УДК 533.6.011.8 : 532.526

# ВЛИЯНИЕ ЭНТРОПИЙНОГО СЛОЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

*Л. А. Соколов*

(*Москва*)

В работах [1, 2] развита асимптотическая теория течений со свободным взаимодействием. Простая форма уравнений и краевых условий, общая форма закона подобия дают возможность применять ее к довольно широкому классу течений. Для одних из этих течений получены численные решения, для других приведены постановки задач, выписаны уравнения, краевые условия или приведены соображения о характере течения. В [3] проведено исследование стационарных гиперзвуковых течений вязкого газа, имеющих энтропийные слои. В [4] проведено исследование уравнений, которым подчиняются нестационарные процессы в пограничном слое с самоиндуцированным давлением.

В данной работе теория течений со свободным взаимодействием применяется к исследованию нестационарных гиперзвуковых течений вязкого газа, имеющих энтропийные слои.

Рассмотрим обтекание гиперзвуковым потоком вязкого газа пластины конечной длины $l$, параллельной набегающему потоку ($M_\infty \gg 1$). Индексом $\infty$ отмечены параметры газа в невозмущенном стационарном состоянии. Предположим, что число Рейнольдса $Re_0 = \rho_0 u_\infty l/\mu_0$ велико. Здесь $\rho$, $u$, $\mu$ — плотность, тангенциальный компонент скорости и коэффициент динамической вязкости соответственно, индексом 0 отмечены значения параметров, вычисленные при температуре торможения набегающего потока. Будем считать, что $M_\infty Re_0^{-1/2} \ll 1$. Пусть между пограничным слоем и гиперзвуковым потоком имеется энтропийный слой толщиной $\delta_{энт}$, т. е. область невязкого течения, в которой энтальпию торможения можно принять равной ее величине в гиперзвуковом потоке, а давление торможения и плотность значительно меньше соответствующих величин в гиперзвуковом потоке. Поэтому число $M_{энт} \sim O(1)$ и плавно меняется от некоторого сверхзвукового значения на внешней границе пограничного слоя до гиперзвукового значения $M_\infty \gg 1$.

Обозначим через $t$ время, $x$, $y$ — декартовы координаты, $u$, $v$ — составляющие вектора скорости вдоль этих осей, $\rho$ — плотность, $p$ — давление.

В соответствии с общей теорией [1, 2] и ее применением к режиму слабого гиперзвукового взаимодействия при температурном факторе $O(1)$ [5] и согласно [3] будем считать, что при свободном взаимодействии нестационарного пограничного слоя с внешним потоком образуются четыре области с существенно различными свойствами. В верхней области I эффекты вязкости и теплопроводности малы, вихри в течении отсутствуют. В средних областях II (внешняя часть пограничного слоя) и IV (область энтальпийного слоя) влиянием диссипативных факторов также можно пренебречь, но поле скоростей является завихренным. Область III — это узкие пристеночные зоны вязкого пограничного слоя, в которой малые перепады давления из-за большой величины градиента давления вызывают изменение скорости того же порядка, что и сама скорость. В формировании потока в этой области вязкость играет определяющую роль. Что касается теплопроводности, то ее роль, по крайней мере при температурном факторе $\sim O(1)$, второстепенна, так как при малых скоростях сжимаемость газа не проявляется. Внешняя часть пограничного слоя (область II) при $g_w \sim 1$ ($g_w$ — температурный фактор) не оказывает в первом приближении существенного влияния на течение.

Согласно [3], имеем следующие оценки для функций течения:

$$\Delta p/p \sim (M_\infty\varepsilon)^{1/2},\quad \Delta x/l \sim (M_\infty\varepsilon)^{3/4},$$
$$\delta_3/l \sim \varepsilon(M_\infty\varepsilon)^{1/4},\quad \varepsilon = \delta_0/l \sim Re_0^{-1/2}, \tag{1}$$
$$\delta_4/l \sim \varepsilon/(M_\infty\varepsilon)^{1/4},\quad u_3/u_\infty \sim (M_\infty\varepsilon)^{1/4}.$$

Здесь и ниже индексом внизу отмечен номер области, к которой относится соответствующая функция, например $\delta_3$ — толщина области III ($\delta_0$ — толщина невозмущенного пограничного слоя).

Параметр подобия, характеризующий роль энтропийного слоя в процессе взаимодействия, можно записать в виде $N = M_\infty \delta_4 / (M_\infty \varepsilon)^{1/4}$. Если положить $t = (l/u_\infty)[t_0 + (M_\infty \varepsilon)^{1/2} t_i]$, $i = 1, 2, 3, 4$, то существенно, что все уравнения, которые описывают процессы в различных областях, за исключением области III, не содержат производных по времени. Это означает, что потоки в областях I, IV и II ведут себя инертно, успевая мгновенно подстраиваться под те возмущения, которые возникают в пристеночной области III. Этот результат получен в [4], правда, при некоторой другой нормировке для времени. Вычисленные выше оценки позволяют ввести асимптотические представления для функций течения и, следуя методу [1, 2], сформулировать краевые задачи.

Введем следующие переменные:

$$x = X \frac{\rho_w}{\mu_w a^2} \left( \frac{a \mu_w u_\infty^2}{\rho_w M_\infty^2} \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{3/4}, \quad u = \left( \frac{a \mu_w u_\infty^2}{\rho_w M_\infty^2} \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{1/4} U, \tag{2}$$

$$\Delta p = \rho_w \left( \frac{a \mu_w u_\infty^2}{\rho_w M_\infty^2} \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{1/2} P, \quad a = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{0w},$$

$$\delta_3 = \frac{1}{a} \left( \frac{a \mu_w u_\infty^2}{\rho_w M_\infty^2} \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{1/4} \Lambda^*; \quad y = \frac{1}{a} \left( \frac{a \mu_w u_\infty^2}{M_\infty^2 \rho_\infty} \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right) Y, \quad \Delta y_4 =$$

$$= \frac{l L_{\text{энт}} \rho_w}{\rho_\infty} \left( \frac{a \mu_w u_\infty^2}{\rho_w M_\infty^2} \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right) \Delta_4,$$

$$L_{\text{энт}} = \frac{1}{\gamma l} \int_0^\infty \left( \frac{1}{M_4^2} - 1 \right) dy < 0, \quad t = \frac{\rho_w}{\mu_w a^2} \left( \frac{a \mu_w u_\infty^2}{\rho_w M_\infty^2} \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{1/2} \tau.$$

Формулы (2) одновременно с введением асимптотических масштабов обеспечивают переход к безразмерным переменным. Для области III получаем

$$\begin{gathered} \partial U/\partial \tau + U \partial U/\partial X + V \partial U/\partial Y = -\partial P/\partial X + \partial^2 U/\partial Y^2, \\ \partial U/\partial X + \partial V/\partial Y = 0, \\ U = 0, \ V = 0 \text{ при } Y \to 0, \\ U = Y + A(\tau, X) \text{ при } Y \to \infty \text{ или } X \to -\infty. \end{gathered} \tag{3}$$

Сращивание с решением для областей I, II, IV дает

$$P = \frac{d}{dX} (\Delta^* - N \Delta_4). \tag{4}$$

Переменную часть толщин вытеснения запишем в виде

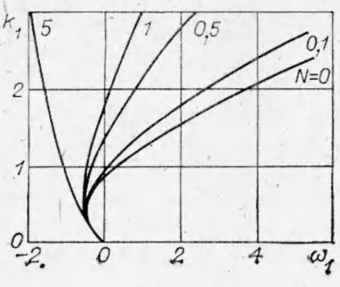
$$\Delta^* = \int_0^\infty \left( \frac{1}{U} - \frac{1}{\sqrt{2f}} \right) df = -A(\tau, X), \Delta_4 = P. \tag{5}$$

Вывод последней формулы (5) приведен в работе [5]. Для параметра подобия $N$ можно записать формулу

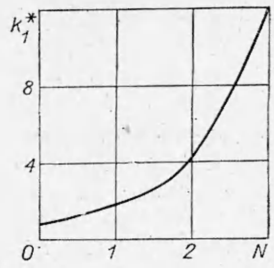
$$N = \frac{al \, | L_{\text{энт}} | \, \rho_w}{\rho_\infty} \left( \frac{a \mu_w u_\infty^2}{\rho_w M_\infty^2} \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{1/2}. \tag{6}$$

Будем искать решение задачи (3), (4) в виде

$$U = Y - \alpha e^{\omega \tau + kX} \, df/dy, \quad V = \alpha k e^{\omega \tau + kX}, \quad P = \alpha e^{\omega \tau + kX}, \tag{7}$$




Фиг. 1




Фиг. 2

где $\alpha$ — амплитуда возмущений. Линеаризация по амплитуде возмущений $\alpha$ приводит задачу (3), (4) к следующему виду:

$$d^3f/dy^3 - (\omega + ky)df/dy + kf + k = 0, \tag{8}$$

$$f(0) = f'(0) = 0,\ f'(y) \to (1 + Nk)/k \text{ при } y \to \infty.$$

Предположим, что постоянные $\omega$ и $k$ в (7) комплексны:

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2,\ k = k_1 + ik_2.$$

Чтобы удовлетворить предельным условиям при $X \to -\infty$, достаточно принять $k_1 > 0$.

Задача (8) является задачей на собственные значения. Для решения задачи (8) продифференцируем первое уравнение (8) и совершим преобразование $z = \omega/k^{2/3} + k^{1/3}y$ независимой переменной.

Решение, удовлетворяющее условию $|df/dz| < \infty$, запишется в виде

$$f = -\left[\frac{d\,\mathrm{Ai}\left(\frac{\omega}{k^{2/3}}\right)}{dz}\right]^{-1} \int\limits_{\omega/k^{2/3}}^{\infty} \left[\int\limits_{\omega/k^{2/3}}^{z} \mathrm{Ai}(t)\,dt\right] dz,$$

где $\mathrm{Ai}(z)$ — функция Эйри комплексного переменного.

Последнее уравнение (8) ведет к дисперсионному соотношению

$$-\frac{d\,\mathrm{Ai}\left(\frac{\omega}{k^{2/3}}\right)}{dz}(1 + Nk) = k^{4/3} \int\limits_{\omega/k^{2/3}}^{\infty} \mathrm{Ai}(z)\,dz, \tag{9}$$

связывающему между собой показатели степеней $k$ и $\omega$. Значения этих показателей, удовлетворяющие соотношению (9), являются собственными в решении краевой задачи (8). От задачи, решенной в [4], задача (8) отличается наличием в дисперсионном соотношении (9) множителя $(1 + Nk)$, характеризующего роль энтропийного слоя. Влияние этого множителя на значения показателей степени $\omega$ и $k$ показаны на фиг. 1, 2. На фиг. 1 представлена зависимость $k_1$ от $\omega_1$ при $\omega_2 = k_2 = 0$. Следует заметить, что кривая на фиг. 1 получается прямым пересчетом данных [4], если положить $\omega_1/k_1^{2/3} = \omega_{11}/k_{11}^{2/3}$, $k_1 = k_{11}/(1 + Nk_{11})^{3/4}$, где $\omega_{11}$, $k_{11}$ — данные [4]. Кривая при $N = 0$ соответствует результатам [4]. На фиг. 2 нанесены значения $k_1^*$ при $k_2 = \omega_2 = 0$ и $\omega_1 = 0$ в зависимости от параметра $N$. При значении $k = k_1^*$ зависимость от времени в линейном решении (8) пропадает, течение газа в пограничном слое стационарно.

При $k > k_1^*$ показатель $\omega_1 > 0$, в этом случае волна бежит против направления основного течения. При $k < k_1^*$ $\omega_1 < 0$. В этом случае волна бежит вниз по потоку. При возрастании $N$ $k_1^*$ также растет. Последнее находится в согласии с известными результатами [3], когда при возрастании $N$ для обеспечения проникновения возмущений вверх по потоку необходимо все большее нарастание избыточного давления вдоль оси $X$.

*Поступила 26 III 1982*

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Нейланд В. Я.** К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4.
2. **Stewarston K., Williams P.** Self-induced separation.— Proc. Roy. Soc., A, 1969, vol. 312, N 1509.
3. **Нейланд В. Я., Соколов Л. А.** Влияние энтропийного слоя на отрыв пограничного слоя в гиперзвуковом потоке.— Учен. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 3.
4. **Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.** О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
5. **Нейланд В. Я., Соколов Л. А.** Влияние энтропийного слоя на обтекание гиперзвуковым потоком аэродинамических органов управления.— Учен. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 1.


УДК 532.50

# АЭРОДИНАМИКА ГИПОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ (О ТЕЧЕНИЯХ С МАЛЫМИ ЧИСЛАМИ МАХА)

*Р. Х. Зейтунян*

(*Лилль, Франция*)

**1. Введение.** Эта работа является результатом размышлений о понятии слабосжимаемого течения и связанных с ним разнообразных эффектов нестационарности, вязкости и акустики. Рассматриваются только течения совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями при отсутствии силы тяжести. С самого начала не учитываются эффекты вращения, силы Кориолиса и электрических и магнитных полей, так что исходными уравнениями являются классические уравнения Навье — Стокса. Эта работа в том ее виде, в каком она представлена здесь читателю, возможно удивит его тем, что здесь нет детального исследования конкретной задачи, а, скорее, содержится перечень вопросов, которые в настоящее время ставит требование правильного учета слабой сжимаемости при математическом моделировании разнообразных физических явлений. Рассуждения иллюстрируются несколькими простыми задачами, и для некоторых из них даются элементы решений.

Предложен общий термин «гипозвуковой» для характеристики этих слабосжимаемых течений газа. Таким образом, данная работа представляется в большей степени как программа.

Рассмотрим движения совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями $c_p$ и $c_V$, который может быть вязким и теплопроводным; будем называть эти движения просто течениями. Кинематическое описание рассматриваемого течения осуществляется с использованием переменных Эйлера: времени $t$ и координат $x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ жидкой частицы течения в ортонормированной декартовой системе координат. Обозначения классические: $\mathbf{u}$ — скорость с компонентами $u_i$; $p$, $\rho$ и $T$ — давление, плотность и температура. Предполагается, что в качестве величин для обезразмеривания выбраны: $U_\infty$ — для скорости, $t_0$ — для времени, $L_0$ — для вектора положения, $p_\infty$, $\rho_\infty$, $T_\infty$ — для термодинамических элементов. В этом случае в безразмерных переменных и с использованием тех же обозначений для различных величин уравнения, описывающие рассматриваемое течение, принимают классический вид [1]:

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}+\frac{1}{\gamma M_\infty^2}\nabla p=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\Delta\mathbf{u}+\frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})\right\},\tag{1.1}$$

$$\frac{D\log\rho}{Dt}+\nabla\cdot\mathbf{u}=0,$$

$$\rho\frac{DT}{Dt}-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Dp}{Dt}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta T+(\gamma-1)\frac{M^2}{\mathrm{Re}}\Phi,\quad p=\rho T,$$

где $D/Dt = S\partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla$, $\Delta = \nabla^2$. На уровне уравнений (1.1) предполагаем, что коэффициент объемной вязкости равен нулю (гипотеза Стокса) и что коэффициенты динамической вязкости $\mu_0$ и теплопроводности $k_0$ постоянны. Через $\Phi$ обозначена вязкая объемная диссипация (известная