УДК 517.9:539.3

ИНВАРИАНТНАЯ ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. В. Селиванова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: s_seliv@yahoo.com

Предлагается инвариантная относительно вращений формализация уравнений линейной и нелинейной теории упругости. Выписывается уравнение состояния (в виде выпуклого производящего потенциала) для различных кристаллографических систем. При этом используется алгебраический подход, не требующий геометрических построений, связанных с анализом симметрии в кристаллах.

Ключевые слова: теория упругости, уравнение состояния, кристаллы, представления группы вращений, матрицы Клебша — Гордана, инварианты.

Введение. Рассмотрим уравнения нелинейной теории упругости в следующем виде [1, 2]:

$$\rho\,\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial s_{ij}}{\partial \xi_j}=0,\qquad \frac{\partial H_{s_{ij}}}{\partial t}-\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}=0. \tag{1}$$

Здесь s_{ij} — компоненты тензора Пиолы — Кирхгофа [3], представляющего собой несимметричный тензор напряжений в лагранжевых координатах ξ_j; u_i — скорости; $\rho = \rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ — плотность среды; $H=H(u_i,s_{ij})$ — уравнение состояния:

$$H(u_i,s_{ij})=F_1(u_1,u_2,u_3)+F(s_{11},s_{12},\dots,s_{33}), \tag{2}$$

F_1, F — некоторые выпуклые функции. Функция F_1 обычно берется в виде $F_1 = F_1(u_1,u_2,u_3)=\rho(u_1^2+u_2^2+u_3^2)/2$, общий вид F определен ниже (показано, что F является функцией 11 инвариантных квадратичных форм, сконструированных из величин, преобразующихся по неприводимым представлениям группы вращений). Для описания более сложных процессов в упругой среде можно включить в H явную функциональную зависимость от параметров, характеризующих среду:

$$H=H(u_i,s_{ij},c^{ijkl}). \tag{3}$$

Здесь c^{ijkl} — компоненты 4-контравариантного тензора, которые в случае линейной теории упругости интерпретируются как константы Гука. Функция H может также зависеть от энтропии и температуры среды.

После введения вектора неизвестных

$$\boldsymbol{v}=(u_1,u_2,u_3,s_{11},s_{12},s_{13},s_{21},s_{22},s_{23},s_{31},s_{32},s_{33})^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

система (1) записывается в виде симметрической гиперболической системы

$$A\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}B_j\,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \xi_j}=0, \tag{5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-9019.2006).

где $A = A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \boldsymbol{v}) = A^* > 0$; $B_j = B_j^* = \mathrm{const}$. В матрицу A входят вторые производные производящего потенциала (2), положительная определенность A является следствием выпуклости функции H. Матрица A размерности 12×12 имеет вид

$$A = A^* = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \tilde{A} & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \|H_{s_{ij}s_{kl}}\| & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = u_i, \qquad H_{s_{ij}} = c_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$$

($x_i = x_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — эйлеровы координаты; c_{ij} — матрица дисторсии), и на решениях (1) выполнен закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(u_i H_{u_i} + s_{ij} H_{s_{ij}} - H) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\,(u_i s_{ij}).$$

Цель данной работы — выписать общий вид уравнения состояния (функции H) для нелинейной упругой среды с использованием аппарата теории представлений группы вращений. В качестве примера приведены уравнения состояния для различных кристаллографических систем. Следует отметить, что используемое нами разбиение вектора неизвестных на векторы, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы вращений, в линейной теории упругости известно как представление Фойгта (см., например, [4]) и применяется в теории кристаллов. Однако нам неизвестны работы, в которых это представление в аналогичном предлагаемому в данной работе виде применяется для решения нелинейных задач теории упругости. Также в данной работе предлагается согласующаяся с этим подходом инвариантная относительно вращений запись системы (1).

1. Предварительные замечания. Напомним основные определения [5], используемые ниже. Вращения трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ образуют группу

$$SO(3) = \{g \in GL(3): \quad g^{\mathrm{T}} g = I_3, \ |g| = 1\},$$

где $GL(3)$ — группа всех невырожденных матриц размерности 3×3; I_3 — единичная матрица. Будем говорить, что задано представление $T_{SO(3)}$ группы $SO(3)$ в пространстве $\mathbb{R}^k$, если каждому элементу $g \in SO(3)$ поставлено в соответствие линейное преобразование $T_g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, такое что

$$T_{I_3} = I_k, \qquad T_{g_1 \cdot g_2} = T_{g_1} \cdot T_{g_2}.$$

Представление $T_{SO(3)}$ называется неприводимым, если в $\mathbb{R}^k$ отсутствуют нетривиальные подпространства, инвариантные относительно всех преобразований T_g. Число N (целое или полуцелое), такое что $k = 2N + 1$, называется весом неприводимого представления. В данной работе используются представления лишь целых весов.

Кронекеровым произведением $T_g = T_g^1 \times T_g^2$ представлений T_g^1 веса N_1 и T_g^2 веса N_2 называется представление, действующее на матрицу B размерности $(2N_1 + 1) \times (2N_2 + 1)$ по правилу

$$T_g B = T_g^1 B (T_g^2)^{\mathrm{T}}.$$

Теорема. *Если представления T_g^1 и T_g^2 неприводимы, то их произведение $T_g^1 \times T_g^2$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений следующих весов:*

$$N = |N_1 - N_2|,\ |N_1 - N_2| + 1,\ \ldots,\ N_1 + N_2. \tag{7}$$

Данное разложение выполняется с помощью матриц Клебша — Гордана $G^n_{N[N_1,N_2]}$ размерности $(2N_1+1)\times(2N_2+1)$, $n = -N, -N+1, \ldots, N$, образующих канонические базисы соответствующих подпространств пространства матриц [6]. Эти матрицы вещественны, имеют достаточно простую структуру (большое число нулевых элементов), ортонормированы:

$$\operatorname{tr}\left\{(G^n_{N[N_1,N_2]})^{\mathrm{T}} G^m_{N[N_1,N_2]}\right\} = \delta_{mn}$$

и обладают свойством симметрии:

$$G^n_{N[N_1,N_2]} = (-1)^{N+N_1+N_2}(G^n_{N[N_2,N_1]})^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

(δ_{mn} — символ Кронекера). Между собой матрицы связаны рекуррентными соотношениями, которые позволяют построить алгоритм вычисления этих матриц в явном виде (данный алгоритм реализован для произвольных весов N_1, N_2 и подробно описан в [7]).

Рассмотрим тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа — тензор второго ранга, заданный в каноническом базисе матрицей $T = \|s_{ij}\|_{i,j=1,2,3}$. Этот тензор можно рассматривать как кронекерово произведение двух неприводимых представлений веса 1 группы вращений и разложить в прямую сумму неприводимых представлений весов 0, 1 и 2:

$$T = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = pI_3 + K + S.$$

Здесь

$$p = (s_{11} + s_{22} + s_{33})/3 = (1/3)\operatorname{tr} T = \Sigma^{(0)} \text{ —} \tag{9}$$

“давление” (скалярная величина, преобразующаяся по представлению веса 0); $K = -K^*$ (три независимых элемента этой кососимметрической матрицы образуют вектор, преобразующийся по неприводимому представлению веса 1); $S = S^*$, $\operatorname{tr} S = 0$ — девиатор (пять независимых элементов этой симметрической матрицы образуют вектор, преобразующийся по неприводимому представлению веса 2).

Матрицы K и S выражаются через матрицы Клебша — Гордана следующим образом:

$$K = -K^* = \begin{bmatrix} 0 & (s_{12}-s_{21})/2 & (s_{13}-s_{31})/2 \\ -(s_{12}-s_{21})/2 & 0 & (s_{23}-s_{32})/2 \\ -(s_{13}-s_{31})/2 & -(s_{23}-s_{32})/2 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=-1}^{1} \omega_j\, G^j_{1[1,1]} =$$

$$= \omega_{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} + \omega_0\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \omega_1\begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим соответствующий вектор, преобразующийся по весу 1, через

$$\mathbf{\Sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(s_{23}-s_{32})/\sqrt{2} \\ (s_{13}-s_{31})/\sqrt{2} \\ -(s_{12}-s_{21})/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

В п. **3** рассматривается случай симметричного тензора напряжений ($s_{ij} = s_{ji}$). В этом случае получим $K = -K^* = 0$.

Аналогично девиатор тензора напряжений можно представить в виде

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} - p & (s_{12} + s_{21})/2 & (s_{13} + s_{31})/2 \\ (s_{12} + s_{21})/2 & s_{22} - p & (s_{23} + s_{32})/2 \\ (s_{13} + s_{31})/2 & (s_{23} + s_{32})/2 & s_{33} - p \end{bmatrix} =$$

$$= s_{-2} G^{-2}_{2[1,1]} + s_{-1} G^{-1}_{2[1,1]} + s_0 G^{0}_{2[1,1]} + s_1 G^{1}_{2[1,1]} + s_2 G^{2}_{2[1,1]}.$$

Обозначим

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} s_{-2} \\ s_{-1} \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(s_{13} + s_{31})/\sqrt{2} \\ (s_{12} + s_{21})/\sqrt{2} \\ \sqrt{3}\,(s_{22} - p)/\sqrt{2} \\ (s_{23} + s_{32})/\sqrt{2} \\ (s_{11} - s_{33})/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Этот вектор преобразуется по весу 2. Выпишем соответствующие матрицы Клебша — Гордана (заметим, что при данных весах $N_1 = N_2 = 1$, $N = 2$ эти матрицы симметрические, в то время как в случае $N_1 = N_2 = 1$, $N = 1$ — кососимметрические, что соответствует свойству (8)):

$$G^{-2}_{2[1,1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G^{-1}_{2[1,1]} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^{0}_{2[1,1]} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

$$G^{1}_{2[1,1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad G^{2}_{2[1,1]} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем будем использовать векторы неизвестных (9)–(11) (либо (9) и (11) при $s_{ij} = s_{ji}$ в случае симметричности тензора напряжений T).

Скорости переобозначим следующим образом:

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{-1} \\ u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

2. Структура уравнения состояния. Установим общий вид функции $F(s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{33})$, входящей в уравнение состояния (2). Производящий потенциал H не должен зависеть от системы координат, поэтому функция F является функцией инвариантов. Для того чтобы выписать полный набор инвариантов, зависящих от переменных $\{s_{ij}\}$, выясним, какие инвариантные квадратичные формы (и сколько) можно составить из переменных (9)–(11). Для этого запишем все возможные кронекеровы произведения весов 0, 1 и 2 (0×0, 0×2, 2×0, 2×2, 0×1, 1×0, 1×1, 1×2, 2×1) и их разложения на неприводимые представления. Следует отметить, что в силу коммутативности кронекерова произведения разложения для случаев 0×2 и 2×0, 0×1 и 1×0, 1×2 и 2×1 совпадают. Согласно (7) при разложении произведения весов N_1 и N_2 на неприводимые представления возникает

$$(2|N_1 - N_2| + 1) + \ldots + [2(N_1 + N_2) + 1] = (2N_1 + 1)(2N_2 + 1) \tag{13}$$

параметров $\boldsymbol{w}_n^{(N)}$, преобразующихся по неприводимым представлениям соответствующих весов N.

Приведем формулу разложения кронекерова произведения векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, преобразующихся по неприводимым представлениям весов N_1 и N_2, на неприводимые представления [8]:

$$\boldsymbol{p}^{(N_1)} \times \boldsymbol{q}^{(N_2)} = \sum_{N=|N_1-N_2|}^{N_1+N_2} \Big(\sum_{n=-N}^{N} \boldsymbol{w}_n^{(N)} G^n_{N[N_1,N_2]} \Big).$$

Инвариантные квадратичные формы (преобразующиеся по представлению нулевого веса), составленные из этих векторов, в данном случае записываются следующим образом (инвариантность вытекает из ортогональности рассматриваемых представлений):

$$\begin{gathered} I_{(N)} = \sum_{n=-N}^{N} \boldsymbol{w}_n^{(N)} ([\boldsymbol{p}^{(N_1)}]^{\mathrm{T}} G^n_{N[N_1,N_2]}, \boldsymbol{q}^{(N_2)}), \\ N = |N_1 - N_2|,\ |N_1 - N_2| + 1,\ \ldots,\ N_1 + N_2. \end{gathered} \tag{14}$$

Таким образом, можно определить число параметров упругой среды и выписать все возможные инвариантные квадратичные формы (через них выражается энергия упругой среды, т. е. производящий потенциал H). В случае линейной теории упругости параметры $\boldsymbol{w}_n^{(N)}$ (соответствующие весам 0 и 2) можно интерпретировать как константы в законе Гука для упругого тела, обладающего некоторыми симметриями (см. п. **3**).

Итак, согласно (13) имеем:

1) $0 \times 0 \Longrightarrow 1$ параметр;
2) $0 \times 2 \Longrightarrow 5$ параметров;
3) $2 \times 0 \Longrightarrow 5$ параметров;
4) $2 \times 2 \Longrightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ параметров.

Таким образом, для сред с симметрическим тензором напряжений $T = T^*$ имеется 36 параметров.

В общем случае добавляются вес 1 и еще 45 параметров:

5) $0 \times 1 \Longrightarrow 3$ параметра;
6) $1 \times 0 \Longrightarrow 3$ параметра;
7) $1 \times 1 \Longrightarrow 1 + 3 + 5$ параметров;
8) $1 \times 2 \Longrightarrow 3 + 5 + 7$ параметров;
9) $2 \times 1 \Longrightarrow 3 + 5 + 7$ параметров.

Таким образом, имеется $36 + 45 = 81$ параметр.

Выпишем соответствующие квадратичные формы, используя формулу (14). (Отметим, что в данной работе представляют интерес только различные квадратичные формы с симметричными матрицами (образующие линейную часть матрицы $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ из (6)), поэтому из 81 константы останется только 45 (а в случае симметричного тензора напряжений — 21 из 36).)

1. При $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N = 0$ $G^0_{0[0,0]} = [1]$, соответствующая квадратичная форма:

$$I_{(1)} = c_1 G^0_{0[0,0]} p^2.$$

2. При $N_1 = 0$, $N_2 = 2$, $N = 2$ $G^0_{2[0,2]} = [0\ 0\ 1\ 0\ 0]$, $G^{-1}_{2[0,2]} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0]$, $G^1_{2[0,2]} = [0\ 0\ 0\ 1\ 0]$, $G^{-2}_{2[0,2]} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]$, $G^2_{2[0,2]} = [0\ 0\ 0\ 0\ 1]$, квадратичная форма:

$$I_{(2)} = \sum_{j=-2}^{2} a_j G^j_{2[0,2]} \Sigma^{(2)} p = \sum_{j=-2}^{2} a_j \Sigma^{(2)}_j p$$

(a_j — пять произвольных параметров).

3. При $N_1 = 2$, $N_2 = 0$, $N = 2$ квадратичная форма такая же, как в случае 2:

$$I_{(2)} = \sum_{j=-2}^{2} a_j (G^j_{2[2,0]} p, \Sigma^{(2)}).$$

4. При $N_1 = 2$, $N_2 = 2$:

4.1. В случае $N = 0$

$$I_{(3)} = c_2 (G^0_{0[2,2]} \Sigma^{(2)}, \Sigma^{(2)}) = \tilde{c}_2 (\Sigma^{(2)}, \Sigma^{(2)})$$

($G_{0[2,2]}$ — диагональная матрица).

4.2. В случае $N = 1$ квадратичная форма имеет вид $\displaystyle\sum_{j=-1}^{1} \tilde{a}_j (G^j_{1[2,2]} \Sigma^{(2)}, \Sigma^{(2)})$, где

$$G^{-1}_{1[2,2]} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^{1}_{1[2,2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^{0}_{1[2,2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что в силу свойства (8) данные матрицы кососимметрические, поэтому далее этот случай не рассматривается.

4.3. В случае $N = 2$

$$I_{(4)} = \sum_{j=-2}^{2} b_j (G^j_{2[2,2]} \Sigma^{(2)}, \Sigma^{(2)}),$$

где

$$G^{-2}_{2[2,2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}\,) & 0 \\ -\sqrt{2}/\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}\,) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^{2}_{2[2,2]}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{7} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^{-1}_{2[2,2]}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 & \sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}) \\ 0 & 1/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^{1}_{2[2,2]}=\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 & -\sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}) \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^{0}_{2[2,2]}=\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(\sqrt{2}\sqrt{7}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{7} \end{bmatrix}.$$

4.4. В случае $N=3$ получим квадратичную форму $\sum\limits_{j=-3}^{3}\tilde{b}_j(G^j_{3[2,2]}\Sigma^{(2)},\Sigma^{(2)})$. При этом соответствующие матрицы также являются кососимметрическими (в дальнейшем не будем выписывать их в явном виде).

4.5. В случае $N=4$

$$I_{(5)}=\sum_{j=-4}^{4}d_j(G^j_{4[2,2]}\Sigma^{(2)},\Sigma^{(2)}).$$

Таким образом, чтобы для случая симметричного тензора напряжений (присутствуют только веса 0 и 2) перечислить все попарно различные симметрические квадратичные формы, составленные описанным выше способом, нужно из перечисленных выше случаев исключить случаи 3, 4.2 и 4.4, в результате чего останется $36-5-3-7=21$ параметр. Оставшиеся случаи 1, 2, 4.1, 4.3, 4.5 соответствуют пяти инвариантам $I_{(1)},I_{(2)},\ldots,I_{(5)}$, от которых может зависеть энергия.

Продолжим рассмотрение для общего случая, добавив вес 1:

5. При $N_1=0$, $N_2=1$, $N=1$

$$I_{(6)}=\sum_{j=-1}^{1}\alpha_j G^j_{1[0,1]}\Sigma^{(1)}p.$$

6. При $N_1=1$, $N_2=0$, $N=1$ инвариантная квадратичная форма та же, что и в случае 5, поскольку $G^j_{1[0,1]}=(G^j_{1[1,0]})^{\text{т}}$. Поэтому случай 6 не учитывается, и количество параметров уменьшается на 3.

7. При $N_1 = N_2 = 1$:

7.1. В случае $N = 0$

$$I_{(7)} = c_3(G^0_{0[1,1]}\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(1)}) = \tilde{c}_3(\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(1)}).$$

7.2. В случае $N = 1$ получим квадратичную форму $\sum\limits_{j=-1}^{1} \tilde{\beta}_j(G^j_{1[1,1]}\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(1)})$, при этом матрицы $G^j_{1[1,1]}$ являются кососимметрическими.

7.3. В случае $N = 2$

$$I_{(8)} = \sum_{j=-2}^{2} \beta_j(G^j_{2[1,1]}\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(1)}).$$

8. При $N_1 = 2$, $N_2 = 1$:

8.1. В случае $N = 1$

$$I_{(9)} = \sum_{j=-1}^{1} f_j(G^j_{1[2,1]}\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}).$$

8.2. В случае $N = 2$

$$I_{(10)} = \sum_{j=-2}^{2} g_j(G^j_{2[2,1]}\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}).$$

8.3. В случае $N = 3$

$$I_{(11)} = \sum_{j=-3}^{3} h_j(G^j_{3[2,1]}\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}).$$

9. При $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ квадратичные формы совпадают с квадратичными формами в случае 8, т. е. соответствующие $3 + 5 + 7 = 15$ констант отбрасываются.

Таким образом, не учитывая “лишние” случаи 6, 7.1, 9, получаем еще $45-3-3-15 = 24$ параметра. С учетом случаев 1–4 имеем $21+24 = 45$ независимых параметров, от которых может зависеть производящий потенциал (2). При этом с учетом случаев 5, 7.1, 7.3, 8.1–8.3 добавляется 6 инвариантов. Таким образом, искомая функция F, входящая в выражение для энергии нелинейной упругой среды, может зависеть от 11 инвариантов, определенных с точностью до произвольного постоянного множителя (с учетом этого будем допускать некоторый произвол в обозначениях параметров). При этом уравнение состояния имеет вид

$$H = \rho(u_{-1}^2 + u_0^2 + u_1^2)/2 + F(I_{(1)}, I_{(2)}, I_{(3)}, \ldots, I_{(11)}). \tag{15}$$

Входящие в инварианты $I_{(1)}$–$I_{(11)}$ параметры

$$\begin{gathered} c_1,\ c_2,\ a_j\ (j = -2, \ldots, 2),\ b_j\ (j = -2, \ldots, 2),\ d_j\ (j = -4, \ldots, 4), \\ c_3,\ \beta_j\ (j = -2, \ldots, 2),\ \alpha_j\ (j = -1, \ldots, 1),\ f_j\ (j = -1, \ldots, 1), \\ g_j\ (j = -2, \ldots, 2),\ h_j\ (j = -3, \ldots, 3) \end{gathered} \tag{16}$$

характеризуют среду и могут зависеть от пространственных переменных.

Отметим, что для изотропного случая остается лишь три инварианта, соответствующих нулевому весу:

$$I_{(1)} = c_1 p^2, \qquad I_{(3)} = c_2(\Sigma^{(2)}, \Sigma^{(2)}), \qquad I_{(7)} = c_3(\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(1)}). \tag{17}$$

Для того чтобы уравнения (1) были корректны, функция H должна быть выпуклой по исходным переменным (4).

Исследование необходимых и достаточных условий выпуклости функции H (накладываемых на параметры (16)) выполнено в [1] для функции несколько иного вида. Некоторые ссылки на работы, в которых изучается вопрос о положительной определенности матрицы энергии для линейного случая в стандартных переменных, приведены, например, в [9].

Пусть согласно (3) функция H явно зависит от параметров среды c^{ijkl}, множество которых разбивается на группы в соответствии с (16). Используя это разбиение и формулы (14), (8), по аналогии с тем, как были построены квадратичные формы $I_{(1)}$–$I_{(11)}$, из параметров c^{ijkl} можно составить инвариантные квадратичные формы, от которых также может зависеть выпуклый производящий потенциал H. Например, из векторов $\boldsymbol{a} = (a_{-2}, a_{-1}, \dots, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_{-2}, b_{-1}, \dots, b_2)$ можно составить три инварианта:

$$\sum_{n=-N}^{N} \varphi_N^n (G^n_{N[2,2]}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \qquad N = 0, 2, 4$$

(φ_N^n — некоторые дополнительные параметры, характеризующие среду).

3. Уравнение состояния для кристаллической среды. Рассмотрим линейную упругую среду с симметричным тензором напряжений, компоненты которого переобозначим как $T = \|\sigma_{ij}\| = \|\sigma_{ji}\| = T^*$. Векторы неизвестных (9) и (11), преобразующиеся по весу 0 и 2 соответственно, записываются следующим образом:

$$\boldsymbol{u}^{(0)} = p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}, \qquad \boldsymbol{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sigma_{-2} \\ \sigma_{-1} \\ \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{12} \\ \sqrt{6}\,(\sigma_{22} - p)/2 \\ \sqrt{2}\,\sigma_{23} \\ (\sigma_{11} - \sigma_{33})/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Преобразующийся по весу 1 вектор, соответствующий кососимметрической части T, теперь отсутствует. Выражение для внутренней энергии упругого тела можно записать в виде

$$E = (1/2)\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} = c^{ijkl}\sigma_{kl}\sigma_{ij},$$

где ε_{ij} — тензор малых деформаций; c^{ijkl} — тензор ранга 4 (параметры Гука), в общем случае состоящий из 81 константы. С учетом симметричности тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ получаем 36 констант; кроме того, имеет место симметричность: $c^{ijkl} = c^{klij}$, в результате чего различных констант остается 21. Тот же результат получаем с использованием неприводимых представлений группы вращений.

Кроме того, в п. **2** установлено, что

$$E = E(I_{(1)}, I_{(2)}, \dots, I_{(5)}) = I_{(1)} + I_{(2)} + \dots + I_{(5)}$$

(в данном случае, поскольку энергия представляет собой квадратичную форму, она является линейной комбинацией инвариантов, а в силу того, что инварианты определялись с точностью до произвольного постоянного множителя, выражение для нее можно записать в виде суммы этих инвариантов). Выпишем матрицы квадратичных форм, составляющих инварианты $I_{(1)}$–$I_{(5)}$, перейдя от переменных (18) к "классическим" переменным:

$$\boldsymbol{u} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{12}, \sigma_{23})^{\mathrm{T}}.$$

Напомним, что если упругое тело изотропно (т. е. инвариантно относительно всех вращений пространства), то существует два инварианта степени, равной или меньшей двух, по σ_{ij}:

$$J_{(1)} = \sigma_{ii}, \qquad J_{(2)} = \sigma_{ij}\sigma_{ij}.$$

Из этих инвариантов можно составить квадратичную форму, в которую входят два различных параметра среды (из возможных 21), вида

$$E_0 = c_1(\lambda, \mu) J_{(1)}^2 + c_2(\lambda, \mu) J_{(2)} = (A_0 \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$$

(λ, μ — константы Ламе). Ту же квадратичную форму можно получить из рассмотренных в п. **2** случаев 1, 4.1 для нулевого веса ($N = 0$):

$$E_0 = \tilde{c}_1 G^0_{0[0,0]} p^2 + \tilde{c}_2 (G^0_{0[2,2]} \boldsymbol{u}^{(2)}, \boldsymbol{u}^{(2)}) = I_{(1)} + I_{(2)} = (C_0 \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}).$$

Здесь

$$C_0 = C_0^* = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ & c_1 + c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & c_1 + c_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_2 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & c_2 & 0 \\ & & & & & c_2 \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

слагаемое E_0 всегда входит в выражение для энергии E.

Выпишем квадратичную форму для случая 2:

$$I_{(3)} = \sum_{j=-2}^{2} a_j G^j_{2[0,2]} \boldsymbol{u}^{(2)} p = (C_1 \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}).$$

Здесь

$$C_1 = C_1^* = \begin{bmatrix} -a_0/(2\sqrt{3}\,) + a_2/2 & a_0/(2\sqrt{3}\,) + a_2/2 & -a_0/\sqrt{3} & -a_{-2} & a_{-1} & a_1 \\ & a_0/\sqrt{3} & a_0/(2\sqrt{3}\,) - a_2/2 & -a_{-2} & a_{-1} & a_1 \\ & & -a_0/(2\sqrt{3}\,) - a_2/2 & -a_{-2} & a_{-1} & a_1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Для случая 4.3

$$I_{(4)} = \sum_{j=-2}^{2} b_j (G^j_{2[2,2]} \boldsymbol{u}^{(2)}, \boldsymbol{u}^{(2)}) = (C_2 \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}),$$

где

$$C_2 = C_2^* = \begin{bmatrix} -\dfrac{b_0}{3} + \dfrac{b_2}{\sqrt{3}} & -\dfrac{2b_0}{3} - \dfrac{2b_2}{\sqrt{3}} & \dfrac{b_0}{3} & -\dfrac{2b_{-2}}{\sqrt{3}} & \dfrac{2b_{-1}}{\sqrt{3}} & -\dfrac{4b_1}{\sqrt{3}} \\ & \dfrac{2b_0}{3} & -\dfrac{2b_0}{3} + \dfrac{2b_2}{\sqrt{3}} & \dfrac{4b_{-2}}{\sqrt{3}} & \dfrac{2b_{-1}}{\sqrt{3}} & \dfrac{2b_1}{\sqrt{3}} \\ & & -\dfrac{b_0}{3} - \dfrac{b_2}{\sqrt{3}} & -\dfrac{2b_{-2}}{\sqrt{3}} & -\dfrac{4b_{-1}}{\sqrt{3}} & \dfrac{2b_1}{\sqrt{3}} \\ & & & -2b_0 & 2\sqrt{3}\,b_1 & 2\sqrt{3}\,b_{-1} \\ & \text{sym} & & & b_0 + \sqrt{3}\,b_2 & -2\sqrt{3}\,b_{-2} \\ & & & & & b_0 - \sqrt{3}\,b_2 \end{bmatrix}$$

(здесь также содержатся пять независимых параметров, выбранных с точностью до общего постоянного множителя).

Для случая 4.5

$$I_{(5)} = \sum_{j=-4}^{4} d_j (G^j_{4[2,2]} \boldsymbol{u}^{(2)}, \boldsymbol{u}^{(2)}) = (C_3 \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}).$$

Матрицу C_3 не будем выписывать из-за ее громоздкости. В нее входят девять упругих констант d_j $(j = -4, \ldots, 4)$.

Если для данного упругого тела отсутствуют дополнительные вращательные симметрии (кроме тождественного преобразования), то выражение для энергии включает все четыре приведенных выше слагаемых:

$$E = E_0 + I_{(3)} + I_{(4)} + I_{(5)} = (C\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \tag{20}$$

и содержит 21 независимый параметр. Здесь $C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3$.

Итак, полученные параметры (всего их 21) можно разделить на группы следующим образом:

1) c_1, c_2 — две инвариантные относительно любых вращений величины, преобразующиеся по нулевому весу;

2) $\boldsymbol{a} = (a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2)$ — пятимерный вектор, преобразующийся по представлению веса 2;

3) $\boldsymbol{b} = (b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2)$ — пятимерный вектор, преобразующийся по представлению веса 2;

4) $\boldsymbol{d} = (d_{-4}, d_{-3}, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, d_3, d_4)$ — девятимерный вектор, преобразующийся по представлению веса 4.

Данные параметры содержатся в матрице C квадратичной формы энергии (20). Укажем соотношения, связывающие эти параметры в случае симметрии в кристаллах. Для этого используем известные результаты для семи кристаллографических систем (сингоний), приведенные, например, в [10]. Приравнивая к нулю те элементы матрицы C, которые согласно этим результатам являются нулевыми, для каждого случая получим собственную (возможно, переопределенную) систему линейных уравнений, решение которой и даст нужные соотношения. Обозначим через R_n, L_2, L, S преобразования, осуществляющие поворот на угол $360°/n$ вокруг оси x_3, полуоборот (т. е. поворот на $180°$) вокруг оси x_2, полуоборот вокруг биссектрисы $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ и поворот вокруг диагонали куба $x_1 = x_2 = x_3$ соответственно.

Рассмотрим каждую из семи кристаллографических систем.

1. Триклинная система $\{I\}$. Соответствующая группа преобразований состоит лишь из тождественного преобразования, поэтому независимых параметров 21, т. е. $E = (C\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$, где C — полная матрица.

2. Моноклинная система $\langle R_2 \rangle$, порожденная поворотами вокруг одной оси на $180°$. Для этой системы имеем систему восьми линейных уравнений (восьми неизвестных), из которой получаем

$$a_{-2} = b_{-2} = d_{-4} = d_{-2} = a_1 = b_1 = d_1 = d_3 = 0.$$

Таким образом, в данном случае имеем $21 - 8 = 13$ независимых параметров, расположенных в описанных выше векторах следующим образом:

$$c_1, c_2, (0, a_{-1}, a_0, 0, a_2), (0, b_{-1}, b_0, 0, b_2), (0, d_{-3}, 0, d_{-1}, d_0, 0, d_2, 0, d_4).$$

3. Ромбическая система $\langle R_2, L_2 \rangle$. К соотношениям, имеющим место в случае 2, в данном случае добавляются соотношения $a_{-1} = b_{-2} = d_{-1} = d_{-3} = 0$, т. е. имеем $13 - 4 = 9$ независимых параметров:

$$c_1, c_2, (0, 0, a_0, 0, a_2), (0, 0, b_0, 0, b_2), (0, 0, 0, 0, d_0, 0, d_2, 0, d_4).$$

4. Тригональная система $\langle R_3\rangle$, $\langle R_3, L_2\rangle$. В данном случае имеем 14 уравнений с 19 неизвестными. Решая эту переопределенную систему, получаем $21 - 14 = 7$ независимых параметров $c_1, c_2, a_0, b_{-2}, b_0, b_1, d_0$:

$$c_1, c_2, (0, 0, a_0, 0, \sqrt{3}\, a_0), (b_{-2}, 0, b_0, b_1, \sqrt{3}\, b_0),$$

$$(-(\sqrt{7}/\sqrt{3}\,)b_{-2}, 0, -(5/\sqrt{3}\,)b_{-2}, 0, d_0, \sqrt{2}\sqrt{3}\, b_1, (2\sqrt{5}/3)d_0, (\sqrt{7}\sqrt{2}/\sqrt{3})b_1, (\sqrt{5}\sqrt{7}/3)d_0).$$

5. Тетрагональная система $\langle R_4\rangle$, $\langle R_4, L_2\rangle$. В данном случае также получаем семь независимых параметров: $c_1, c_2, a_0, b_0, d_{-1}, d_0, d_2$, расположенных следующим образом:

$$c_1, c_2, (0, 0, a_0, 0, \sqrt{3}\, a_0), (0, 0, b_0, 0, \sqrt{3}\, b_0),$$

$$(0, (1/\sqrt{7})d_{-1}, 0, d_{-1}, d_0, 0, d_2, 0, -(\sqrt{5}/\sqrt{7}\,)d_0 - (2/\sqrt{7}\,)d_2).$$

6. Гексагональная система $\langle R_6\rangle$, $\langle R_6, L_2\rangle$. В данном случае имеется пять независимых параметров c_1, c_2, a_0, b_0, d_0, расположенных следующим образом:

$$c_1, c_2, (0, 0, a_0, 0, \sqrt{3}\, a_0), (0, 0, b_0, 0, \sqrt{3}\, b_0), (0, 0, 0, 0, d_0, 0, (2\sqrt{5}/3)d_0, 0, -(\sqrt{5}\sqrt{7}/3)d_0).$$

7. Кубическая система $\langle S, R_2\rangle$, $\langle S, L\rangle$. В данном случае получаем $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = 0$ и три независимых параметра, расположенных следующим образом:

$$c_1, c_2, \boldsymbol{d} = (0, 0, 0, 0, d_0, 0, 0, 0, -(\sqrt{5}/\sqrt{7})d_0).$$

Таким образом, для каждой кристаллографической системы можно выписать квадратичную форму для уравнения состояния в явном виде в терминах неприводимых представлений группы вращений. Отметим, что предлагаемый подход к построению уравнения состояния является чисто алгебраическим, в отличие от обычно используемого геометрического. Однако геометрическая интерпретация приведенных в данном пункте соотношений для параметров Гука (например, их связь с параметрами, задающими соответствующую кристаллическую решетку [11]) представляет собой самостоятельную задачу.

4. Инвариантная запись уравнений. В данном пункте используются утверждения [5, 6, 8] об общем виде системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, инвариантной относительно вращений.

Рассмотрим уравнения линейной теории упругости в виде

$$\rho\,\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) = 0,$$

где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$; $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$. Из закона Гука $\varepsilon_{ij} = c^{ijkl}\sigma_{kl}$ получаем

$$\begin{gathered}\rho\,\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0,\\ c^{ijkl}\,\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Вводя вектор неизвестных $\tilde{\boldsymbol{v}} = (u_1, u_2, u_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})$, эти уравнения можно записать в виде симметрической гиперболической системы, аналогичной (5), где матрица $A = A(x_1, x_2, x_3) = A^* > 0$ размерности 9×9 зависит от параметров среды, значения которых в каждой точке среды могут быть собственные.

В изотропном случае (когда среда инвариантна относительно всех вращений системы координат) матрица $\tilde{A}$ размерности 6×6 из (6) имеет вид (19). Матрица $\tilde{A}$ содержит два параметра (c_1, c_2), характеризующих свойства среды и выражающихся через параметры Ламе λ, μ: $c_1 = -\lambda/[2\mu(3\lambda + 2\mu)]$, $c_2 = 1/\mu$. В анизотропном случае появляются дополнительные параметры. Так, при отсутствии в среде каких-либо дополнительных симметрий имеется 21 независимый параметр (максимальное число) и матрица $\tilde{A}$ совпадает с заполненной матрицей C в (20). Кроме того, возможны некоторые промежуточные случаи — различные кристаллографические системы, рассмотренные в п. **3**.

В переменных (12), (18) уравнения (21) для изотропной среды записываются в виде

$$
\begin{gathered}
A_1 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{v}^{(1)} + \Delta_- \boldsymbol{u}^{(2)} + \Delta_+ \boldsymbol{u}^{(0)} = 0, \\
A_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{u}^{(0)} + \Delta_- \boldsymbol{v}^{(1)} = 0, \\
A_2 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{u}^{(2)} + \Delta_+ \boldsymbol{v}^{(1)} = 0.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Здесь

$$
\Delta_- \boldsymbol{u}^{(L)} = c_-(L) \sum_{i=-1}^{1} \frac{\partial}{\partial x_i} G^i_{1[L-1,L]} \boldsymbol{u}^{(L)}, \qquad \Delta_+ \boldsymbol{u}^{(L)} = c_+(L) \sum_{i=-1}^{1} \frac{\partial}{\partial x_i} G^i_{1[L+1,L]} \boldsymbol{u}^{(L)} \text{ —}
$$

инвариантные относительно вращений матричные дифференциальные операторы, содержащие матрицы Клебша — Гордана. Первый из этих операторов понижает вес вектора, преобразующегося по неприводимому представлению веса L группы вращений, на единицу (аналог оператора div), второй — повышает на единицу (аналог оператора grad):

$$
c_-(1) = c_+(0) = -1, \quad c_+(1) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \quad c_-(2) = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} c_+(1), \quad A_1 = \begin{pmatrix} \rho & & \\ & \rho & \\ & & \rho \end{pmatrix}.
$$

Для изотропной среды

$$
A_0 = \hat{c}_1 G^0_{0[0,0]} = \hat{c}_1 = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}, \quad A_2 = \hat{c}_2 G^0_{0[2,2]} = \begin{pmatrix} 1/\mu & & & & \\ & 1/\mu & & & \\ & & 1/\mu & & \\ & & & 1/\mu & \\ & & & & 1/\mu \end{pmatrix}.
$$

В случае анизотропной среды система (22) несколько усложняется: первая подсистема (для веса 1) остается прежней, а две другие объединяются:

$$
\hat{A} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \begin{pmatrix} \Delta_- \boldsymbol{v}^{(1)} & 0 \\ 0 & \Delta_+ \boldsymbol{v}^{(1)} \end{pmatrix} = 0. \tag{23}
$$

Здесь $\tilde{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}^{(0)}, \boldsymbol{u}^{(2)})^{\mathrm{т}}$ — вектор, состоящий из шести компонент (18);

$$
\hat{A} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{j=-2}^{2} a_j G^j_{2[0,2]} \\ \sum\limits_{j=-2}^{2} a_j G^j_{2[2,0]} & \sum\limits_{j=-2}^{2} b_j G^j_{2[2,2]} + \sum\limits_{j=-4}^{4} d_j G^j_{4[2,2]} \end{pmatrix}.
$$

Входящие в матрицу $\hat{A}$ при производной $\partial/\partial t$ параметры Гука разделены на группы. В случае симметрий в кристаллах эти параметры связаны между собой дополнительными соотношениями, приведенными в п. **3**. В качестве примера выпишем матрицу $\hat{A}$ в случае кубической симметрии. В таких переменных матрица $\hat{A}$ является диагональной, что облегчает вычисление характеристик рассматриваемых уравнений:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,c_2 - \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}\sqrt{7}}\,d_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,c_2 - \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}\sqrt{7}}\,d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,c_2 + \dfrac{9\sqrt{2}}{\sqrt{5}\sqrt{7}}\,d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,c_2 - \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}\sqrt{7}}\,d_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,c_2 + \dfrac{9\sqrt{2}}{\sqrt{5}\sqrt{7}}\,d_0 \end{bmatrix}.$$

Обобщая предложенную инвариантную запись на нелинейный случай, можно предположить, что в переменных (9)–(12) система (1) записывается в виде

$$\begin{gathered} \rho\,\frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{v}^{(1)} + \Delta_-\boldsymbol{\Sigma}^{(2)} + \Delta_+\boldsymbol{\Sigma}^{(0)} + \Delta_0\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} = 0, \\ \hat{A}\,\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{(0)} \\ \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} \\ \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_-\boldsymbol{v}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_0\boldsymbol{v}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_+\boldsymbol{v}^{(1)} \end{pmatrix} = 0, \end{gathered} \tag{24}$$

где для каждого вектора $\boldsymbol{u}^{(L)}$, преобразующегося по весу L, имеем

$$\Delta_-\boldsymbol{u}^{(L)} = c_-(L)\sum_{i=-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\,G^i_{1[L-1,L]}\boldsymbol{u}^{(L)}, \qquad \Delta_+\boldsymbol{u}^{(L)} = c_+(L)\sum_{i=-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\,G^i_{1[L+1,L]}\boldsymbol{u}^{(L)},$$

$$\Delta_0\boldsymbol{u}^{(L)} = c_0(L)\sum_{i=-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\,G^i_{1[L,L]}\boldsymbol{u}^{(L)}.$$

Последний оператор сохраняет вес вектора и является многомерным аналогом оператора rot. Этот оператор появляется в записи системы за счет добавления кососимметрической части тензора напряжений. Матрица при производной $\partial/\partial t$ (размерности 9×9) имеет вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} H_{pp} & \|H_{p\Sigma^{(1)}_i}\|_{i=-1,0,1} & \|H_{p\Sigma^{(2)}_k}\|_{k=-2,\dots,2} \\ \|H_{\Sigma^{(1)}_i p}\|_{i=-1,0,1} & \|H_{\Sigma^{(1)}_i\Sigma^{(1)}_j}\|_{i,j=-1,0,1} & \|H_{\Sigma^{(1)}_i\Sigma^{(2)}_k}\|_{i=-1,0,1,k=-2,\dots,2} \\ \|H_{\Sigma^{(2)}_k p}\|_{k=-2,\dots,2} & \|H_{\Sigma^{(2)}_k\Sigma^{(1)}_i}\|_{i=-1,0,1,k=-2,\dots,2} & \|H_{\Sigma^{(2)}_k\Sigma^{(2)}_l}\|_{k,l=-2,\dots,2} \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = \hat{A}(\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\boldsymbol{v}^{(1)},p,\boldsymbol{\Sigma}^{(1)},\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}) = \hat{A}^* > 0.$$

Здесь H — производящий потенциал (15), зависящий от параметров (16).

В линейном случае для кристаллографических систем инварианты $I_{(1)}$–$I_{(5)}$ записываются с учетом результатов, приведенных в п. **3**. Остальные инварианты подлежат отдельному рассмотрению. Пока можно только отметить, что в изотропном случае будут присутствовать лишь инварианты (17).

На практике наиболее часто встречается случай, когда зависимость производящего потенциала от давления $H(p)$ нелинейная, а зависимости H от кососимметрической части тензора напряжений $\mathbf{\Sigma}^{(1)}$ и девиатора $\mathbf{\Sigma}^{(2)}$ можно считать линейными:

$$H = F_1(\boldsymbol{v}^{(1)}) + H_0(c_1 p^2) + I_{(2)} + I_{(6)}.$$

В этом случае система (24) принимает вид

$$\begin{gathered} \rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}^{(1)} + \Delta_-\mathbf{\Sigma}^{(2)} + \Delta_+\mathbf{\Sigma}^{(0)} + \Delta_0\mathbf{\Sigma}^{(1)} = 0, \\ H_{pp}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{\Sigma}^{(0)} + \Delta_-\boldsymbol{v}^{(1)} = 0, \\ c_3\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{\Sigma}^{(1)} + \Delta_0\boldsymbol{v}^{(1)} = 0, \\ c_2\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{\Sigma}^{(2)} + \Delta_+\boldsymbol{v}^{(1)} = 0 \end{gathered}$$

с диагональной матрицей при производной $\partial/\partial t$, вычисление характеристик которой с учетом инвариантности относительно вращений не вызывает затруднений. Эта матрица является диагональной и в случае кристаллов с кубической симметрией. Удобство вычисления характеристик в предлагаемой записи системы обеспечивает возможность использования, например, разностных схем типа схем Годунова для численного решения рассматриваемых систем уравнений.

Заключение. Одним из преимуществ предложенной в данной работе систематизации является то, что рассматривается максимально общий случай с несимметричным тензором напряжений и не предполагается малость деформаций. Кроме того, предложенная запись системы уравнений за счет разбиения матрицы при производной $\partial/\partial t$ на блоки меньшей размерности облегчает вычисление характеристик и, следовательно, построение численных методов решения рассматриваемых дифференциальных уравнений. В целом такой подход не является принципиально новым (во всяком случае, для линейной теории упругости), однако изложение отличается от общепринятого.

Используя замечание, сделанное в конце п. **2** данной работы, можно применить предлагаемый подход к усложненной системе уравнений нелинейной теории упругости, учитывающей диссипативные процессы, которые могут вызывать релаксацию параметров среды и приводить к изменению кристаллической структуры материала (такие процессы моделируются добавлением специальной правой части в систему (1)). Также представляют интерес детальное сравнение используемого в данной работе подхода с известными подходами к построению инвариантов для линейного случая (см. [9, 12]), изучение условий выпуклости производящего потенциала (15), т. е. корректности уравнений (1), исследование структуры характеристик уравнений (1), записанных в виде (24), и интерпретация этой структуры в групповых терминах, а также установление связи ее вывода с выводом, обычно излагаемым в теории кристаллов [13, 14].

Предложенный подход может оказаться полезным при изучении уравнений нелинейной теории упругости и решении конкретных физических задач.

Автор выражает благодарность С. К. Годунову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также Р. М. Гарипову и С. П. Киселеву за полезные обсуждения излагаемого материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошных сред и законы сохранения / С. К. Годунов, Е. И. Роменский. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
2. **Godunov S. K.** The equations of elasticity with dissipation as a nontrivial example of thermodynamically consistent hyperbolic equations // J. Hyperbol. Different. Equat. 2004. V. 1, N 2. P. 235–249.
3. **Киселев С. П.** Механика сплошных сред. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 1997.
4. **Лейбфрид Г.** Точечные деформации в металлах / Г. Лейбфрид, Н. Бройер. М.: Мир, 1981.
5. **Годунов С. К.** Представления группы вращений и сферические функции / С. К. Годунов, Т. Ю. Михайлова. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
6. **Годунов С. К., Гордиенко В. М.** Коэффициенты Клебша — Гордана при различных выборах базисов унитарных и ортогональных представлений групп $SU(2)$, $SO(3)$ // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 540–557.
7. **Селиванова С. В.** Элементы теории представлений группы вращений и их применения в теории упругости: Магистер. дис. Новосибирск, 2007.
8. **Годунов С. К., Гордиенко В. М.** Усложненные структуры галилеево-инвариантных законов сохранения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 2. С. 3–21.
9. **Остросаблин Н. И.** О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // ПМТФ. 1986. № 4. С. 127–135.
10. **Гарипов Р. М.** Закон Гука для монокристаллов / СО РАН. Ин-т гидродинамики. Препр. Новосибирск, 2005.
11. **Делоне Б. Н.** Математические основы структурного анализа кристаллов / Б. Н. Делоне, Н. Падуров, А. Д. Александров. М.: Гостехтеоретиздат, 1934.
12. **Остросаблин Н. И.** Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.
13. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987.
14. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 30/VII 2007 г.