УДК 532.2

РАВНОВЕСНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ПРОВОДНИКА С ТОКОМ

Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева

Институт электрофизики УрО РАН, 620016 Екатеринбург
E-mail: nick@iep.uran.ru

Рассмотрена задача о возможных равновесных конфигурациях свободной поверхности идеально проводящей жидкости, деформируемой неоднородным магнитным полем. С использованием метода конформных отображений получено семейство точных решений задачи; равновесие достигается за счет баланса капиллярного и магнитного давлений. Показано, что согласно этим решениям с увеличением силы тока амплитуда деформации поверхности увеличивается, при этом лунка трансформируется в двумерный пузырь, охватывающий линейный проводник.

Ключевые слова: свободная поверхность, проводящая жидкость, магнитное поле, линейный проводник с током, точные решения.

Введение. Влияние магнитного поля приводит к деформации свободной поверхности помещенной в него жидкости. При этом система может находиться в равновесном состоянии в случае взаимной компенсации магнитных, капиллярных и гравитационных сил.

Во многих работах, посвященных анализу формы поверхности жидкостей, находящихся во внешнем магнитном поле, рассматриваются ферромагнитные жидкости (см., например, [1, 2]). Наиболее сложны для теоретического исследования случаи, когда внешнее магнитное поле является сильнонеоднородным. В работе [3] получены выражения для формы поверхности магнитной жидкости, находящейся в поле вертикальной токонесущей проволочки. Статические деформации свободной поверхности слоя жидкости конечной глубины в магнитном поле прямолинейного проводника с током, горизонтально расположенного под слоем жидкости, рассчитывались в работе [4]. В [5] в пренебрежении капиллярными эффектами получены аналитические решения задач определения формы поверхности намагничивающейся жидкости, находящейся в поле прямолинейного вертикального проводника, а также в поле витка спиралевидного проводника с током (имелось также сильное однородное магнитное поле, создающее в жидкости состояние насыщения). В работе [6] анализировались осесимметричные формы равновесия поверхности жидкости в азимутальном магнитном поле с учетом поверхностного натяжения.

Другим направлением исследований является анализ влияния магнитного поля на форму поверхности проводящих жидкостей. Как известно, высокочастотное магнитное поле проникает лишь в тонкий поверхностный слой проводника. Толщина скин-слоя оценивается по формуле $\lambda \sim (\omega\sigma\mu\mu_0)^{-1/2}$ (ω — частота переменного магнитного поля; σ — удельная

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-96016_урал) и в рамках программы Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” (код проекта УрО РАН 12-П-2-1023).

проводимость жидкости; μ_0 — магнитная постоянная; μ — относительная магнитная проницаемость жидкости). Если толщина слоя λ мала по сравнению с характерным размером структур на поверхности, то можно считать, что поле не проникает в жидкость. В результате взаимодействия магнитного поля и индуцированного им поверхностного электрического тока на поверхности жидкости возникает магнитное давление. При временах, значительно превышающих период осцилляций, задачу можно считать квазистационарной (заметим, что взаимодействие переменного поля с проводящей жидкостью при учете конечности толщины скин-слоя и периода осцилляций может приводить к возникновению и развитию ряда специфических неустойчивостей [7]). При определенных условиях капиллярное и осредненное по времени магнитное давления могут уравновешивать друг друга. Задача нахождения соответствующих равновесных конфигураций формально эквивалентна задаче об идеально проводящей жидкости ($\sigma \to \infty$), находящейся в постоянном магнитном поле, не проникающем внутрь среды.

В случае плоской геометрии задачи, когда все величины зависят лишь от двух координат, анализ равновесных форм поверхности проводящих жидкостей в магнитном поле существенно упрощается. Это обусловлено использованием метода конформных отображений, который позволяет свести задачу о распределении поля вне жидкости с неизвестной формой поверхности к задаче с поверхностью, сечением которой является прямая либо окружность. Подобный подход использовался при анализе конфигураций жидкометаллических колонн в высокочастотном магнитном поле [8]. В пренебрежении капиллярными силами получены аналитические решения задач определения формы поверхности; при учете капиллярности решения строились численно. В работе [9] численно получены решения задач определения формы столба проводящей жидкости, находящегося в поле системы проводников с током. Целью исследований [8, 9] являлся анализ возможности управления формой поверхности расплавленного металла в ряде металлургических процессов. Результаты соответствующих экспериментов приведены, например, в работе [10].

В настоящей работе найдены точные аналитические решения задач определения равновесных конфигураций изначально плоской поверхности идеально проводящей жидкости, возникающих под влиянием внешнего постоянного магнитного поля. Магнитное поле $\boldsymbol{B}$ представляет собой суперпозицию однородного горизонтального магнитного поля и неоднородного поля бесконечной прямой нити с током, расположенной параллельно поверхности жидкости. Как и в работах [8, 9], предполагается, что поле не проникает внутрь жидкости. Заметим, что в рамках этой магнитостатической задачи можно рассматривать также воздействие высокочастотного поля на жидкость с конечной проводимостью.

Согласно полученным решениям в результате конкуренции магнитных и капиллярных сил под нитью с током возникает двумерная лунка, глубина которой определяется величиной протекающего тока. При значительной силе тока лунка трансформируется в цилиндрическую полость, охватывающую проводник. По-видимому, найденные решения могут быть использованы при определении поверхностного натяжения расплавленного металла по геометрии формирующейся лунки.

Следует отметить, что использованный в настоящей работе подход к построению точных стационарных решений задач определения формы поверхности идеально проводящей жидкости во внешнем магнитном поле, основанный на конформном отображении области над жидкостью в параметрическую полуплоскость, аналогичен подходу, применявшемуся при рассмотрении ряда электростатических задач. Аналогия между магнитостатическими и электростатическими задачами обсуждалась, например, в работе [9]. В обоих случаях поле не проникает в идеально проводящую среду, при этом магнитное поле над жидкостью будет направлено по касательной к поверхности, а электрическое поле — по нормали к ней. Основное различие между этими задачами заключается в том, что магнитные и электростатические силы направлены в противоположные стороны. Это обусловливает существенные различия форм поверхности жидкости, находящейся в магнитном и электрическом полях. Для равновесных конфигураций поверхности проводящей жидкости во внешнем электрическом поле найдено большое количество точных решений [11–13]. Наиболее близкая к рассматриваемой геометрия задачи исследовалась в работах [14, 15], в которых аналогом токонесущей прямолинейной нити являлся нитевидный электрод.

1. Исходные уравнения. Пусть бесконечно длинный тонкий прямолинейный проводник с током расположен параллельно свободной поверхности жидкости на расстоянии L от нее. Величину электрического тока, протекающего через проводник, обозначим через I. Введем прямоугольную систему координат (x, y, z), ось z которой совпадает с линейным проводником, а ось y направлена по нормали к невозмущенной поверхности жидкости. Предположим, что задача обладает плоской симметрией, т. е. все величины зависят лишь от переменных x и y (в этом случае поверхность жидкости инвариантна по отношению к сдвигу вдоль проводника). Тогда можно считать, что векторный потенциал магнитного поля $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ имеет только одну z-компоненту: $\boldsymbol{A} = \{0, 0, \psi(x, y)\}$. Распределение магнитного поля определяется единственной скалярной функцией ψ:

$$\boldsymbol{B} = \{\psi_y, -\psi_x, 0\}.$$

В магнитостатике вектор магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j},$$

где $\boldsymbol{j}$ — плотность электрического тока. Учитывая, что в рассматриваемом случае $\boldsymbol{j} = \{0, 0, I\delta(x, y))$, где $\delta(x, y)$ — дельта-функция, и выражая напряженность магнитного поля через z-компоненту векторного потенциала, получаем двумерное уравнение Пуассона

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\mu_0 I \delta(x, y).$$

В случае идеального проводника это уравнение следует решать совместно с условием $\psi = 0$ на поверхности (т. е. магнитное поле направлено по касательной к границе), а также с условием на бесконечном удалении от нити с током

$$\psi \to By, \qquad x^2 + y^2 \to \infty. \tag{1}$$

Последнее условие соответствует наличию внешнего однородного магнитного поля с абсолютным значением индукции, равным B.

Наконец, форма свободной поверхности жидкости определяется условием баланса магнитного и капиллярного давлений

$$(\nabla\psi)^2/(2\mu_0) = T\varkappa + P_0, \tag{2}$$

где T — поверхностное натяжение; $\varkappa$ — локальная кривизна поверхности; $P_0 \equiv B^2/(2\mu_0)$ — разность давлений внутри и вне жидкости. В случае если форма поверхности задается параметрическими выражениями $x = X(u)$, $y = Y(u)$ (u — параметр, монотонно возрастающий при положительном направлении обхода области вне жидкости), ее кривизна определяется формулой

$$\varkappa = \frac{Y_{uu}X_u - X_{uu}Y_u}{(X_u^2 + Y_u^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

Выше отмечено, что с математической точки зрения рассматриваемая задача близка к электростатической задаче об определении возможных равновесных конфигураций поверхности проводящей жидкости во внешнем электрическом поле. Основное различие заключается в знаке перед выражением в левой части условия (2): электростатическое давление входит в аналогичное уравнение с противоположным знаком.

Введем безразмерные обозначения, выполнив замены

$$x \to x \cdot 2\mu_0 TB^{-2}, \quad y \to y \cdot 2\mu_0 TB^{-2}, \quad \psi \to \psi \cdot 2\mu_0 TB^{-1}.$$

При этом вместо силы тока I и расстояния L будем использовать безразмерные комплексы

$$J = -IB/(2T), \qquad l = LB^2/(2\mu_0 T).$$

Для решений, которые будут получены ниже, справедливо неравенство $J > 0$, что соответствует направлению вектора плотности тока, противоположному направлению оси z.

2. Конформные переменные. Введем в рассмотрение комплексный потенциал магнитного поля $\Phi = -\psi + i\varphi$, где функция φ является гармонически сопряженной с z-компонентой векторного потенциала магнитного поля ψ. Комплексный потенциал Φ является аналитической функцией комплексной переменной $w = x + iy$ всюду в области над жидкостью, за исключением точки $w = 0$, в которой находится токонесущая нить. В соответствии с (1) потенциал Φ удовлетворяет следующему условию на бесконечности:

$$\Phi \to iw, \qquad |w| \to \infty. \tag{4}$$

Условие баланса сил на свободной поверхности жидкости (2) можно записать в виде

$$\Big|\frac{d\Phi}{dw}\Big|^2 = \varkappa + 1. \tag{5}$$

Далее выполняется конформное отображение области над жидкостью в верхнюю полуплоскость комплексной параметрической плоскости ξ, удовлетворяющее условию

$$w \to \xi, \qquad |\xi| \to \infty. \tag{6}$$

Пусть $\xi = u + iv$. Тогда форма поверхности жидкости задается условием $v = 0$. Будем считать, что в новых переменных проводник расположен в точке с координатами $u = 0$, $v = a$. В результате задача нахождения комплексного потенциала с условием на неизвестной свободной поверхности жидкости $\operatorname{Re}\Phi = 0$ сводится к задаче с аналогичным условием на прямой $v = 0$. Решение данной задачи, полученное с использованием метода изображений, имеет вид

$$\Phi(\xi) = i\xi - 2J\ln(\xi - ia) + 2J\ln(\xi + ia). \tag{7}$$

Заметим, что это выражение удовлетворяет условию на бесконечности

$$\Phi \to i\xi, \qquad |\xi| \to \infty,$$

являющемуся следствием условий (4), (6).

Неизвестным остается обратное отображение $w = w(\xi)$. Функция $w(\xi)$ является аналитической в полуплоскости $v \geqslant 0$. На бесконечности для этой функции справедливо условие (6), а на границе $v = 0$ — условие баланса давлений (5), которое в конформных переменных принимает вид

$$\Big|\frac{d\Phi}{d\xi}\Big|^2 = \frac{\operatorname{Im}(W_{uu}\bar W_u)}{|W_u|} + |W_u|^2. \tag{8}$$

При выводе соотношений (8) использовалась формула (3) для кривизны, в которой форма поверхности задается параметрическим соотношением

$$w = w(\xi)\big|_{v=0} \equiv W(u) = X(u) + iY(u).$$

Кроме того, учитывалось, что на поверхности выполняется условие

$$\Big|\frac{d\Phi}{dw}\Big| = \Big|\frac{d\Phi}{d\xi}\Big|\,|W_u|^{-1}.$$

При введении вспомогательной аналитической функции $g(\xi) \equiv \sqrt{w_\xi}$ задача существенно упрощается. Введем также комплексную функцию $G(u) \equiv g(\xi)\big|_{v=0}$, которая задает значения функции g на границе $v = 0$. Выражение для свободной поверхности $w = W(u)$ находится из дифференциального уравнения:

$$\frac{dZ}{du} = G^2. \tag{9}$$

С использованием функции G условие баланса сил (8) с учетом (7) записывается в виде

$$\Big(1 - \frac{4Ja}{a^2+u^2}\Big)^2 = 2\,\mathrm{Im}\,(\bar{G}G_u) + (G\bar{G})^2. \tag{10}$$

Из (6) следует, что на бесконечности условие для $g(\xi)$ имеет вид

$$g \to 1, \qquad |\xi| \to \infty. \tag{11}$$

Таким образом, получена задача о нахождении аналитической в полуплоскости $v \geqslant 0$ функции $g(\xi)$, удовлетворяющей граничным условиям (10), (11).

3. Построение решений. Зависимость $g(\xi)$ будем искать в виде

$$g(\xi) = 1 - i\gamma/(\xi + ia), \tag{12}$$

где γ — вещественный параметр. В соответствии с этим представлением функция $g(\xi)$ имеет особенность в точке $\xi = -ia$, т. е. в нижней полуплоскости комплексной переменной ξ. В верхней полуплоскости эта функция является аналитической и удовлетворяет условию на бесконечности (11).

Заметим, что в общем случае зависимость $g(\xi)$ можно представить в виде бесконечного ряда по целым степеням $\xi + ia$. Если удерживать конечное число слагаемых, то можно найти лишь частные решения задачи (т. е. параметры задачи l и J не будут произвольными).

В терминах функции $G(u)$ представление (12) соответствует выражению

$$G(u) = 1 - i\gamma/(u + ia), \tag{13}$$

подставляя которое в граничное условие (10) получаем уравнение

$$1 - \frac{8aJ}{a^2+u^2} + \frac{16a^2J^2}{(a^2+u^2)^2} = \frac{2\gamma}{a^2+u^2} - \frac{2\gamma a(2a-\gamma)}{(a^2+u^2)^2} + 1 - \frac{2\gamma(2a-\gamma)}{a^2+u^2} + \frac{\gamma^2(2a-\gamma)^2}{(a^2+u^2)^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при полюсах одинаковой кратности, имеем два алгебраических уравнения, связывающие параметры a, J, γ:

$$16a^2J^2 = 16a^3J + 2a\gamma^2 + \gamma^4 - 8a^3\gamma + 8a^3\gamma^2 - 4a\gamma^3,$$
$$16a^2J^2 = -2\gamma a(2a-\gamma) + \gamma^2(2a-\gamma)^2.$$

Эти уравнения определяют однопараметрическое семейство решений рассматриваемой задачи. В качестве параметра целесообразно выбрать величину γ, характеризующую степень деформации поверхности жидкости. Выражая расстояние a между проводником и жидкостью (в конформных переменных) и безразмерную силу тока J через параметр γ, находим

$$a(\gamma) = \frac{3}{4}\,\gamma + \frac{1}{4}\,\sqrt{\gamma^2 - 4\gamma}, \qquad J(\gamma) = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{4a(\gamma)}. \tag{14}$$

Для того чтобы расстояние a было вещественной положительной величиной (иначе нарушается аналитичность функции g), значение параметра γ должно находиться в диапазоне

$-1/2 < \gamma < 0$ (случай $\gamma \leqslant 4$ не рассматривается, поскольку он соответствует самопересекающимся решениям для формы поверхности).

Определим форму свободной поверхности жидкости, соответствующую решению вида (12). Подставляя (13) в (9) и интегрируя полученное выражение по u, получаем выражение для функции $W(u)$, определяющей форму поверхности:

$$W(u) = W_0 + u - 2i\gamma \ln{(u + ia)} + \gamma^2/(u + ia). \tag{15}$$

Соотношение (15) соответствует следующему выражению для функции $w(\xi)$:

$$w(\xi) = W_0 + \xi - 2i\gamma \ln{(\xi + ia)} + \gamma^2/(\xi + ia). \tag{16}$$

Постоянную интегрирования W_0 необходимо выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие $w(ia) = 0$, согласно которому в исходных переменных проводник находится в начале координат. В результате находим

$$W_0 = -ia + i\gamma^2/(2a) + 2i\gamma \ln{(2a)} - \pi\gamma.$$

Определим связь между расстоянием l от проводника до точки на поверхности жидкости (по вертикали) в исходных переменных (x, y) и соответствующим расстоянием a в конформных переменных (u, v). Так как этой точке соответствует координата $\xi = 0$, то с учетом (16) получаем

$$l = -\operatorname{Im} w(0) = a - 2\gamma \ln 2 + \gamma^2/(2a). \tag{17}$$

4. Анализ решений. Проведем анализ равновесных конфигураций поверхности жидкости, соответствующих точному решению (15). Разделяя вещественную и мнимую части в (15), получаем

$$\begin{aligned} X(u) &= \operatorname{Re} W(u) = u - 2\gamma \operatorname{arctg}{(u/a)} + \gamma^2 u/(u^2 + a^2), \\ Y(u) &= \operatorname{Im} W(u) = -\gamma \ln{(u^2 + a^2)} - \gamma^2 a/(u^2 + a^2) + Y_0, \end{aligned} \tag{18}$$

где $Y_0 = \operatorname{Im} W_0 = -a + \gamma^2/(2a) + 2\gamma \ln{(2a)}$.

На рис. 1 показаны соответствующие выражениям (18) формы свободной поверхности жидкости при различных значениях параметра γ в интервале $-1/2 < \gamma < 0$.

При $\gamma \to 0$ из (14), (17) в основном порядке разложения по γ для параметров a, J, l получаем

$$a = \sqrt{|\gamma|}/4 + O(\gamma), \qquad J = \sqrt{|\gamma|} + O(\gamma), \qquad l = \sqrt{|\gamma|}/4 + O(\gamma).$$

Иными словами, величины a, J, l стремятся к нулю по закону $\sqrt{|\gamma|}$. При этом влияние магнитного поля линейного проводника с током становится пренебрежимо малым и равновесная поверхность превращается в плоскость.

С увеличением абсолютного значения параметра γ характерные углы наклона увеличиваются. В пределе $\gamma \to -1/2$ область, занимаемая жидкостью, под действием магнитных сил стремится замкнуться вокруг проводника, образовав двумерный пузырь, соединенный "шейкой" с внешней областью (см. рис. 1). Для этого случая найдем разложения величин a, J, l по малому параметру $\varepsilon = \gamma + 1/2$:

$$a = \frac{\varepsilon}{3} + O(\varepsilon^2), \qquad J = \frac{3}{16\varepsilon} - \frac{1}{6} + O(\varepsilon), \qquad l = \frac{3}{8\varepsilon} - \frac{4}{3} + \ln 2 + O(\varepsilon).$$

Таким образом, при $\gamma \to -1/2$ $a \to 0$, $J \to \infty$, $l \to \infty$, т. е. сила тока и расстояние от поверхности до нити с током в координатах (x, y) будут неограниченно возрастать, а аналогичное расстояние в координатах (u, v) — убывать.

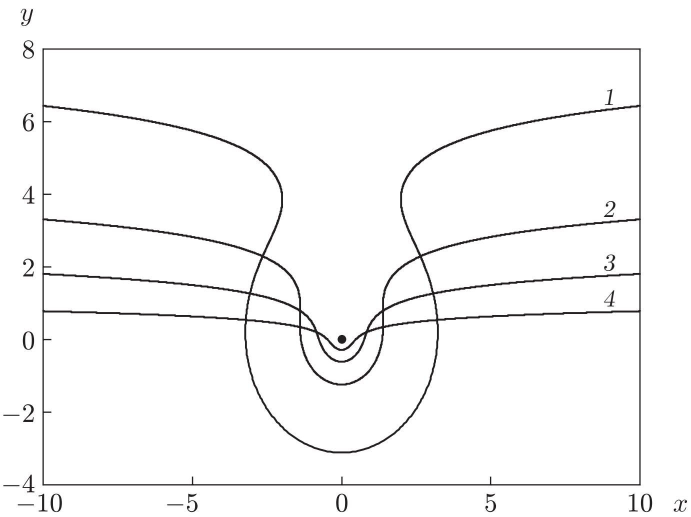

Рис. 1. Равновесные формы свободной поверхности жидкости, находящейся во внешнем неоднородном магнитном поле, при различных значениях γ, J: *1* — $\gamma=-0{,}4$, $J\approx 1{,}69$; *2* — $\gamma=-0{,}3$, $J\approx 0{,}74$; *3* — $\gamma=-0{,}2$, $J\approx 0{,}41$; *4* — $\gamma=-0{,}1$, $J\approx 0{,}21$; точка — положение проводника с током

Найдем ширину "шейки" и радиус пузыря при $\gamma\to -1/2$. В области "шейки" справедливо неравенство $|u|\gg a$. Форму "шейки" можно найти из (18), разлагая все параметры по ε:

$$x=X(u)=u+(4u)^{-1}\pm\pi/2+O(\varepsilon),\qquad y=Y(u)=Y_0+\ln|u|+O(\varepsilon) \tag{19}$$

(верхний знак соответствует $u>0$, нижний — $u<0$). При этом для постоянной Y_0 справедливо выражение

$$Y_0=3/(8\varepsilon)-\ln\varepsilon-4/3+\ln(3/2)+O(\varepsilon).$$

Введем вспомогательную переменную

$$\tilde{y}=y-Y_0+\ln 2,$$

что соответствует переносу начала координат в середину "шейки". Исключая переменную u из уравнений (19), получаем выражение для формы поверхности вблизи "шейки"

$$x=\pm(\operatorname{ch}\tilde{y}+\pi/2)+O(\varepsilon),$$

из которого следует, что полуширина "шейки" r_0 соответствует значению x при $\tilde{y}=0$:

$$r_0\equiv x\big|_{\tilde{y}=0}=1+\pi/2+O(\varepsilon).$$

Определим радиус пузыря R_0. При $\gamma\to -1/2$ параметр u внутри пузыря имеет тот же порядок малости, что и величина a, а следовательно, и ε. Введем в формулах (18) вспомогательный параметр $\tilde{u}=u/\varepsilon$, значения которого внутри пузыря будут конечными. Разлагая полученные выражения по малому параметру ε, находим координаты поверхности пузыря в основном порядке разложения:

$$x=X(\varepsilon\tilde{u})\approx\frac{9\tilde{u}}{4\varepsilon(9\tilde{u}^2+1)},\qquad y=Y(\varepsilon\tilde{u})\approx-\frac{3}{4\varepsilon(9\tilde{u}^2+1)}+\frac{3}{8\varepsilon}.$$

Нетрудно показать, что эти уравнения задают окружность с центром в начале координат и радиусом, приблизительно равным l. Действительно,

$$X^2+Y^2\approx {R_0}^2,\qquad R_0=3/(8\varepsilon)\approx l.$$

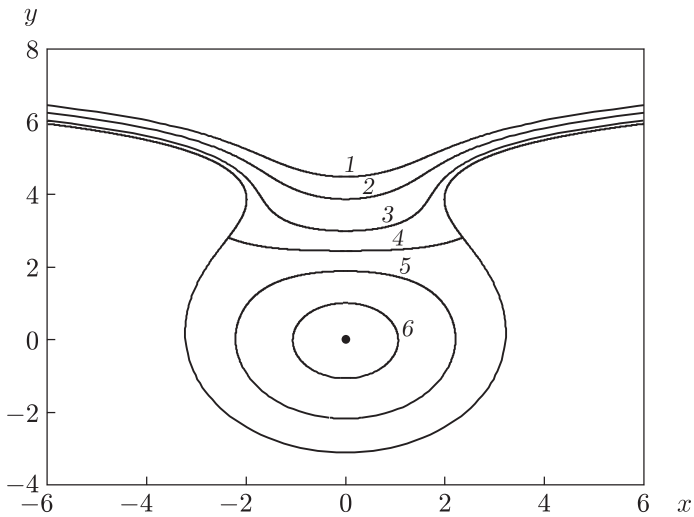

Рис. 2. Распределение магнитного поля над поверхностью жидкости при $\gamma = -0{,}4$: *1* — $\psi = -0{,}5$; *2* — $\psi = -0{,}3$; *3* — $\psi = -0{,}1$; *4* — $\psi = 0$; *5* — $\psi = 0{,}1$; *6* — $\psi = 0{,}3$; точка — положение проводника с током

Таким образом, при $\gamma \to -1/2$ радиус пузыря стремится к бесконечности, в то время как ширина “шейки” остается постоянной. Как следствие отношение полуширины “шейки” r_0 к радиусу пузыря R_0 будет стремиться к нулю в соответствии с выражением

$$r_0/R_0 = \varepsilon(8 + 4\pi)/3 + O(\varepsilon^2).$$

Рассмотрим распределение магнитного поля над жидкостью для полученных решений. Силовые линии поля определяются условием $\psi = \mathrm{const}$. Из (7) следует, что потенциал ψ в переменных u и v задается выражением

$$\psi = v + J\ln\left((v - a)^2 + u^2\right) - J\ln\left((v + a)^2 + u^2\right).$$

Отсюда найдем зависимость $u(\psi, v)$, которая в явном виде описывает геометрию силовых линий магнитного поля в параметрической плоскости (u, v):

$$u(\psi, v) = \pm\Big\{\big(\mathrm{e}^{(\psi-v)/J} - 1\big)^{-1}\big[(v - a)^2 - \mathrm{e}^{(\psi-v)/J}\,(v + a)^2\big]\Big\}^{1/2}.$$

Выполняя замену $\xi \to u(\psi, v) + iv$ в отображении (16) и затем разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$x = \operatorname{Re} W(u(\psi, v) + iv), \qquad y = \operatorname{Im} W(u(\psi, v) + iv).$$

Эти выражения в параметрической форме (роль параметра играет величина v) задают семейство силовых линий магнитного поля в плоскости (x, y). На рис. 2 показаны характерные силовые линии для равновесной конфигурации поверхности жидкости при $\gamma = -0{,}4$, соответствующие значениям $\psi = -0{,}5$; $-0{,}3$; $-0{,}1$; 0; 0,1; 0,3. Заметим, что условию $\psi = 0$ соответствует как свободная поверхность жидкости, так и сепаратриса, разделяющая области с различной топологией магнитного поля.

Заключение. В работе получено однопараметрическое семейство точных решений для равновесных конфигураций свободной поверхности жидкости в магнитном поле параллельного ей бесконечно длинного прямолинейного тонкого проводника с током. Жидкость считалась идеальным проводником. Это соответствует тому, что силовые линии магнитного поля не проникают в жидкость, а направлены по касательной к поверхности. Для жидкости с конечной проводимостью аналогичная ситуация реализуется в высокочастотном поле. В этом случае толщина скин-слоя значительно меньше характерного масштаба деформаций поверхности жидкости.

Под влиянием неоднородного магнитного поля в жидкости появляется двумерная лунка (поверхность инвариантна по отношению к сдвигу вдоль оси z), глубина которой увеличивается с ростом протекающего по проводнику электрического тока. При достаточно больших токах образуется пузырь: жидкость охватывает проводник, формируя цилиндрическую полость, связанную с внешней областью "шейкой", относительная ширина которой уменьшается с увеличением силы тока. В пределе бесконечного тока отношение ширины "шейки" к радиусу пузыря обращается в нуль.

Полученные решения можно рассматривать как нелинейную суперпозицию двух тривиальных точных решений, соответствующих условию $I = 0$ либо $B = 0$. В первом случае внешнее магнитное поле является однородным и равновесная конфигурация поверхности представляет собой плоскость. Во втором случае формальным решением задачи является цилиндрическая полость круглого сечения, охватывающая проводник с током. При этом в плоскости (x, y) границей является либо прямая, либо окружность с центром в точке, соответствующей положению линейного проводника. Распределение поля над жидкостью имеет вид первого тривиального решения при $\psi < 0$ и второго тривиального решения при $\psi > 0$; при этом условие $\psi = 0$ задает сепаратрису.

Следует отметить, что использованный для построения решений подход можно обобщить на случай произвольного числа параллельных токонесущих нитевидных проводников. Для одного проводника зависимость $G(u)$, задаваемая выражением (13), содержит один простой полюс. Для N проводников эта зависимость будет содержать N полюсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rosensweig R. E.** Magnetic fluids // Ann. Rev. Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 437–463.
2. **Шлиомис М. И.** Магнитные жидкости // Успехи физ. наук. 1974. Т. 112, вып. 3. С. 427–458.
3. **Krueger D. A., Jones T. B.** Hydrostatic profile of ferrofluid around a vertical current-carrying wire // Phys. Fluids. 1974. V. 17. P. 1831–1833.
4. **Gotoh K., Murakami Y., Ohkita T.** Deformation of the free surface of horizontal magnetic fluid layer by current-induced magnetic fields // Fluid Dynam. Res. 1992. V. 10. P. 1–9.
5. **Берковский Б. М., Орлов Л. П.** К исследованию формы свободной поверхности и аналога пинч-эффекта в намагничивающихся жидкостях // Магнит. гидродинамика. 1973. Вып. 4. С. 38–44.
6. **Борисов И. Д.** О равновесных формах поверхности намагничивающейся жидкости // Магнит. гидродинамика. 1976. Вып. 4. С. 11–18.
7. **Fautrelle Y., Sneyd A. D.** Instability of a plane conducting free surface submitted to an alternating magnetic field // J. Fluid Mech. 1998. V. 375. P. 65–83.
8. **Shercliff J. A.** Magnetic shaping of molten metal columns // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1981. V. 375. P. 455–473.
9. **Blyth M. G., Vanden-Broeck J.-M.** Magnetic shaping of a liquid metal column and deformation of a bubble in a vortex flow // SIAM J. Appl. Math. 2005. V. 66. P. 174–186.
10. **Etay J., Gagnoud A., Garnier M.** Le problème de frontièr libre en lévitation électromanétique // J. Mech. Theor. Appl. 1986. V. 5. P. 911–934.
11. **Зубарев Н. М.** Точное решение для стационарного профиля поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25, вып. 22. С. 79–83.

12. **Zubarev N. M., Zubareva O. V.** Exact solutions for equilibrium configurations of charged conducting liquid jets // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. 016307.
13. **Зубарев Н. М., Зубарева О. В.** Равновесные конфигурации поверхности проводящей жидкости в неоднородном внешнем электрическом поле // Журн. техн. физики. 2011. Т. 81, вып. 1. С. 42–52.
14. **Зубарев Н. М., Зубарева О. В., Иванов П. К.** Точные решения для равновесных конфигураций поверхности проводящей жидкости в электрическом поле заряженной прямой нити // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35, вып. 20. С. 84–88.
15. **Zubarev N. M., Zubareva O. V.** Exact solutions for the shape of a two-dimensional conducting liquid drop in a non-uniform electric field // Physica D. 2012. V. 241. P. 921–928.

Поступила в редакцию 15/V 2012 г.