

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Ю. А. Буевич

(Москва)

Вычислена эффективная теплопроводность, характеризующая макроскопический перенос тепла в композитном материале, состоящем из сплошной среды (связующего) и случайно распределенных в нем сферических частиц наполнителя.

При исследовании процессов переноса в композитных материалах имеющих сложную внутреннюю структуру, во многих случаях допустимо рассматривать материал как некую непрерывную среду, которая характеризуется определенными эффективными значениями соответствующих коэффициентов переноса. В результате возникает задача определения этих значений как функций геометрических параметров материала и физических коэффициентов переноса для отдельных компонент этого материала. Для зернистых материалов эта задача была поставлена еще Максвеллом и Рэлеем в связи с определением диэлектрической проницаемости разбавленных дисперсий. Несмотря на значительное число работ (см. обзор в [1,2]), строгое решение этой задачи имеется только для материалов с малой объемной концентрацией наполнителя. Попытки обобщить это решение на материалы высокой или умеренной концентрации носят явно феноменологический характер.

Ниже предлагается приближенная теория теплопроводности высококонцентрированных зернистых материалов, основанная на представлении о частице наполнителя как о тепловом диполе, возмущающем поле температуры в связующем. Ввиду аналогии математических формулировок соответствующих задач полученные результаты применимы при вычислении электропроводности, диэлектрической и магнитной проницаемостей зернистого материала, а также эффективного коэффициента диффузии некоторой примеси в нем.

1. Рассмотрим зернистый материал, состоящий из непрерывного связующего с теплопроводностью λ_1 и сферических частиц наполнителя. Счетная и объемная концентрации частиц есть n и ρ соответственно, функцию распределения частиц по радиусу a и теплопроводности λ_2 , нормированную на единицу, обозначим через $\psi(a, \lambda_2)$. При любой конфигурации материала поля температуры в связующем и наполнителе могут быть в принципе получены из решения соответствующих уравнений теплопроводности при некоторых начальных и внешних граничных условиях и условиях непрерывности температуры и потока тепла на поверхностях всех частиц. Решение такой задачи в настоящее время не представляется возможным. Дополнительные трудности возникают в результате того, что детальное расположение частиц в реальных материалах (т. е. их конфигурация) обычно неизвестно и может быть описано только в статистическом смысле.

Однако, если характерный линейный масштаб L изменения величин n и ρ намного превышает масштаб, характеризующий микроструктуру материала и совпадающий по порядку величины со средним расстоянием между частицами $l \sim a_0 \rho^{-1/3} > a_0$, где a_0 — характерное значение радиу-

са частицы, в определении детального микроскопического поля температуры обычно нет необходимости. Действительно, в этом случае существует такой физический малый объем, который содержит достаточное для усреднения представительное число частиц, причем материал в пределах этого объема можно рассматривать как макроскопически однородный.

Ниже для простоты считаем материал также макроскопически изотропным. Если температура материала, полученная усреднением по такому объему, существенно изменяется на расстояниях порядка L или, во всяком случае, значительно превышающих l , можно ввести понятие эффективной теплопроводности зернистого материала λ как коэффициента пропорциональности между средними значениями потока тепла и градиента температуры, т. е.

$$(1.1) \quad [Q] = -\lambda [\nabla T] = -\lambda \nabla [T]$$

(здесь и ниже квадратные скобки означают усреднение по малому физическому объему). Очевидно, можно записать

$$(1.2) \quad [Q] = (1 - \rho) [Q_1] + n \iint v(a) \psi(a, \lambda_2) [Q_2](a, \lambda_2) da d\lambda_2$$

$$\nabla [T] = (1 - \rho) \nabla [T_1] + n \iint v(a) \psi(a, \lambda_2) \nabla [T_2](a, \lambda_2) da d\lambda_2$$

где $v(a)$ — объем частицы, а индексы 1 и 2 относятся соответственно к связующему и наполнителю. Ясно, что

$$(1.3) \quad [Q_1] = -\lambda_1 \nabla [T_1], \quad [Q_2](a, \lambda_2) = -\lambda_2 \nabla [T_2](a, \lambda_2)$$

Если выполняется соотношение (1.1), то уравнение, описывающее макроскопический перенос тепла в материале, имеет вид

$$(1.4) \quad \partial [T] / \partial t = \nabla (\lambda \nabla [T_2])$$

(для упрощения удельная теплоемкость принимается равной единице).

Из (1.4) имеем $\omega \sim \lambda L^{-2} \sim \lambda_1 L^{-2}$, где ω — характерная частота процесса. Отсюда и из неравенства $L \gg l \gg a$ следует ограничение, налагаемое на частоту ω процесса теплопереноса, который допустимо рассматривать при помощи (1.1) — (1.4) как происходящий в некоторой однородной среде с теплопроводностью λ . Получаем

$$(1.5) \quad \omega \ll \lambda a^{-2} \sim \lambda_1 a^{-2}$$

Это неравенство сохраняется и в случае, когда эффективная теплопроводность зависит от ω , т. е. (1.1) и (1.4) выполняются, например, для компонент Фурье величин $[Q]$ и $\nabla [T]$, но не для самых этих величин.

Как следует из (1.2) и (1.3), для определения величины λ , характеризующей рассматриваемый изотропный зернистый материал, достаточно найти связь между средним градиентом температуры в частицах радиуса a и теплопроводности λ_2 и средним градиентом температуры в связующем. Поэтому разумно заменить исходную задачу об определении истинного микроскопического поля температуры в материале более простой задачей, сформулированной для средних макроскопических температур связующего и наполнителя.

Для этой цели рассмотрим ниже ансамбль из N частиц материала, находящихся в объеме $V \gg l^3$ таком, что в пределах этого объема можно пренебречь возможной зависимостью n и ρ от r , т. е. рассматривать материал как статистически однородный. Введем N -частичную функцию распределения ансамбля $\varphi(B_N)$, нормированную на единицу, где B_N означает набор радиус-векторов центров N частиц ансамбля, а также их радиусов и

теплопроводностей. Кроме того, введем функции распределения ансамбля $\varphi(B_{N-1} | r, a)$ и $\varphi(B_{N-2} | r, a; r', a')$.

Первая функция представляет собой условную плотность вероятности конфигурации B_{N-1} всех $N - 1$ частиц ансамбля, кроме некоторой выделенной, если известно, что центр выделенной частицы находится в точке r , а ее радиус равен a . Вторая функция распределения представляет собой плотность вероятности конфигурации B_{N-2} при условии, что в точках r и r' имеются две выделенные частицы, радиусы которых есть a и a' . Введенные функции распределения позволяют определить средние по ансамблю любой величины F , зависящей от координат, радиусов и теплопроводностей многих частиц. Имеем

$$(1.6) \quad \langle F \rangle = \langle F \rangle_N = \int F \varphi(B_N) dB_N, \quad \langle F \rangle'_{N-1} = \int F \varphi(B_{N-1} | r, a) dB_{N-1} \\ \langle F \rangle''_{N-2} = \int F \varphi(B_{N-2} | r, a; r', a') dB_{N-2}$$

Свойства функций распределения для ансамбля и соответствующих средних в (1.6) рассматривались, например, в [3-5] в связи с анализом медленного течения жидкости в облаке сферических частиц. Ниже существенны следующие свойства.

Имеются тождества

$$(1.7) \quad \varphi(B_N) = \varphi(r, a, \lambda_2) \varphi(B_{N-1} | r, a) \\ \varphi(B_{N-1} | r, a) = \varphi(r', a', \lambda_2 | r, a) \varphi(B_{N-2} | r, a; r', a')$$

где $\varphi(r, a, \lambda_2)$ и $\varphi(r, a, \lambda_2 | r', a')$ — безусловная и условная одночастичные (унарные) функции распределения, также нормированные на единицу. Ввиду того что по предположению материал в окрестности любой частицы можно рассматривать как статистически однородный, имеем приближенно соотношение между $\varphi(r, a, \lambda_2)$ и введенной ранее функцией $\psi(a, \lambda_2)$:

$$(1.8) \quad \varphi(r, a, \lambda_2) \approx V^{-1} \psi(a, \lambda_2)$$

Из сделанных предположений о статистической однородности материала и о случайности упаковки частиц в нем следует далее:

$$(1.9) \quad \varphi(r, a, \lambda_2 | r', a') = \begin{cases} \varphi(r, a, \lambda_2), & |r - r'| > a + a' \\ 0, & |r - r'| < a + a' \end{cases}$$

Наконец, в соответствии с анализом [3-5] рассмотрим некоторую величину F такую, что каждая отдельная частица влияет на F весьма слабо, и существенно лишь влияние многих частиц. Для такой величины можно записать асимптотические равенства, верные при $N \gg 1$

$$(1.10) \quad \langle F \rangle''_{N-2} = \langle F \rangle'_{N-1} + O_1(N^{-1}) = \langle F \rangle + O_2(N^{-2})$$

которые выражают свойства статистической устойчивости ансамбля. Если соотношение (1.10) не выполняется, например, для температуры в зернистом материале, сама концепция статистического описания процессов теплопереноса в нем становится бессмысленной.

2. Рассмотрим далее перенос тепла в окрестности некоторой пробной частицы, выделенной из ансамбля N частиц. Пусть центр этой частицы находится в точке $r = 0$, а ее радиус равен a . Ввиду линейности уравнения теплопроводности температура в связующем может быть записана

в виде

$$(2.1) \quad T_1(t, \mathbf{r}) = T_0(t, \mathbf{r}) + \sum_{j=1}^{N-1} T^{(j)}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}, a^{(j)}, \lambda_2^{(j)})$$

Здесь T_0 — температура связующего, невозмущенная частицами, а $T^{(j)}$ — возмущение, вносимое j -й частицей. Величины, введенные в (2.1), удовлетворяют уравнениям

$$(2.2) \quad \partial T_0 / \partial t = \lambda_1 \Delta T_0, \quad \partial T^{(j)} / \partial t = \lambda_1 \Delta T^{(j)} + G^{(j)}$$

где $G^{(j)}$ — источник тепла, имитирующий влияние j -й частицы на температурное поле в связующем. Эту величину можно представить в форме

$$(2.3) \quad G^{(j)} = \oint_{s_j} q(t, \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}^{(j)}) d\mathbf{R}^{(j)} = \lambda_2 \oint_{s_j} \mathbf{n} \nabla T^{(j)}(t, \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}^{(j)}) d\mathbf{R}^{(j)}$$

$$(\mathbf{R}^{(j)} = \mathbf{r}^{(j)} + \mathbf{a}^{(j)})$$

Здесь $\mathbf{a}^{(j)}$ — вектор, соединяющий центр $\mathbf{r}^{(j)}$ частицы с произвольной точкой на ее поверхности s_j , $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали, а q — плотность теплового потока на s_j , соответствующая температурному возмущению, обусловленному j -й частицей.

Разлагая δ -функцию в (2.3) в ряд по степеням компонент вектора $\mathbf{a}^{(j)}$, получаем

$$(2.4) \quad G^{(j)} = \oint_{s_j} q(t, \mathbf{R}^{(j)}) \sum_m \frac{(-1)^m}{m!} (\mathbf{a}^{(j)} \nabla)^m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) d\mathbf{a}^{(j)} =$$

$$= \sum_m {}^m G_{ik...p}(t, \mathbf{r}^{(j)}) \frac{\partial}{\partial r_i} \dots \frac{\partial}{\partial r_p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)})$$

$${}^m G_{ik...p}(t, \mathbf{r}^{(j)}) = \frac{(-1)^m}{m!} \oint_{s_j} q(t, \mathbf{R}^{(j)}) a_i^{(j)} a_k^{(j)} \dots a_p^{(j)} d\mathbf{a}^{(j)}$$

Тензоры ${}^m G$ m -го порядка представляют собой мультипольные моменты источника $G^{(j)}$, распределенного по поверхности j -й частицы, а выражение (2.4) — разложение этого источника по точечным мультиполям. Частицы не производят и не поглощают тепла, поэтому в условиях стационарной теплопроводности первый член («монополю») в разложении (2.4) тождественно равен нулю. В условиях нестационарного процесса этот член описывает обмен теплом между связующим и частицами наполнителя, и вообще говоря, отличен от нуля. Однако, как можно показать, он имеет порядок $(a/L)^2$ и должен быть опущен. Следующие члены в (2.4), соответствующие дипольному, квадрупольному и другим моментам источника $G^{(j)}$, в общем случае не равны нулю. В дальнейшем учитываем только дипольный член, пренебрегая всеми остальными. Это соответствует замене реального возмущения, производимого j -й частицей, возмущением, генерируемым точечным тепловым диполем, расположенным в точке $\mathbf{r}^{(j)}$.

Таким образом, из (2.2) — (2.4) имеем уравнения

$$(2.5) \quad \partial T_0 / \partial t = \lambda_1 \Delta T_0, \quad \partial T^{(j)} / \partial t = \lambda_1 \Delta T^{(j)} - \mathbf{D}^{(j)} \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)})$$

$$\mathbf{D}^{(j)} = \lambda_1 \oint_{s_j} \mathbf{n} \nabla T^{(j)}|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}^{(j)}} d\mathbf{a}^{(j)}$$

Суммируя уравнения (2.5), получаем в соответствии с (2.1)

$$(2.6) \quad \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \Delta T_1 - \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{D}^{(j)} \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)})$$

Именно это уравнение определяет температуру в промежутках между частицами в дипольном приближении.

Усредним уравнение (2.6) по условной функции распределения $\varphi(B_{N-1} | 0, a)$. Учитывая соотношения (1.6)–(1.10) и то обстоятельство, что вектор $\mathbf{D}^{(j)}$ существенно зависит от параметров j -й частицы (так что соотношения (1.10) для этого вектора не обязательно верны), имеем

$$\begin{aligned} \partial \langle T_1 \rangle / \partial t &= \partial \langle T_1 \rangle / \partial t, \quad \langle \Delta T_1 \rangle_{N-1} = \Delta \langle T_1 \rangle \\ \langle \mathbf{D}^{(j)} \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) \rangle_{N-1} &= \frac{1}{V} \iiint \langle \mathbf{D}^{(j)} \rangle_{N-2}'' H(|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}| - a^{(j)} - a) \times \\ (2.7) \quad &\times \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) \psi(a^{(j)}, \lambda_2^{(j)}) da^{(j)} d\lambda_2^{(j)} d\mathbf{r}^{(j)} = \\ &= \nabla \left\{ \frac{1}{V} \iiint \langle \mathbf{D}^{(j)} \rangle_{N-2}'' H(|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}| - a^{(j)} - a) \psi(a^{(j)}, \lambda_2^{(j)}) da^{(j)} d\lambda_2^{(j)} \right\} \end{aligned}$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда.

Все рассматриваемые уравнения существенно линейны, так что можно ожидать линейной зависимости $\langle \mathbf{D}^{(j)} \rangle_{N-2}''$ от $\langle T_1 \rangle_{N-2}$. С другой стороны, единственное выделенное направление вблизи j -й частицы определяется вектором $\nabla \langle T_1 \rangle_{N-2}$. Поэтому естественно принять

$$(2.8) \quad \langle \mathbf{D}^{(j)} \rangle_{N-2}'' = A(a^{(j)}, \lambda_2^{(j)}) \nabla \langle T_1 \rangle_{N-2} = A(a^{(j)}, \lambda_2^{(j)}) \nabla \langle T_1 \rangle$$

Последнее равенство в (2.8) следует из (1.10). Таким образом, из (2.6)–(2.8) получаем уравнение, определяющее в среднем перенос тепла в окрестности пробной частицы,

$$\begin{aligned} (2.9) \quad \partial \langle T_1 \rangle / \partial t &= \nabla \{ \lambda'(\mathbf{r}, a) \nabla \langle T_1 \rangle \} \\ \lambda'(\mathbf{r}, a) &= \lambda_1 - n \iint A(a', \lambda_2) H(r - a - a') \psi(a', \lambda_2) da' d\lambda_2 \end{aligned}$$

Здесь величина $\lambda'(\mathbf{r}, a)$ играет роль кажущейся теплопроводности среды, окружающей пробную частицу и состоящей из связующего и распределенных в нем точечных тепловых диполей, имитирующих другие частицы наполнителя. Таким образом, задача теплопроводности в реальном связующем, расположенном в промежутках между частицами, заменена (в статистическом смысле и в рамках дипольного приближения) другой задачей для некоторой фиктивной однородной среды, занимающей все пространство, теплопроводность которой отлична от теплопроводности связующего.

Приведенный вывод уравнения (2.9) можно рассматривать как строгое теоретическое обоснование феноменологической концепции некоторой фиктивной среды, окружающей каждую частицу зернистого материала, которая в той или иной форме использовалась во всех известных автору работах, посвященных теплопроводности концентрированных зернистых материалов (см., например, обзор в [1,2]). Однако кажущаяся теплопроводность этой среды $\lambda'(\mathbf{r}, a)$ не равна эффективной теплопроводности самого материала, как это безосновательно принималось в указанных работах, и зависит, вообще говоря, от расстояния от пробной частицы. Отметим, что понятие о слое переменной теплопроводности вокруг пробной частицы следует также из феноменологической модели Кернера [6], предложенной для определения электропроводности зернистых материалов.

Уравнение (2.9) должно решаться совместно с уравнением

$$(2.10) \quad \partial \langle T_2 \rangle / \partial t = \lambda_2 \Delta \langle T_2 \rangle$$

справедливым внутри пробной частицы при граничных условиях

$$(2.11) \quad \langle T_1 \rangle = \langle T_2 \rangle, \quad \lambda'(\mathbf{a}, a) \mathbf{n} \nabla \langle T_1 \rangle = \lambda_2 \mathbf{n} \nabla \langle T_2 \rangle (r=a) \\ \nabla \langle T_1 \rangle \rightarrow \mathbf{E} \quad (r \rightarrow \infty), \quad \langle T_2 \rangle < \infty (r=0)$$

где $\mathbf{E}$ — заданный градиент температуры на бесконечном удалении от пробной частицы, а $\lambda'(\mathbf{a}, a) \equiv \lambda_1$.

Решение задачи (2.9) — (2.11) определяет величину $\langle T_2 \rangle$ как функцию от $\mathbf{E}$ и позволяет выразить эффективную теплопроводность материала λ в соответствии с (1.1) — (1.3). Действительно, средние по ансамблю от величин T_1 и T_2 , описывающих температуру связующего и наполнителя, могут быть отождествлены с соответствующими объемными средними, фигурирующими в (1.2) и (1.3). В то же время величина $-\lambda' \nabla \langle T_1 \rangle$ ($\lambda' = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda'(r, a)$) при $r \rightarrow \infty$ описывает средний поток тепла в связующем с учетом влияния диспергированных частиц наполнителя, т. е. должна быть отождествлена со средним по объему потоком тепла в зернистом материале. Таким образом, имеем

$$(2.12) \quad \langle T_1 \rangle = [T_1], \quad \langle T_2 \rangle = [T_2], \quad -\lambda' \nabla \langle T_1 \rangle = [\mathbf{Q}]$$

Последнее уравнение в (2.12) позволяет понять, почему кажущаяся теплопроводность λ' отлична как от истинной теплопроводности связующего λ_1 , устанавливающей соответствие между величинами $[\mathbf{Q}_1]$ и $\nabla [T_1]$ из (1.3), так и от эффективной теплопроводности λ материала, связывающей между собой величины $[\mathbf{Q}]$ и $\nabla [T]$ в соответствии с (1.1).

В основном уравнении (2.9) содержится неизвестный коэффициент $A(a, \lambda_2)$. Поэтому все величины, получаемые из решения задачи (2.9) — (2.11), будут зависеть от этого коэффициента как от параметра. Чтобы получить уравнение для этого параметра и тем самым полностью замкнуть теорию, применим условие самосогласованности. А именно, используем решение задачи (2.9) — (2.11) для вычисления дипольного момента $\mathbf{D}$ пробной частицы в соответствии с (2.7), который представится в виде, аналогичном (2.8), с коэффициентом, зависящим от $A(a, \lambda_2)$. Приравнявая этот коэффициент величине $A(a, \lambda_2)$, получим искомое уравнение.

3. Для простоты рассмотрим сначала зернистый материал, содержащий частицы одинакового размера и одинаковой теплопроводности. В этом случае для величины $\lambda'(r, a)$ из (2.9) имеем

$$(3.1) \quad \lambda'(r, a) = \begin{cases} \lambda' = \lambda_1 - \alpha, & r > 2a \\ \lambda_1 & , \quad r < 2a, \end{cases} \quad \alpha = nA$$

Таким образом, пробная частица находится в среде с теплопроводностью λ' , но отделена от нее концентрическим слоем толщины a , теплопроводность которого равна λ_1 . Гипотеза о существовании такого слоя была введена впервые из феноменологических соображений в [6] и широко использовалась впоследствии, но толщина этого промежуточного слоя оставалась неизвестной.

Линейный масштаб температурного возмущения, вносимого пробной частицей, имеет порядок a . Поэтому из уравнения (2.9) следует:

$$\left| \frac{\partial \langle T_1 \rangle / \partial t}{\nabla (\lambda \nabla \langle T_1 \rangle)} \right| \sim \frac{\omega a^2}{\lambda} \sim \frac{\omega a^2}{\lambda_1} \ll 1$$

(здесь учтена оценка (1.5) для ω). Таким образом, производная по времени в (2.9) должна быть опущена.

Возможны два случая: $\lambda_2 \geq \lambda_1$ и $\lambda_2 \ll \lambda_1$. В первом случае производная по времени должна быть опущена и в уравнении (2.10), так что имеем фак-

тически стационарную задачу о теплопроводности вокруг пробной частицы. Ясно, что в этом случае эффективная теплопроводность материала не зависит от ω и уравнения (1.1) и (1.4) справедливы. Во втором случае оба члена в (2.10) могут быть одного порядка величины, а соотношения типа (1.1) имеют место лишь для отдельных фурье-компонент средних градиента температуры и потока тепла, причем коэффициенты в этих соотношениях различны для разных компонент.

Рассмотрим сначала первый случай. Задача (2.9)–(2.11) с учетом (3.1) приобретает вид

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Delta \langle T_1 \rangle &= 0 \quad (r > 2a); \quad \Delta \langle T_1 \rangle_* = 0 \quad (a < r < 2a) \\ \Delta \langle T_2 \rangle &= 0 \quad (r < a) \\ \langle T_1 \rangle &= \langle T_1 \rangle_*, \quad \lambda' \mathbf{n} \nabla \langle T_1 \rangle = \lambda_1 \mathbf{n} \nabla \langle T_1 \rangle_* \quad (r = 2a) \\ \langle T_1 \rangle_* &= \langle T_2 \rangle, \quad \lambda_1 \mathbf{n} \nabla \langle T_1 \rangle_* = \lambda_2 \mathbf{n} \nabla \langle T_2 \rangle \quad (r = a) \\ \langle T_1 \rangle &\rightarrow \mathbf{E} \mathbf{r} \quad (r \rightarrow \infty), \quad \langle T_2 \rangle < \infty \quad (r = 0) \end{aligned}$$

где $\mathbf{E}$ — заданный градиент температуры $\langle T_1 \rangle$ на бесконечном удалении от пробной частицы. Решение задачи (1.2) имеет вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \langle T_1 \rangle &= \{1 - 4 \Delta^{-1} [\beta (7\kappa + 17) - 2(5\kappa + 7)] (a/h)^3\} \mathbf{E} \mathbf{r} \\ \langle T_1 \rangle_* &= 12 \beta \Delta^{-1} [\kappa + 2 - (\kappa - 1)(a/r)^3] \mathbf{E} \mathbf{r} \\ \langle T_2 \rangle &= 36 \beta \Delta^{-1} \mathbf{E} \mathbf{r}, \quad \kappa = \lambda_2 / \lambda_1, \quad \beta = \lambda' / \lambda_1, \\ \Delta &= \beta (7\kappa + 17) + 5\kappa + 7 \end{aligned}$$

Плотность теплового потока q на поверхность пробной частицы из (2.3)

$$(3.4) \quad q = -\lambda_1 \mathbf{n} (\nabla \langle T_1 \rangle - \mathbf{E})_{r=a} = -\lambda_1 \Delta^{-1} [\beta (29\kappa - 17) - 5\kappa - 7]$$

Вычисляя дипольный момент пробной частицы из (2.7), сравнивая результат с (2.8) и учитывая (3.1), получаем

$$(3.5) \quad \alpha = -\rho q, \quad \lambda' = \lambda_1 + \rho q$$

Второе соотношение (3.5) с q из (3.4) представляет собой уравнение для неизвестной кажущейся теплопроводности λ' (или коэффициента $\beta = \lambda' / \lambda_1$), решение которого имеет вид

$$(3.6) \quad \beta = [2(7\kappa + 17)]^{-1} \{ (2 + 29\rho)\kappa + 10 - 17\rho + \\ + [(2 + 29\rho)\kappa + 10 - 17\rho]^2 + 4(1 - \rho)(5\kappa + 7)(7\kappa + 17) \}^{1/2}$$

Из (1.2), (2.12) и (3.3) имеем далее

$$(3.7) \quad \begin{aligned} [Q] &= -\lambda_1 (1 - \rho + 36\rho\beta\Delta^{-1}) \mathbf{E} \\ \nabla [T] &= (1 - \rho + 36\rho\beta\Delta^{-1}) \mathbf{E} \end{aligned}$$

причем Δ и β , κ определены соответственно в (3.3) и (3.6). Выражение для эффективной теплопроводности λ следует из (1.1) и (3.7)

$$(3.8) \quad \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\beta\Delta}{(1 - \rho)\Delta + 36\rho\beta} = \frac{(7\kappa + 17)\beta + 5\kappa + 7}{(1 - \rho)[(7\kappa + 17)\beta + 5\kappa + 7] + 36\rho\beta} \beta$$

причем выражение для β дано в (3.6).

Легко также проверить, что поток $[Q]$ из (3.7) тождественно равен величине $-\lambda' \mathbf{E} = -\lambda_1 \beta \mathbf{E}$, как это отмечалось в конце предыдущего раздела. Для иллюстрации на фигуре приведены зависимости отношения λ / λ_1 от $\kappa = \lambda_2 / \lambda_1$ при разных значениях ρ (сплошные кривые). Из (3.8) легко

получить приближенные формулы для λ / λ_1 , верные при малых ρ и малых и больших κ .

Отметим, что появление промежуточного слоя, отделяющего пробную частицу от фиктивной среды с теплопроводностью λ' , связано с учетом того, что частицы наполнителя не могут перекрываться. Представляется

естественным, что при достаточно малой концентрации наполнителя, учет этого обстоятельства не очень существен. В этом случае вместо (3.2) получается более простая задача для пробной частицы, погруженной в однородную среду с теплопроводностью λ' . Соответствующие выражения для λ / λ_1 и $\beta = \lambda' / \lambda_1$ имеют вид

$$(3.9) \quad \lambda / \lambda_1 = \beta (\kappa + 2\beta) \times \\ \times [(1 - \rho) (\kappa + 2\beta) + 3\rho\beta]^{-1} \\ \beta = 1/4 \{ 2(1 - \rho) - \kappa(1 - \\ - 3\rho) + [(2(1 - \rho) - \kappa(1 - \\ - 3\rho))^2 + 8\kappa(1 - \rho)]^{1/2} \}$$

При $\kappa \rightarrow \infty$ и $\rho > 1/3$ обе эти величины также обращаются в бесконечность. Этот странный вывод обусловлен, конечно, тем, что в рамках мо-

дели, приводящей к (3.9), допускается перекрытие частиц. Кривые λ / λ_1 из (3.9) показаны на фигуре пунктиром. Видно, что при не очень больших ρ и величинах $|\kappa|$, не слишком сильно отличающихся от единицы, обсуждаемая упрощенная модель приводит к результатам, близким к точной формуле (3.8).

Если в зернистом материале имеются частицы одного размера a , но разной теплопроводности (т. е. $\psi(a', \lambda_2) = \psi(\lambda_2) \delta(a' - a)$), то прежним методом легко получить формулы, обобщающие (3.6) и (3.8). А именно, получаем следующее уравнение для β и выражение для λ / λ_1 :

$$(3.10) \quad \beta = 1 + \int \rho(\lambda_2) \frac{(29\kappa - 17)\beta - 5\kappa - 7}{(7\kappa + 17)\beta + 5\kappa + 7} d\lambda_2 \\ \frac{\lambda}{\lambda_1} = \beta \left[1 - \rho + 36\beta \int \frac{\rho(\lambda_2) d\lambda_2}{(7\kappa + 17)\beta + 5\kappa + 7} \right]^{-1} \\ (\rho(\lambda_2) = v(a) n \psi(\lambda_2))$$

Важное свойство величины λ / λ_1 из (3.8) и (3.10) состоит в ее независимости от радиуса частиц наполнителя, что представляет собой следствие автомодельности решения (3.3) задачи (3.2). Поэтому если зернистый материал содержит частицы разных размеров, то в первом приближении формулы (3.8) и (3.10) по-прежнему справедливы. Для нахождения точного соотношения для λ / λ_1 в этом случае нужно, конечно, решать задачу (2.9)–(2.11) с кажущейся теплопроводностью $\lambda'(r, a)$, зависящей от r . Отметим в этой связи, что приближенная формула (3.9) для λ / λ_1 , соответствующая модели неперекрывающихся сфер, в принципе не зависит ни от среднего размера частиц наполнителя, ни от их распределения по размерам.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $\lambda_2 \ll \lambda_1$. В этом случае соотношение (1.1), вообще говоря, несправедливо. Соотношение такого типа выполняется лишь для фурье-преобразований средних теплового потока и градиента температуры. Для простоты ограничимся рассмотрением мате-

риала с зернами одного размера и одинаковой теплопроводности. Тогда с учетом (3.1) получим из (2.9)–(2.11) следующую задачу для фурье-преобразований τ_1 и τ_2 величин $\langle T_1 \rangle$ и $\langle T_2 \rangle$:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \Delta \tau_1 &= 0 \quad (r > 2a), \quad \Delta \tau_{1*} = 0 \quad (a < r < 2a), \quad i\omega \tau_2 = \lambda_2 \Delta \tau_2 \quad (r < a) \\ \tau_1 &= \tau_{1*}, \quad \lambda' n \nabla \tau_1 = \lambda_1 n \nabla \tau_{1*} \quad (r = 2a) \\ \tau_{1*} &= \tau_2, \quad \lambda_1 n \nabla \tau_{1*} = \lambda_2 n \nabla \tau_2 \quad (r = a) \\ \nabla \tau_1 &\rightarrow \varepsilon \quad (r \rightarrow \infty), \quad \tau_2 < \infty \quad (r = 0) \end{aligned}$$

где ε — фурье-преобразование вектора $\mathbf{E}$.

Решение (3.11) имеет вид

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \tau_1 &= [1 + B_1 (a/r)^3] \varepsilon r, \quad \tau_{1*} = [C_* + B_* (a/r)^3] \varepsilon r \\ \tau_2 &= C_2' r^{-3/2} J_{3/2}(\sqrt{-ic\xi}) \varepsilon r = C_2 R(c\xi) \varepsilon r \\ R(x) &= \frac{3}{-ix^2} \left(\frac{\sin \sqrt{-ix}}{\sqrt{-ix}} - \cos \sqrt{-ix} \right), \quad c = \left(\frac{\omega a^2}{\lambda_2} \right)^{1/2}, \quad \xi = \frac{r}{a} \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$(3.13) \quad \begin{aligned} B_1 &= 4 \Delta^{-1} [-\beta (7\kappa R_2 + 17 R_1) + 2 (5\kappa R_2 + 7 R_1)] \\ B_* &= -12 \beta \Delta^{-1} (\kappa R_2 - R_1) \\ C_* &= 12 \beta \Delta^{-1} (\kappa R_2 + 2 R_1), \quad C_2 = 36 \beta \Delta^{-1} \\ \hat{R}_1 &= R(c), \quad R_2 = (\xi d / d\xi + 1) R(c\xi)|_{\xi=1} \end{aligned}$$

причем параметры κ , β , Δ определены в (3.3). При $c \rightarrow 0$ из (3.12) и (3.13) получается решение стационарной задачи (3.3).

Уравнение для β , которое получается прежним методом, совпадает с аналогичным уравнением стационарной задачи, так что β по-прежнему выражается при помощи (3.6). В рассматриваемом случае $\lambda_2 \ll \lambda_1$, так что можно принять $\kappa \approx 0$. Тогда из (3.6) следует:

$$(3.14) \quad \beta \approx 1 - \rho$$

Определяя прежним методом фурье-преобразования средних потока тепла и градиента температуры в материале, соответствующие решению (4.12), получим для эффективной теплопроводности материала $\lambda(\omega)$ выражение

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \frac{\lambda(\omega)}{\lambda_1} &= \frac{24 - 17\rho}{24 + (365 - 17)\rho}, \quad z = \sqrt{-ic} = \left(-\frac{i\omega a^2}{\lambda_2} \right)^{1/2} \\ \sigma &= \frac{1}{v(a) R_1} \int_{r < a} R(c\xi) dr = 3 \frac{\text{Si } z - \sin z}{\sin z - \cos z}, \quad \text{Si } z = \int_0^z \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \end{aligned}$$

Здесь контур интегрирования C соединяет точки 0 и z в комплексной плоскости z ; при выводе (3.15) было использовано соотношение (3.14).

Связь между величинами $[Q]$ и $\nabla [T]$, заменяющая в данном случае соотношение (1.1), имеет вид

$$(3.16) \quad [Q] = - \int e^{i\omega t} \lambda(\omega) \nabla \tau d\omega, \quad \nabla \tau = \int e^{-i\omega t} \nabla [T] dt$$

Уравнение макроскопического переноса в зернистом материале приобретает форму (ср. с (1.4))

$$(3.17) \quad \frac{\partial [T]}{\partial t} = \nabla \int_0^t e^{i\omega(t-t')} \lambda(\omega) \nabla [T]_{t=t'} d\omega dt'$$

где $\lambda(\omega)$ определена в (3.15).

Таким образом, в случаях, когда теплопроводность наполнителя значительно меньше теплопроводности связующего, имеет место существен-

ная частотная дисперсия эффективной теплопроводности зернистого материала. Это обстоятельство существенно влияет на процессы нестационарного теплопереноса в таких зернистых материалах и, например, должно учитываться при анализе результатов динамических экспериментов, проводимых с композитными материалами, зернистыми плотными и псевдооживленными слоями и т. п. (см., например, [7,8]).

В заключение отметим некоторые возможные пути обобщения предложенной теории. Прежде всего, представляется целесообразным выяснить подробнее степень применимости дипольного приближения, использованного выше. Как следует из обсуждения в [1], следующий квадрупольный член в разложении (2.4) может, вообще говоря, стать существенным при $\kappa \gg 1$ или $\kappa \ll 1$. Отметим, что вклад точечных тепловых квадрупольных в выражение для λ / λ_1 оказывается сильно зависящим от радиуса частиц. Однако, поскольку экспериментальные значения эффективной теплопроводности зернистых материалов зависят от размера зерен весьма слабо, можно сделать вывод о сравнительно незначительном влиянии квадрупольных моментов на перенос тепла в зернистом материале.

Далее изложенный выше общий метод может быть применен к исследованию зернистых материалов более сложной структуры, содержащих частицы наполнителя, форма которых отлична от сферической, при различных функциях распределения для параметров, характеризующих ориентацию частиц. В частности, если эта функция не изотропна, имеется тензор эффективных значений теплопроводности зернистого материала, заменяющий скалярную эффективную теплопроводность, рассмотренную выше.

Наконец, в ряде практических задач существенны контактная теплопроводность между соприкасающимися зернами наполнителя, радиационная составляющая теплопереноса и возможный скачок температуры на поверхности зерен в зернистых слоях, заполненных газом при низком давлении. Все эти явления выше не учитывались.

Отметим еще, что полученные формулы для λ / λ_1 могут быть непосредственно использованы при расчете эффективного коэффициента диффузии вещества в зернистом материале, а также при вычислении эффективных стационарных значений электропроводности и диэлектрической или магнитной проницаемости зернистых проводников и диэлектриков. Этот вывод следует из того, что указанные величины могут быть введены совершенно аналогично величине λ в (1.1) — (1.3), а соответствующие математические задачи для концентрации вещества и потенциалов электрического или магнитного полей имеют в точности тот же вид, что и задача (2.9) — (2.11) для температуры.

Поступила 19 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *de Vries D. A.* The thermal conductivity of granular materials. Annexe 1952-1. Bull. Inst. Internat. Froid, 1952, vol. 32.
2. *Hashin Z.* Assessment of the self-consistent scheme approximation: conductivity of particulate composites. J. Composite Materials, 1968, vol. 2, No. 3.
3. *Tam C. K. W.* The drag on a cloud of particles in low Reynolds number flow. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 3.
4. *Бувсич Ю. А., Марков В. Г.* Реология концентрированных смесей жидкости с мелкими частицами. Параметры межфазового взаимодействия. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
5. *Batchelor G. K.* Sedimentation in a dilute dispersion of spheres. J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, pt 2.
6. *Kerner E. H.* The electrical conductivity of composite media. Proc. Phys. Soc., 1956, vol. 369, No. 8.
7. *Asbjørnsen O. A., Wang B.* Heat transfer and diffusion in fixed beds. Chem. Engng Sci., 1971, vol. 26, No. 5.
8. *Gunn D. J., England R.* Dispersion and diffusion in beds of porous particles. Chem. Engng Sci., 1971, vol. 26, No. 9.