УДК 539.374

СХОДЯЩАЯСЯ УДАРНАЯ ВОЛНА В ИДЕАЛЬНОЙ НЕУПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

И. В. Симонов

(*Москва*)

Решена краевая задача о симметричной фокусировке ударной волны в среде с переменной плотностью при нагрузке, принимающей постоянное значение (модель пористого тела с переменной начальной пористостью). Исследована асимптотика решения. Фокусировка в однородной среде изучена в [1]. Рассмотрена одна обратная задача, имеющая отношение к выбору оптимального режима прессования. Затронут вопрос об ограничении применимости модели.

Пусть к поверхности сферы (цилиндра, слоя), начальная плотность которой является дифференцируемой функцией радиуса ($\rho=\rho(r)$), в момент времени $t=0$ прикладывается равномерная нагрузка $p_0(t)$. Примем, что нагрузка сразу достигает конечного значения $p_0(0)>0$ и далее не возрастает (физический смысл этого условия — взрыв на поверхности); среда идеальная (без касательных напряжений). Плотность среды в любой точке становится равной $\rho_1=\mathrm{const}$ $(0<\rho<\rho_1)$ и остается таковой, если давление в этой точке достигло значения, сколь-нибудь большего нуля. Такая простейшая модель приближенно описывает поведение тела с переменной пористостью и однородным скелетом при высоких нагрузках.

От поверхности к центру тогда будет распространяться ударная волна. Процесс фокусировки ударной волны в однородной среде изучался в [1]. Целью данного сообщения является исследование влияния неоднородности на движение среды за фронтом сходящейся ударной волны. В частности, представляет интерес изменение степени кумуляции ударной волны. Ожидается, как и в случае идеального газа переменной плотности [2], что выбором $\rho(r)$ можно либо ослабить, либо усилить кумуляцию.

В области, ограниченной движущейся поверхностью $r=R_1(t)$ и фронтом ударной волны $r=R(t)$, выполняются уравнения движения и неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial ur^{\nu}}{\partial r}=(R_1(t)<r<R(t)), \tag{1}$$

а на фронте ударной волны и поверхности — следующие условия:

$$u=u_*(t)=\theta(R)\dot{R},\ p=p_*(t)=\rho(R)\theta(R)\dot{R}^2\quad (r=R(t)), \tag{2}$$

$$P=P_0(t)\quad (r=R_1(t)),$$

где U — массовая скорость; $\nu=0,\ 1,\ 2$, что соответствует случаям слоя, цилиндра и сферы; $\theta(R)=1-\rho(R)/\rho_1$; точка сверху означает производную по времени; $R(0)=R_1(0)=R_0$.

Из уравнения неразрывности и первого условия на фронте следует

$$u=\theta(R)\dot{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{\nu};\ R_1^{\nu+1}=R_0^{\nu+1}+(\nu+1)\int_{R_0}^{R}\theta(y)y^{\nu}dy. \tag{3}$$

Подставляя полученное выражение для u в первое уравнение (1) и интегрируя по r от $r=R$ до $r=R_1$, придем к следующему уравнению для $R(t)$:

$$
(4)\qquad R\ddot{R}+\frac{1}{2}A_\nu\dot{R}^2=B_\nu'\quad (R(0)=R_0,\dot{R}^2(0)=p_0(0)/[\rho(R_0)\,\theta(R_0)]);
$$

$$
A_0=2\left[R(\ln\theta)_R'-\frac{1-\theta}{R_1/R-1}\right];\quad B_0'=-\frac{p_0(t)}{\rho_1\theta(R)(R_1/R-1)};
$$

$$
A_1=2\left[1+R(\ln\theta)_R'-\frac{1-(\theta/2)\left(1+R^2/R_1^2\right)}{\ln(R_1/R)}\right];\ B_1'=-\frac{p_0(t)}{\rho_1\theta(R)\ln(R_1/R)};
$$

$$
A_2=2\left[2+R(\ln\theta)_R'-\frac{1-(\theta/2)\left(1+R^4/R_1^4\right)}{1-R/R_1}\right];\ B_2'=-\frac{p_0(t)}{\rho_1\theta(R)(1-R/R_1)}.
$$

Введем безразмерные переменные $x=R/R_0$, $g=\dot{R}^2/\dot{R}^2(0)$, а чертой сверху обозначим величины, отнесенные к своим значениям при $t=0$ или $x=1$.

Принимаем, что p_0 задана как функция радиуса фронта x [1]. Из решения задачи можно затем определить функцию $p_0(t)$, которой соответствует полученное решение (полуобратный метод). Последовательными приближениями, вероятно, можно построить решение для любой непрерывной функции $p_0(t)$. Такой способ задания граничного условия не играет роли в исследовании асимптотики решения при $x\to 0$ [1].

Не меняя обозначений, предполагаем зависимость всех функций от x вместо t. Уравнение (4) примет вид

$$
(5)\qquad x\frac{dg}{dx}+A_\nu g=B_\nu\quad (g(1)=1).
$$

Здесь

$B_\nu=-\,Q(x)/\varphi_\nu(x_\nu,\ x)$, где

$$
\varphi_0=x_0/x-1,\ \varphi_1=\ln(x_1/x),\ \varphi_2=1-x/x_2;
$$

$$
Q(x)=2\theta(1)[1-\theta(1)]\overline{p_0}(x)/\theta(x);
$$

$$
x_\nu^{\nu+1}=1+(\nu+1)\int_1^x\theta(y)\,y^\nu dy.
$$

Аналогично [1], выделяя особенности у несобственных интегралов в решении (5), получим

$$
(6)\qquad g=\frac{\exp[-G_\nu(x)]}{\theta^2(x)\,\psi_\nu^2(x)}\int_1^x\theta^2(\xi)\,\psi_\nu^2(\xi)\,B_\nu(\xi)\exp[G_\nu(\xi)]\frac{d\xi}{\xi}\quad (0<x<1).
$$

Здесь

$$
G_0=2\int_1^x\left[\frac{1}{1-\xi}-\xi_0\frac{1-\theta(\xi)}{1-\xi_0}\right]\frac{d\xi}{\xi},
$$

$$
G_1=\int_1^x\left[\frac{2-\theta(\xi)\left(1+\xi_1^2\right)}{\ln\xi_1}-\frac{2}{\ln\xi}\right]\frac{d\xi}{\xi},
$$

$$
G_2=\int_1^x\left[\frac{2}{1-\xi}-\frac{2-\theta(\xi)\left(1+\xi_2^4\right)}{1-\xi_2}\right]\frac{d\xi}{\xi},
$$

где

$$\xi_\nu = \xi / \left[1 + (\nu + 1) \int\limits_1^\xi \theta(y) y^\nu dy \right]^{\frac{1}{\nu+1}};$$

$$\psi_0 = x^{-1} - 1, \ \psi_1 = x \ln x, \ \psi_2 = x(1 - x).$$

Выражения для величин на фронте следуют из (2)

(7) $$\bar{p}_* = \bar{\rho}(x)\theta(x)g(x); \ \bar{u}_* = \bar{\theta}(x)\sqrt{g(x)}.$$

За фронтом массовая скорость согласно (3) имеет вид

$$u = u_*(x/z)^\nu \quad (z = r/R_1),$$

а $\bar{p}(x, z)$ определим, интегрируя первое уравнение (1) от некоторой точки z внутри области до $z = x$

$$\bar{p} = \bar{p}_* - \left[\left(xg\bar{\theta}' + \frac{1}{2} g'\bar{\theta} + \nu g\bar{\theta} \right) \varphi_\nu(z, x) - \frac{1}{2} g(1 - x^{2\nu}/z^{2\nu}) \theta\bar{\theta} \right] [1 - \theta(1)].$$

Здесь штрихом отмечены производные по x.

Функцию $x = x(t)$ можно определить из уравнения

$$t = \frac{R_0}{\dot{R}(1)} \int\limits_x^1 \frac{dy}{\sqrt{g(y)}}.$$

Тогда искомые функции будут известны как функции переменных z и t.

Асимптотику $g(x)$ при $x \to 0$ вычислим из (6)

(8) $$g \sim \frac{1}{\theta^2} (\nu = 0), \quad g \sim \frac{s^{\theta_0 - 2}(x)}{x^2\theta^2} \quad (\nu = 1), \quad g \sim \frac{1}{x^{2+\theta_0}\theta^2} \quad (\nu = 2),$$

$$\left(\theta_0 = \theta(0), \quad s = \ln \frac{x_1(0)}{x}, \right.$$

$$\left. x_1(0) = \left[1 - 2 \int\limits_0^1 \theta(y) y dy \right]^{1/2} \right).$$

Асимптотика величин на фронте следует из (7). Если θ и ρ одновременно принимают не нулевые значения при $x = 0$, то асимптотика всех функций при $x \to 0$ не отличается от случая однородной среды. Пусть распределение плотности $\rho/\rho_1 \sim x^\alpha (\alpha > 0)$ при $x \to 0$. Тогда $\theta \sim 1$ и

(9) $$p_* \sim x^\alpha, \ \dot{R} \sim 1, \ u_* \sim 1 \ (\nu = 0),$$

$$p_* \sim \frac{s^{-1}}{x^{2-\alpha}}, \quad \dot{R} \sim \frac{s^{-1/2}}{x}, \quad u_* \sim \frac{s^{-1/2}}{x} \quad (\nu = 1),$$

$$p_* \sim \frac{1}{x^{3-\alpha}}, \quad \dot{R} \sim \frac{1}{x^{3/2}}, \quad u_* \sim \frac{1}{x^{3/2}} \quad (\nu = 2).$$

Асимптотика приращения удельной внутренней энергии на фронте $e = \frac{1}{2}\dot{R}^2(1)\theta^2 g$, которое здесь является приращением тепловой части внутренней энергии и определяет распределение температуры в среде [1], имеет вид

$$e_* \sim 1 \ (\nu = 0), \ e_* \sim x^{-2}s^{-1} (\nu = 1), \ e_* \sim x^{-3} (\nu = 2).$$

Рассмотрим теперь случай $\theta \sim x^{\beta}$, $\rho/\rho \to 1$ $(x \to 0,\ \beta > 0)$

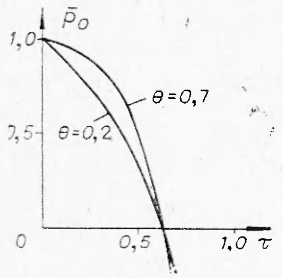
$$p_* \sim x^{-\beta},\ \dot{R} \sim x^{-\beta},\ u_* \sim 1,\ e_* \sim 1\ (\nu=0),$$
$$p_* \sim \frac{s^{-2}}{x^{2+\beta}},\ \dot{R} \sim \frac{s^{-1}}{x^{1+\beta}},\ u_* \sim \frac{s^{-1}}{x},\ e_* \sim \frac{s^{-2}}{x^2}\ (\nu=1), \tag{10}$$
$$p_* \sim \frac{1}{x^{2+\beta}},\ \dot{R} \sim \frac{1}{x^{1+\beta}},\ u_* \sim \frac{1}{x},\ e_* \sim \frac{1}{x^2}\ (\nu=2).$$

Из (9), (10) следует, что асимптотика функций u_* и e_* слабо зависит от $\rho(x)$: для $\nu=1$, 2 они имеют особенность при $x \to 0$, порядок которой несколько изменяется при переходе от случая нулевой плотности в центре к случаю нулевой пористости в центре. Сильнее неоднородность сказывается на поведении p_*. При $\rho/\rho_1 \sim x^3$ $(\nu=2)$ и $\rho/\rho_1 \sim x^2 s(x)$ $(\nu=1)$ давление на фронте $p_* \sim \mathrm{const}$. Если степень убывания плотности больше или меньше указанной, давление либо убывает, либо растет при приближении волны к центру. Интересно отметить, что при $\alpha+\beta=1$ степень роста p_* $(\nu=2)$ одинакова в (9) и (10).

Полученные результаты могут представить интерес для такого рода приложений, как динамическое прессование металлических порошков, в частности, для определения оптимального режима прессования, который можно сформулировать в виде обратной задачи, например, задачи определения формы и величины приложенного импульса для получения заданного режима прессования. Рассмотрим один частный случай этой задачи для однородного цилиндрического образца ($\rho=\mathrm{const}$). Определим $p_0(t)$ из условия, что $p_*(t) \equiv \mathrm{const}=p_0(0)$ (равномерная пропрессовка образца). Тогда $\dot{R}(t)=\mathrm{const}$ и $g \equiv 1$. Уравнение (5) превращается в уравнение для определения $p_0(x)$, а x играет роль безразмерного времени $(x=1+\dot{R}t/R_0)$.

Получим $\bar{p}_0=\left[1+\ln\tilde{x}-\frac{\theta}{2}\left(1+\tilde{x}^2\right)\right]\Big/(1-\theta)$. Здесь $\tilde{x}=x/(1-\theta+\theta x^2)^{1/2}$.

На фигуре показаны графики зависимости $\bar{p}_0=\bar{p}_0(\tau)(\tau=-\dot{R}t/R_0)$ для $\theta=0{,}2$; 0,7. Видно, что при $\tau>0{,}63$ $(x<0{,}37)$ для поддержания $p_*=\mathrm{const}$ требуется прикладывать отрицательные давления. Отметим, что точка $x \approx 0{,}37$ является началом роста p_* в однородной среде при любой функции $p_0(x)$. Если при $\tau>0{,}63$ давление p_0 оставить нулевым, то $\approx 5/7$ массы цилиндра будет пропрессовано в одинаковых условиях. Полностью равномерную пропрессовку при этом можно в принципе обеспечить выбором $\rho(x)$.



В заключение сделаем некоторые замечания по вопросу ограничения применимости модели уплотняющегося тела к реальным средам. В работе [1] отмечалось, что условием применимости модели является $\dot{R}^2/c^2 \ll 1$, где c — скорость звука за фронтом ударной волны. Это условие, очевидно, нарушается при $\theta \to 0$ (при этом $|\dot{R}|$ становится порядка c) и при фокусировке, поскольку $|\dot{R}|$ растет с ростом амплитуды волны быстрее, чем скорость звука. Таким образом, из-за сжимаемости скелета с ростом p_* степень кумуляции будет изменяться в сторону степени кумуляции сплошного материала и не будет столь высокой, как предсказывает изложенная теория. Поэтому асимптотические формулы (8) — (10) и результаты работы [1] следует рассматривать как оценки сверху реальных процессов кумуляции ударных волн в пористых средах.

Поступила 30 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Симонов И. В.** О сходящейся ударной волне в идеально неупругой среде и устойчивости кумуляции.— ПМТФ, 1975, № 5.
2. **Черноусько Ф. Л.** Сходящиеся ударные волны в газе переменной плотности.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.

УДК 550.348.42

РАСЧЕТ ВЫХОДА ГАЗООБРАЗНЫХ ПРОДУКТОВ ПОДЗЕМНОГО ВЗРЫВА В АТМОСФЕРУ

В. В. Адушкин, П. Б. Каазик

(*Москва*)

Произведен расчет нестационарного режима фильтрации газа из котловой полости камуфлетного подземного взрыва через разрушенную пористую среду. Вычисления выполнены для сферически-симметричного и плоского движения газа. Использован двучленный закон фильтрации. Получено пространственно-временное распределение давления газа внутри среды. Построены годографы движения «фронта» фильтрации и границы контакта продуктов взрыва с воздухом. Исследовано влияние фильтрационных характеристик грунта и величины давления в котловой полости. На основании известных данных по проницаемости некоторых типов пород, подвергшихся действию взрыва, определено время выхода газа в атмосферу. Установлено изменение потока газа во времени в зависимости от глубины взрыва.

Камуфлетные подземные взрывы характеризуются незначительным подъемом свободной поверхности грунта. Тем не менее в подавляющем большинстве подобных взрывов в результате воздействия волн сжатия и растяжения, а также преимущественного перемещения вверх массив грунта вплоть до свободной поверхности оказывается в разрушенном состоянии. Поэтому на заключительной стадии развития камуфлетных взрывов под действием избыточного давления в котловой полости происходит процесс проникновения взрывных газов в многочисленные трещины и поры окружающего массива и последующее истечение в атмосферу. Для описания такого движения газа могут быть использованы представления теории фильтрации [1—3]. Подобный механизм выхода газообразных продуктов взрыва типичен для достаточно прочных пород, когда обрушение котловой полости либо отсутствует, либо происходит достаточно поздно.

При взрывах в слабых грунтах возможен принципиально другой механизм выхода газообразных продуктов в атмосферу за счет непрерывного обрушения котловой полости вплоть до свободной поверхности. Некоторые результаты измерений времен выхода газа в атмосферу по такому механизму в случае идеально сыпучей среды изложены в работе [4]. В реальных условиях проведения подземных взрывов в зависимости от масштаба взрыва и геологического строения массива возможно сочетание обоих механизмов выхода газа.