0, v\}$ интеграл уравнения (11) (при $\eta = y_0(x) - v + C$ с периодом 2ω), который удовлетворяет начальным условиям

$$Y(0) = h + \alpha, \quad Y'(0) = 0.$$

В силу леммы 1, если $y_0(x)$ удовлетворяет условию (118), найдется такое число k_0, что при вариации y_0, достаточно малой по сравнению с h^3, имеем

(124) $$|S\{y_0+\delta y_0, v\}-S\{y_0,v\}|<\frac{k_0}{h}\max|\delta y_1(x)|.$$

При тех же самых допущениях в силу предыдущих лемм найдется постоянная k_1 такая, что для функции $y(x)=H\{y_0\}$ будем иметь

(125) $$|y'(x)|\leqslant k_1h^{5/2},\ |y''(x)|\leqslant k_1h.$$

Если $y_0(x)$ удовлетворяет условиям леммы 13, найдутся такие θ_0 и k_2, что

(126) $$|s\{y_0,v\}-H\{y_0\}|<\frac{k_2h^2}{\log\frac{1}{h}}.$$

Отметим теперь одну специальную конструкцию. Отправляясь от $y_0(x)$, которая удовлеторяет (118), построим функцию $y_1(x)$ такую, что $S\{y_1,v+kh^3\}=S\{y_0,v\}$, $k\leqslant 1$.

Допустим, что для функции $y_1(x)$ можно построить функцию $H\{y_1\}=$ $=y(x)$ и соответствующий функционал $\Delta\{y_1\}$. Пусть $\Gamma_0 : y = y_0(x)+\Delta\{y_1\}$ и $\Gamma_1 : y_1(x)+\Delta\{y_1\}$. Для областей $D_0(\Gamma_0,\Gamma_1)$ и $D_1(\Gamma_1\Gamma)$, $\Gamma : y=y(x)$ построим отображения f_0 и f_1, введенные в п. **11**. Отправляясь от (126), можно показать, что вдоль линии Γ_1 будем иметь

(127) $$|P_1-P_0|<\frac{2k_2h}{\log\frac{1}{h}}.$$

Пусть теперь $y_0(x)$ удовлетворяет условию (118) и условию (89) при $\nu=\nu_0$, где ν_0 настолько мало, что для $y_0(x)$ имеет место результат леммы 11

(128) $$|\delta H_1\{y_0\}|<\frac{k_2}{h^2}\max|\delta y_0|.$$

Положим

$$\bar r=h^3/4k_3=\beta h^3,$$

и пусть n — наименьшее целое число, большее, чем $10h^2/\bar r=10/\beta h$. Разделим интервал $(0,10h^2)$ на n равных частей, где $v_1, v_2,\ldots, v_{n-1}$ — точки деления $v_m=10h^2$, $m/n=m\tau_1$. Обозначим через $Y_0^{(m)}(x)$ такую функцию, что $S\{Y_0^{(m)}, v_m\}=Y(x)$, где $y=Y(x)$—уравнение волны Релея. Для каждой линии $\Gamma_1^m : y=Y_0^m(x)$ построим некоторую ее окрестность.

Полагая $\delta_0=0$, обозначим числа $\delta_1, \delta_2,\ldots, \delta_k$ из вспомогательного соотношения

(129) $$\delta_m=\delta_{m-1}(1+2k_0\beta h)+\frac{2k_2h^4}{\log\frac{1}{h}}.$$

Отсюда следует, что

(130) $$\delta_n\leqslant\frac{k_4h^3}{\log\frac{1}{h}},$$

где k_4 — число, определяемое числами β, k_0 и k_2. В дальнейшем будем h считать настолько малым, чтобы δ_n удовлетворяло неравенству $\delta_m<\theta_0$.

Наряду с числами δ_m введем еще числа δ_m' и δ_m''. Положим $\delta_m'=k_5h^{7/2}m$, где число k_5 определяется через k_1 с помощью функции $\bar K_0(k)$, введенной в лемме 14,

$$k_5=\bar K_0(k_1).$$

Аналогично

$$\delta''_m = k_6 h^3_m,$$

где число k_6 также выражается через k_1 с помощью функции $K_1(k)$ из леммы 17.

Обозначим через E_m совокупность линий $\{\gamma_0^{(m)}\} : \{y = y_0(x, m\}$, которые имеют такие свойства

(131) $$\operatorname{var}|y_0(x, m) - Y_0^{(m)}(x)| \leqslant \delta_m < \delta_n,$$
$$y_0(-x, m) = y_0(x, m), \quad y_0(x+2\omega) = y_0(x, m);$$

(132) $$|y'_0(x, m)| \leqslant \delta'_m,$$
$$|y''_0(x, m)| \leqslant \delta''_m,$$

кроме того, специально для линий $y_0(x,n)$

(133) $$|y_0(x, n) - Y_0^{(n)}(x)| \leqslant \nu h^3.$$

Установим индукцией от m до $m-1$ существование решения $H\{y_0(x, m)\}$ такого, что при отображении $f_1^{(m)}$ полосы $v_m < \eta < h$ на область $D(\gamma_0^{(m)})$, $H\{y_0(x, m)\} > y > y_0(x, m)$ прямая $\eta = v_n$ будет переходить в линию семейства E_n. В силу а) это утверждение имеет место при $m = n$. Допустим его справедливым для m и докажем для $m-1$.

Пусть $y_0(x, m-1)$ — произвольная линия семейства E_{m-1}. В силу (131), (124) и леммы 1 будем иметь

(134) $$|s\{y_0, v_{m-1}\} - Y(x, \alpha)| < \frac{k_0\delta_{m-1}}{h}.$$

Определим $y_1(x)$ из условия

$$s\{y_1, v_m\} = s\{y_0, v_{m-1}\}.$$

Можно видеть, что

(135) $$\operatorname{var}|y_1 - Y_0^{(m)}(x)| < (1 + 2k_0\beta h)\operatorname{var}|y_0(x, m-1) - Y_0^{m-1}(x)|.$$

Значит, функция $y_1(x)$ принадлежит семейству E_m, причем в силу (126) имеем

(136) $$|s\{y_1, v_m\} - H\{y_1\}| < \frac{k_2 h^2}{\log\frac{1}{h}}.$$

При этом предполагается, что $H\{y_1\}$ существует, а при отображении $f_1^{(m)}$ прямая $\eta = v_n$ соответствует некоторой линии семейства E_n.

Пусть теперь $y = \bar{y}_0(x) = y_0(x, m-1) + C, C = \text{const}$ — функция такая, что при $\eta = \bar{y}_0(x) - v_{m-1}$ и при $v = v_{m-1}$ интеграл уравнения (11) совпадает с $s\{y_0(x, m-1)\}$, а $y = \bar{y}_1(x)$ такая, что при $\eta = \bar{y}_1(x) - \delta_m$ и при $v - v_m$ интеграл (11) совпадает также с $s\{y_0(x, m-1)\}$.

Проведем конформные отображения $\zeta = \bar{f}_0(z)$, $\zeta = \bar{f}_1(z)$ полос $\bar{y}_0(x) < y < \bar{y}_1(x)$ и $\bar{y}_1(x) < y < H\{y_1\}$ соответственно на полосы $v_{m-1} < \eta < v_m$ и $vm < \eta < h$. В силу (136), (127) вдоль линии $y = \bar{y}_1(x)$ будем иметь

(137) $$|P_1 - P_0| < \frac{2k_2 h}{\log\frac{1}{h}}.$$

Отметив это, построим в окрестности линии $y=\bar{y}_1(x)$ семейство линий $F=\{\Gamma_1\}:\{y=y(x)\}$, которые имеют следующие свойства:

$$|y(x)-\bar{y}_1(x)|\leqslant \frac{k_2h^4}{\log\frac{1}{h}},$$

$$y(-x)=y(x),\quad y(x+2\omega)=y(x),$$

$$|y'(x)|\leqslant \delta_m',\quad |y''(x)|\leqslant \delta_m''.$$

Все линии семейства F принадлежат семейству E_m, значит, для каждой линии из F существует $H\{y\}$ и $\Delta\{y\}$. Выделим из F его часть F', определяемую неравенством

$$|\Delta\{y\}-\Delta\{\bar{y}\}|<\frac{kh^3}{\log\frac{1}{h}}. \tag{138}$$

Пусть $\zeta=f_0(z)$, $\zeta=f_1(z)$ реализует конформное отображение областей $y_0(x)+\Delta\{y\}<y<y(x)+\Delta\{y\}$ и $y\{x\}+\Delta\{y\}<y<H\{y\}$ соответственно на полосы $v_{m-1}<\eta<v_m$ и $v_m<\eta<h$ при условии соответствия бесконечно удаленных точек. С помощью этих отображений введем на каждой линии $\Gamma_1:y=y(x)F'$ функцию

$$\psi(s,\Gamma_1)=P_1-P_0=\log|f_1'(z)|-\log|f_0'(z)|$$

и положим

$$J(\Gamma)=\max_{|s|<\infty}\psi(s,\Gamma).$$

Остается показать, что в классе линий F' найдется линия Γ, для которой $J(\Gamma)=0$. Допустим от противного, что минимум J на F' положительный

$$\inf J(\Gamma)=a>0.$$

В силу компактности F' этот минимум достигается на некоторой линии $\Gamma^{(0)}$ этого же семейства

$$J(\Gamma^{(0)})=a.$$

Кроме того, линия $y=\bar{y}_1(x)$ принадлежит F' в силу (137)

$$a\leqslant\frac{2k_2h}{\log\frac{1}{h}}.$$

Нужно показать, что в классе F' можно проварьировать $\Gamma^{(0)}$ так, чтобы $\delta J(\Gamma^{(0)})<0$. Для этого отметим следующие свойства линии $\Gamma^{(0)}$ и функции $\psi(x)=\psi(x,\Gamma^{(0)})$: 1) в силу (128) и выбора τ в точках, где δy будет достигать абсолютного максимума ($\delta y>0$) и минимума ($\delta y<0$), будем иметь $\delta\psi>0$ ($\delta\psi<0$); 2) если

$$\operatorname{var}|\bar{y}(x)-\bar{y}_1(x)|<\frac{2k_2h^4}{\log\frac{1}{h}},$$

то в точках, где $y(x)-\bar{y}_1(x)$ будет достигать максимума (минимума), будем иметь $\psi<a$ ($\psi>a$); 3) аналогичные неравенства имеют место, если в соответствующих точках неравенство (138) будет переходить в равенство; 4) в силу лемм 16 и 18 функция ψ не может достигать абсолютного минимума (максимума) в точках, где $y'=\delta_m'$ ($y'=-\delta_m'$), и на дугах наибольшей выпуклости

$$y''=\delta_m''(1+y'^2)^{3/2},\quad y''=-\delta_m''(1+y'^2)^{3/2}.$$

Однако перечисленных четырех свойств линии $\Gamma^{(0)}$ достаточно для того, чтобы применять конструкцию вариации $\delta\Gamma^{(0)}$, данную в работе о струях ([2], с. 431—436).

Этим самым сформулированная теорема полностью доказана.

Поступила 24 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сретенский А. И.** Теория волновых движений. ОНТИ, 1936.
2. **Лаврентьев М. А.** О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй.— В кн.: Мат. сборник. Т. 4 (46), вып. 3, 1938.

К ТЕОРИИ ДЛИННЫХ ВОЛН

М. А. Лаврентьев

РЕЗЮМЕ

1. Как известно, задача о плоском установившемся движении тяжелой идеальной жидкости в канале конечной глубины эквивалентна следующей краевой задаче из теории конформных отображений:

пусть $D(\Gamma)$ есть область в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, ограниченная действительной осью x и кривой $\Gamma: y=y(x)$, $y(x)>0$. Пусть далее $w=f(z, \Gamma)$, $f(\pm\infty, \Gamma)=\pm\infty$ есть функция, реализующая конформное отображение области $D(\Gamma)$ на полосу $0<v<h$ плоскости $w=u+iv$. При заданных постоянных C, λ и h требуется определить Γ так, чтобы в каждой точке Γ имело место соотношение

$$I(\Gamma)=|f'(z, \Gamma)|^2-C+\lambda y=0, \quad C>0, \quad \lambda>0. \tag{1}$$

Если дополнительно допустить, что искомая функция $y(x)$ мало отличается от постоянной, а ее производные малы и в соответствии с этим линеаризовать краевое условие (1), то поставленная задача допускает элементарное решение—искомая функция будет синусоида с произвольными амплитудами и фазой и с периодом, определяемым данными постоянными.

За последние 20 лет появился ряд исследований, в которых путем применения интегральных уравнений давалось строгое решение задачи для случаев, мало отличающихся от линейного.

Наряду с этим Релеем был дан приближенный метод с учетом квадратичного члена для случая волн в каналах малой глубины. Теория Релея дала возможность рассмотреть волны, сильно отличающиеся от синусоидальных, в частности, теория Релея давала решение задачи в виде линии с единственной точкой максимума (уединенная волна).

В данной статье установлен ряд предложений, относящихся к строгой теории волн, близких к релеевским. В основе метода лежат общие граничные свойства однолистных функций, ранее использованных автором при построении качественной теории струйных движений жидкости.

2. В соответствии с условиями, при которых решение Релея можно рассматривать как приближенное решение, будем предполагать, что

число h достаточно мало, а числа C и λ имеют структуру

$$\lambda = \frac{2}{h} + (6 + \alpha)h, \quad C = 3 + (9 + \beta)h^2,$$

где α и β — величины, достаточно малые.

В дальнейшем будем через k_1, k_2,... обозначать постоянные, не зависящие от h.

При этих условиях имеет место общая теорема существования.

Теорема 1. При всех значениях $\omega > k_1\sqrt{h}$, где k_1 достаточно велико, существует кривая $\Gamma\omega : y=y(x,\omega)$ с периодом 2ω

$$y(x+2\omega, \omega)=y(x, \omega)$$

и с вершиной $x=0$, удовлетворяющая функциональному уравнению (1).

Предел линий $\Gamma_\omega : y(x, \omega)$ при $\omega \to \infty$ существует и дает апериодическое решение уравнения (1) с единственной вершиной в точке $x=0$. Это предельное решение есть одинокая волна.

3. Связь между решением $y(x, \omega)$ теоремы 1 и приближенным решением $Y(x, \omega)$, $Y(x+2\omega, \omega)=Y(x, \omega)$, данным Релеем, устанавливается следующими предложениями.

Теорема 2. При условиях, принятых в п. 2, для решения $y(x, \omega)$ имеем

$$|y'(x, \omega)| < k_2h^{3/2},$$
$$|y''(x, \omega)| < k_3h,$$
$$|y'''(x, \omega)| < \frac{k_4}{\log\frac{1}{h}}.$$

Теорема 3. При прежних условиях имеет место оценка

$$|y(x, \omega) - Y(x, \omega)| < \frac{k_5h^2}{\log\frac{1}{h}}.$$

4. Для алгоритмического построения решения $y(x,\omega)$ существенна следующая теорема устойчивости этого решения.

Теорема 4. Если линия $\gamma : y=\varphi(x)$

$$\varphi(x+2\omega)=\varphi(x), \quad \varphi(0)=y(0,\omega)$$

с вершиной в точке $x=0$ отклоняется от решения $\Gamma : y=y(x, \omega)$ больше чем на ε, $\varepsilon > 0$

$$\sup|\varphi(x) - y(x, \omega)| \geqslant \varepsilon,$$

то $|I(\gamma)| > k_6\varepsilon$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

3. **Некоторые** проблемы математики и механики. Сб. работ, посвященный 60-летию акад. М. А. Лаврентьева. Новосибирск, «Наука», 1961.
4. **Некоторые** проблемы математики и механики. Сб. работ, посвященный 70-летию акад. М. А. Лаврентьева. Л., «Наука», 1970.
5. **М. А. Лаврентьев.** До теории довгих хвиль. Сб. трудов Ин-та математики АН УССР, 1947, № 8.
6. **М. А. Лаврентьев.** К теории длинных волн.— «Докл. АН СССР», 1943, т. 41, № 7.