УДК 532.59

ВЫСШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТЕОРИИ КНОИДАЛЬНЫХ ВОЛН

Е. А. Карабут

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Решение задачи о гравитационных волнах на поверхности жидкости ищется в виде ряда, первый член которого соответствует теории мелкой воды. Подобные разложения изучались ранее численно и аналитически, однако их структура оставалась неясной. Причина заключается в сложности исходной постановки задачи. В настоящей работе вместо сильнонелинейной краевой задачи со свободной границей, содержащей несколько неизвестных функций, предлагается решать одно обыкновенное дифференциально-разностное квадратично-нелинейное уравнение первого порядка, содержащее одну неизвестную функцию.

Введение. Рассматривается классическая задача о волнах на поверхности жидкости конечной глубины, имеющих одну впадину и одну вершину на периоде. Жидкость идеальная и несжимаемая, поверхностное натяжение отсутствует. Дно ровное, течение установившееся, свободная поверхность неподвижна и периодична.

В данной работе, говоря о теории мелкой воды, подразумевается не простая теория мелкой воды, не содержащая уединенных волн, а разложение, впервые описанное К. Фридрихсом. Это разложение в дальнейшем будет называться разложением мелкой воды. Первые его члены найдены в ранних работах Буссинеска, Рэлея, Кортевега и де Фриза. Полученные решения из-за присутствия в них функций cn названы кноидальными волнами. К. Фридрихсом предложена систематическая процедура нахождения последующих членов разложения, включающая различные растяжения по двум разным направлениям, введение малого параметра ε, определяемого этими растяжениями, асимптотическое разложение по ε.

Задача о волнах существенно упрощается, если ее рассматривать не в плоскости физических переменных, а в плоскости комплексного потенциала. В этом случае вместо задачи в области с заранее неизвестной границей имеем краевую задачу в известной области — полосе. В настоящей работе найдено разложение мелкой воды для конформного отображения полосы на область, занимаемую жидкостью. Решение должно быть периодично вдоль полосы, поскольку мы ищем периодические гравитационные волны. В работах [1–3] высказывается предположение, что решение должно быть периодичным также и поперек полосы. Предположение оказалось полезным, так как периодичное поперек полосы решение в ряде случаев может быть найдено. Основанием для этого предположения явилось то, что разложение мелкой воды содержит эллиптические функции Якоби cn (или sn), являющиеся двоякопериодическими. Ранее такое разложение рассматривалось только на границе и не исследовалось вне ее. Обоснованием истинности высказанного предположения могло бы служить доказательство того, что все члены разложения — полиномы от функций Якоби.

Используя ЭВМ, Дж. Фентон нашел 9 членов ряда для уединенной волны [4] и 5 членов для кноидальных волн [5]. В работах [6–8] получены соответственно 14, 17, 27 членов ряда

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта № 43 СО РАН «Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости».

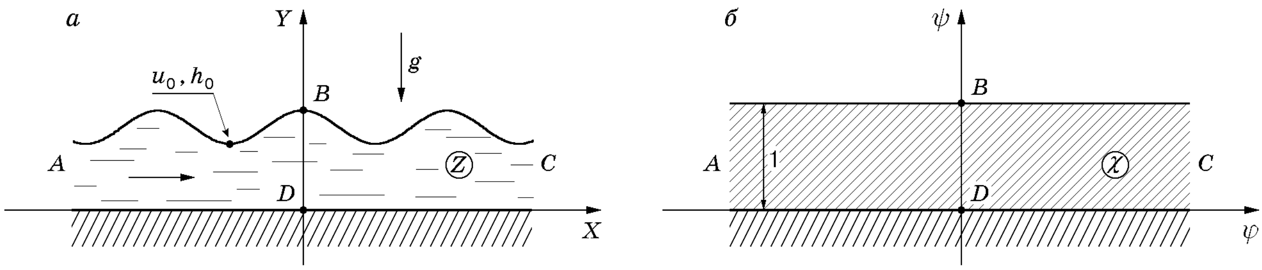

Рис. 1

для уединенных волн. В [9, 10] задача решалась в плоскости комплексного потенциала и доказано существование кноидальных волн.

Построение высших приближений теории мелкой воды сводится к последовательному нахождению членов ряда $g_j(z)$ из дифференциального уравнения

$$g_j'' + 4\rho^2[(1+k^2) - 3k^2\mathrm{sn}^2(\rho z, k)]g_j = h_j(z) \qquad (j \geqslant 2), \tag{1}$$

где ρ, k — вещественные свободные параметры. Основная сложность заключается в нахождении правой части уравнения $h_j(z)$. Обычный способ определения $h_j(z)$ по ранее найденным членам громоздкий, в настоящей работе для $h_j(z)$ получены явные формулы. Функции $h_j(z)$ являются четными периодическими с периодом $2K(k)/\rho$. Здесь и далее через $K(k)$ и $E(k)$ обозначены полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Функции $g_j(z)$ также должны быть четными и периодическими. Справедлива следующая лемма, доказанная в [10].

Лемма 1. *Если h_j — четная непрерывная периодическая функция с периодом $2K(k)/\rho$, то уравнение* (1) *имеет единственное четное периодическое решение $g_j(z)$ с тем же периодом.*

Однако решение $g_j(z)$ все же не единственно, поскольку функция $h_j(z)$ определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной μ_j. Ни в одной из указанных выше работ это обстоятельство не упоминается и вопрос выбора μ_j не обсуждается.

Постановка задачи. Поместим начало декартовой системы координат на дне. Ось X направим вдоль дна слева направо, а ось Y — вертикально вверх таким образом, чтобы она проходила через вершину волны (рис. 1,*а*).

Пусть h_0, u_0 — глубина и скорость на свободной поверхности во впадине волны, g — ускорение свободного падения. Считаем, что функция тока Ψ на дне равна нулю и $\Psi = \Psi_0$ на свободной поверхности. Пусть $\Psi_0 > 0$, т. е. жидкость движется слева направо.

При обезразмеривании задачи возникают две константы: $\delta = \Psi_0/(u_0 h_0)$ и число Фруда $\mathrm{Fr} = u_0/\sqrt{gh_0}$. В плоскости безразмерного комплексного потенциала $\chi = \varphi + i\psi = (\Phi + i\Psi)/\Psi_0$ жидкости соответствует полоса шириной 1 (рис. 1,*б*). Необходимо определить конформное отображение этой полосы на область, занимаемую жидкостью в плоскости физических переменных. Это отображение ищем в виде

$$Z = X + iY = h_0(2 + \mathrm{Fr}^2)f(\chi). \tag{2}$$

Выбор коэффициента $2 + \mathrm{Fr}^2$ здесь не случаен. При таком выборе интеграл Бернулли содержит не две безразмерные константы, а только одну

$$\lambda = (\delta\,\mathrm{Fr})^2/(2 + \mathrm{Fr}^2)^3. \tag{3}$$

Пусть точка $\chi = 0$ находится под вершиной волны, т. е. $f(0) = 0$. Функция $f(\chi)$ полностью определяет все параметры течения. Даже не зная Fr, мы можем, рассматривая $f(\varphi + i)$, определить форму свободной поверхности, хотя и в неизвестном масштабе длины. Число Фруда Fr, а следовательно, и этот масштаб могут быть получены из условия

$\operatorname{Im} f_{\text{в}} = 1/(2+\mathrm{Fr}^2)$, где $f_{\text{в}}$ — значение конформного отображения в низшей точке свободной поверхности.

Таким образом, для нахождения волн на воде имеется следующая

Задача 1. Найти константу λ и аналитическую в полосе

$$0 < \psi < 1, \qquad -\infty < \varphi < \infty \tag{4}$$

функцию $f(\chi)$, удовлетворяющую краевым условиям:

— постоянства давления (интеграл Бернулли)

$$\Big|\frac{d\,f}{d\chi}\Big|^2 = \frac{\lambda}{1 - 2\operatorname{Im} f} \qquad (\psi = 1); \tag{5}$$

— ровного дна

$$\operatorname{Im} f = 0 \qquad (\psi = 0). \tag{6}$$

Считается, что разложению мелкой воды должны предшествовать различные растяжения по двум разным направлениям. Например, К. Фридрихс и Д. Хайерс, исследуя частный случай уединенных волн, пишут: «Горизонтальная независимая переменная подвергается растяжению, зависящему от параметра ε, в то время как вертикальная независимая переменная остается неизменной. Поступая таким образом, мы нарушаем гармонический характер функций, описывающих течение... Нам кажется, что такая процедура обязательна при прямом подходе к изучению уединенных волн» [11]. Как построить разложение мелкой воды для конформного отображения? Если ввести различные растяжения по φ и ψ, то утратятся все преимущества комплексного описания задачи. Поступим иначе: будем считать, что $f(\chi)$ является медленноменяющейся функцией от χ, т. е. предположим, что существует малый параметр ε и f зависит не от χ, а от $z = x + iy = \varepsilon\chi$. Новую функцию обозначим той же буквой $f(z)$, а далее из контекста всегда будет понятно, какой аргумент имеет f. Функция $f(z)$ остается аналитической, а ее реальная и мнимая части — гармоническими функциями.

Определение 1. Разложение вида

$$f(z) = \varepsilon^{-1} f_0(z) + \varepsilon f_1(z) + \varepsilon^3 f_2(z) + \ldots \tag{7}$$

называется разложением мелкой воды.

Обозначим $g_j(z) = df_j(z)/dz$. В дальнейшем производная $df(z)/d\chi = g_0(z) + \varepsilon^2 g_1(z) + \varepsilon^4 g_2(z) + \ldots$ также будет называться разложением мелкой воды. На первый взгляд определение 1 является неполным, и к нему необходимо добавить разложение для константы

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_1 + \varepsilon^4\lambda_2 + \ldots, \tag{8}$$

так как при решении задачи 1 необходимо использовать оба ряда (7), (8). В действительности ряд (7) автономен, поскольку, как показано ниже, существует формулировка задачи о волнах, не содержащая λ.

Разложение мелкой воды непротиворечиво, если при $\varepsilon = 0$ имеется течение с горизонтальной свободной поверхностью и числом Фруда, равным единице, т. е. $\delta = \mathrm{Fr} = 1$. Таким образом, из (2), (3) определяем начальные члены $f_0 = z/3$, $\lambda_0 = 1/27$. Следующие члены рядов находятся из решения дифференциальных уравнений, получаемых при подстановке рядов (7), (8) в (4)–(6) и приравнивании членов при одинаковых степенях ε. Так как вычисления довольно сложны, сделаем ряд упрощений.

Первое упрощение состоит в том, чтобы от краевой задачи 1 перейти к уравнению, справедливому не только на границе, но и в некоторой области. В силу принципа симметрии из условия ровного дна (6) имеем $\overline{f(\varphi + i)} = f(\varphi - i)$. Следовательно, условие (5) можно переписать в виде

$$\frac{d\,f(\varphi + i)}{d\varphi}\,\frac{d\,f(\varphi - i)}{d\varphi} = \frac{\lambda}{1 + i[f(\varphi + i) - f(\varphi - i)]}. \tag{9}$$

Продолжим аналитически это равенство с границы. Заменяя φ на χ, получим кубически-нелинейное дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{df(\chi+i)}{d\chi}\,\frac{df(\chi-i)}{d\chi}=\frac{\lambda}{1+i[f(\chi+i)-f(\chi-i)]}. \tag{10}$$

Однако задача о волнах квадратично-нелинейная, что впервые показано в [12], где выписано соответствующее операторное уравнение. Поэтому второе упрощение состоит в том, чтобы найти из (10) квадратично-нелинейное следствие. Заменяя χ на $\chi+i$ и $\chi-i$, получим соответственно

$$\frac{df(\chi+2i)}{d\chi}\,\{1+i[f(\chi+2i)-f(\chi)]\}=\frac{\lambda}{df(\chi)/d\chi}; \tag{11}$$

$$\frac{df(\chi-2i)}{d\chi}\,\{1+i[f(\chi)-f(\chi-2i)]\}=\frac{\lambda}{df(\chi)/d\chi}. \tag{12}$$

Приравнивая левые части (11) и (12), найдем искомое следствие. При этом достигнуто третье упрощение: новое уравнение не содержит λ. Таким образом, для нахождения волн на воде предлагается вместо задачи 1 решать следующую задачу.

Задача 2. Найти аналитическую функцию $f(\chi)$, удовлетворяющую в некоторой области уравнению

$$\frac{df(\chi+2i)}{d\chi}\,\{1+i[f(\chi+2i)-f(\chi)]\}=\frac{df(\chi-2i)}{d\chi}\,\{1+i[f(\chi)-f(\chi-2i)]\}. \tag{13}$$

При переходе от задачи 1 к задаче 2 существенной является замена φ на χ, т. е. переход от (9) к (10). Это эквивалентно аналитическому продолжению $f(\chi)$ с границы полосы (4) в некоторую область вне полосы, что возможно, если существует область вне полосы (4) без особых точек. Предположим, например, что $f(\chi)$ аналитична в некотором прямоугольнике $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$, $-2<\psi<3$. Тогда уравнение (10) будет выполняться в меньшем прямоугольнике $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$, $-1<\psi<2$. Сдвиг последнего на $-i$ и $+i$ даст соответственно два новых прямоугольника, в каждом из которых выполняется (11) или (12). Пересечение этих прямоугольников дает прямоугольник $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$, $0<\psi<1$, т. е. часть полосы (4), где выполняется (13).

Решение задачи в рядах. Мы не можем доказать аналитичность $f(\chi)$ вне полосы (4), а значит, и то, что задача 2 является следствием задачи 1. Однако для нас важно, что решения в рядах (7), (8) задач 1 и 2 дают одинаковые результаты.

Заменяя в (13) χ на z, получим

$$\frac{df(z+2i\varepsilon)}{dz}\,\{1+i[f(z+2i\varepsilon)-f(z)]\}=\frac{df(z-2i\varepsilon)}{dz}\,\{1+i[f(z)-f(z-2i\varepsilon)]\}. \tag{14}$$

Покажем, что уравнение (14) можно представить в виде $d\{\ldots\}/dz=0$. Следовательно, выражение в фигурных скобках должно быть константой. Перепишем (14) в виде

$$i(A_1+A_2)+\frac{df(z+2i\varepsilon)}{dz}-\frac{df(z-2i\varepsilon)}{dz}=0,$$

где

$$A_1=\frac{1}{2}\,\frac{d}{dz}\,\{[f(z+2i\varepsilon)-f(z)]^2+[f(z-2i\varepsilon)-f(z)]^2\},$$

$$A_2=\frac{df(z)}{dz}\,\{f(z+2i\varepsilon)+f(z-2i\varepsilon)-2f(z)\},$$

и подставим в эти выражения разложение Тейлора

$$f(z \pm 2i\varepsilon) - f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 2i\varepsilon)^l}{l!} \frac{d^l}{dz^l} f(z), \qquad \frac{df(z \pm 2i\varepsilon)}{dz} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 2i\varepsilon)^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{dz^{l+1}} f(z).$$

Величина A_1 представлена в виде производной. Аналогичное представление можно получить и для A_2, если воспользоваться тождеством

$$2 \frac{df(z)}{dz} \frac{d^{2j} f(z)}{dz^{2j}} = \frac{d}{dz} \sum_{p=1}^{2j-1} (-1)^{p+1} \frac{d^p f(z)}{dz^p} \frac{d^{2j-p} f(z)}{dz^{2j-p}}.$$

После некоторых упрощений имеем

$$\frac{d}{dz} \Big\{ i \sum_{m=1}^{\infty} (2i\varepsilon)^{2m} \sum_{p=1}^{2m-1} \gamma_{mp} \frac{d^p f(z)}{dz^p} \frac{d^{2m-p} f(z)}{dz^{2m-p}} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\varepsilon)^{2m+1}}{(2m+1)!} \frac{d^{2m+1} f(z)}{dz^{2m+1}} \Big\} = 0, \tag{15}$$

где $\gamma_{mp} = 1/(p!(2m-p)!) + (-1)^{p+1}/(2m)!$.

Подставим в уравнение (15) разложение мелкой воды (7). Приравнивая к нулю коэффициенты при ε^{2j} ($j \geqslant 1$), получим

$$\frac{d}{dz} \Big\{ \sum_{m=1}^{j} (2i)^{2m} \sum_{p=1}^{2m-1} \gamma_{mp} \sum_{l=0}^{j-m} \frac{d^p f_l}{dz^p} \frac{d^{2m-p} f_{j-m-l}}{dz^{2m-p}} - \sum_{m=1}^{j} \frac{(2i)^{2m}}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1} f_{j-m}}{dz^{2m-1}} \Big\} = 0. \tag{16}$$

Первое нетривиальное уравнение (16) при $j = 3$ имеет вид

$$\frac{d}{dz} \Big\{ \frac{d^3 f_1}{dz^3} + \frac{27}{2} \Big(\frac{df_1}{dz}\Big)^2 \Big\} = 0.$$

Выражение в фигурных скобках должно быть константой, которую обозначим μ_1. Аналогичные константы μ_{j-2} возникают при интегрировании следующих уравнений (16). В результате после замены $f_j(z)$ на $g_j(z)$ можно сформулировать теорему.

Теорема 1. *Функции $g_j(z)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям*

$$g_1'' + (27/2) g_1^2 = \mu_1; \tag{17}$$

$$g_j'' + 27 g_1 g_j = h_j \qquad (j \geqslant 2), \tag{18}$$

где

$$h_j = \sum_{m=2}^{j} \sum_{p=1}^{2m-1} \alpha_{mp} \sum_{l=1}^{j-m+1} \frac{d^{p-1} g_l}{dz^{p-1}} \frac{d^{2m-p-1} g_{j+2-m-l}}{dz^{2m-p-1}} - {}$$
$$- \frac{27}{2} \sum_{l=2}^{j-1} g_l g_{j+1-l} + \sum_{l=3}^{j+1} \beta_l \frac{d^{2l-2} g_{j+2-l}}{dz^{2l-2}} + \mu_j. \tag{19}$$

Константы α_{mp}, β_l находятся по формулам

$$\alpha_{mp} = 9(-1)^m 2^{2(m-1)} \Big[\frac{1}{p!(2m-p)!} + \frac{(-1)^{p+1}}{(2m)!}\Big], \qquad \beta_l = 3(-1)^l 2^{2l-1} \frac{1-l}{(2l)!},$$

а константы μ_j не определены.

Получена рекуррентная цепочка дифференциальных уравнений для последовательного нахождения $g_j(z)$. Ниже показано, что имеется семейство четных периодических решений

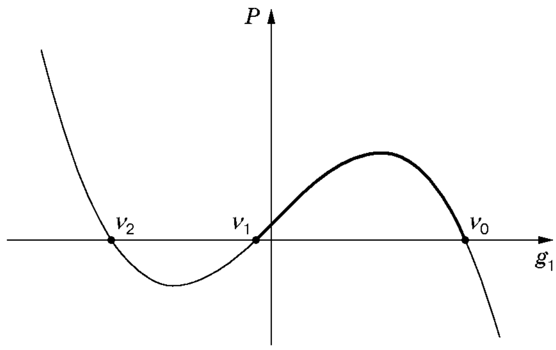

Рис. 2

уравнений (17), (18), зависящее от двух вещественных параметров. Неизвестная μ_1 выражается через эти параметры. Остальные константы μ_j ($j \geqslant 2$) могут быть произвольными числами, при любом их выборе четное периодическое решение $g_j(z)$ существует.

Первое приближение. Проинтегрировав уравнение (17), получим

$$(g_1')^2 = -9g_1^3 + 2\mu_1 g_1 + \mathrm{const} = P(g_1). \tag{20}$$

Кубический полином $P(g_1) = -9(g_1-\nu_0)(g_1-\nu_1)(g_1-\nu_2)$ должен иметь только вещественные корни ν_0, ν_1, ν_2. Действительно, скорость на дне под гребнем и впадиной достигает экстремума. Поскольку величина $\mathrm{const}\,/(df/d\chi)$ имеет смысл скорости, то в данных точках g_1' должно быть равно нулю. Из (20) получаем, что в этих двух точках на дне $P(g_1) = 0$. Таким образом, по крайней мере два корня $P(g_1)$ вещественны, поскольку всюду на дне функция g_1 вещественна. Вещественность третьего корня следует из вещественности коэффициентов полинома.

Без ограничения общности полагаем $\nu_0 > \nu_1 > \nu_2$. Коэффициент при g_1^2 в $P(g_1)$ равен нулю, следовательно,

$$\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 = 0. \tag{21}$$

Рассмотрим уравнение (20) на дне, т. е. положим $z = x$. Под вершиной волны ($x = 0$) скорость жидкости имеет минимум, поэтому при возрастании x в некоторой окрестности справа от точки $x = 0$ имеем $g_1' < 0$. Это соображение позволяет выбрать правильный знак при извлечении радикала: $dg_1/dx = -3\sqrt{-(g_1-\nu_0)(g_1-\nu_1)(g_1-\nu_2)}$ ($x > 0$). Выражение под знаком радикала должно быть положительно и ограничено. На графике $P(g_1)$ этим условиям соответствует выделенный участок (рис. 2). Максимальное значение ν_0 функция g_1 принимает под гребнем $x = 0$, поэтому константа интегрирования известна:

$$\int\limits_{\nu_0}^{g_1} \frac{d\xi}{\sqrt{-(\xi-\nu_0)(\xi-\nu_1)(\xi-\nu_2)}} = -3x.$$

В левой части стоит эллиптический интеграл (подробнее см. [13]), после обращения которого получим

$$g_1 = \nu_0 - (\nu_0-\nu_1)\,\mathrm{sn}^2(\rho x, k) \qquad (0 \leqslant k \leqslant 1); \tag{22}$$

$$\rho = \frac{3}{2}\sqrt{\nu_0-\nu_2}, \qquad k = \sqrt{\frac{\nu_0-\nu_1}{\nu_0-\nu_2}}. \tag{23}$$

Пять параметров ν_0, ν_1, ν_2, ρ, k связаны тремя уравнениями (21), (23), поэтому два параметра можно считать независимыми: ρ и модуль эллиптических функций k*.

Выражая в (22) все параметры через ρ и k и заменяя x на z, находим первый нетривиальный член разложения мелкой воды

$$g_1 = \rho^2\Big[\frac{4}{27}\,(1+k^2) - \frac{4}{9}\,k^2\,\mathrm{sn}^2\rho z\Big], \quad f_1 = \rho^2\Big[\frac{4}{27}\,(1+k^2)z - \frac{4}{9}\,k^2\int\limits_0^z \mathrm{sn}^2\rho\xi\,d\xi\Big].$$

Для получения решения, выраженного через χ, надо ввести новый малый параметр $\theta=\varepsilon\rho$, тогда конформное отображение примет вид

$$f(\chi) = \frac{1}{3}\,\chi + \theta^2\Big\{\frac{4}{27}\,(1+k^2)\chi - \frac{4}{9}\,k^2\int\limits_0^\chi \mathrm{sn}^2\theta\zeta\,d\zeta\Big\} + O(\theta^4).$$

Получили двухпараметрическое семейство волновых решений, причем амплитуда и длина волны зависят от обоих параметров θ и k $(0\leqslant k\leqslant 1)$. При $k\to 0$ и $k\to 1$ имеем $\mathrm{sn}\to\sin$ и $\mathrm{sn}\to\mathrm{th}$. Эти предельные случаи соответствуют синусоидальным и уединенным волнам

$$f(\chi)\simeq\chi\Big(\frac{1}{3}+\theta^2\,\frac{4}{27}\Big)+\theta k^2\,\frac{1}{9}\,\sin 2\theta\chi, \quad f(\chi)\simeq\chi\Big(\frac{1}{3}-\theta^2\,\frac{4}{27}\Big)+\theta\,\frac{4}{9}\,\mathrm{th}\,\theta\chi.$$

Второе приближение. Перейдем к решениям уравнений (18). Введем обозначения для аргументов эллиптических функций $u=\rho z$ и для эллиптических функций Якоби $\mathrm{s}=\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{c}=\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{d}=\mathrm{dn}\,u$.

Рассмотрим однородное уравнение (18)

$$g_j'' + 27g_1g_j = 0. \tag{24}$$

Дифференцируя (17), убеждаемся, что g_1' является решением этого уравнения. Таким образом, находим первое решение (24)

$$v(z) = \frac{d\,\mathrm{s}^2}{dz} = 2\rho\,\mathrm{scd}. \tag{25}$$

Поскольку вронскиан равен единице, то вторым линейно независимым решением будет $v\displaystyle\int dz/v^2$. Следовательно, общее решение (18) можно записать в виде

$$g_j = \tilde c_1 v + \tilde c_2 v\int\frac{dz}{v^2} + v\int\frac{dz}{v^2}\int v h_j\,dz. \tag{26}$$

Если функция h_j известна, то согласно лемме 1 для четной и периодической функции $g_j(z)$ константы $\tilde c_1$, $\tilde c_2$ должны определяться единственным образом.

Перейдем к вычислению g_2. Из (19) для $j=2$ имеем

$$h_2 = 15g_1\,\frac{d^2g_1}{dz^2} + \frac{15}{2}\Big(\frac{dg_1}{dz}\Big)^2 + \frac{4}{15}\,\frac{d^4g_1}{dz^4} + \mu_2. \tag{27}$$

Величина h_2 является полиномом от s^2. Для доказательства этого утверждения воспользуемся следующей леммой.

---

*Без ограничения общности параметр ρ можно положить равным единице, поскольку, как показано ниже, он встречается только в виде произведения $\varepsilon\rho$. Если считать произведение $\varepsilon\rho$ новым малым параметром, то это равносильно предположению, что $\rho=1$.

Лемма 2. *Если G_1 и G_2 — полиномы от* s^2 *степени n_1 и n_2 соответственно, то произведение*

$$\frac{d^{2p-j}G_1}{dz^{2p-j}}\,\frac{d^jG_2}{dz^j} \qquad (0\leqslant j\leqslant 2p)$$

является полиномом от s^2 *степени n_1+n_2+p.*

Доказательство. Индукцией по j с применением формулы $d/dz = 2\rho\times\sqrt{(1-\mathrm{s}^2)(1-k^2\,\mathrm{s}^2)}\,d/d\,\mathrm{s}$ получаем, что если G — полином от s^2 степени n, то его нечетные и четные производные определяются по формулам

$$\frac{d^{2j-1}G}{dz^{2j-1}} = \mathrm{s}\sqrt{(1-\mathrm{s}^2)(1-k^2\,\mathrm{s}^2)}\,M, \qquad \frac{d^{2j}G}{dz^{2j}} = N,$$

где M, N — полиномы от s^2 степени $n+j-2$ и $n+j$ соответственно. Таким образом, лемма 2 доказана.

Лемму 2 можно записать в упрощенной форме: каждое дифференцирование по z полинома от s увеличивает его степень на единицу. Поскольку g_1 — полином от s^2 степени 1, то из (27) следует, что h_2 — полином от s^2 степени 3:

$$h_2 = b_2^0 + b_2^1\mathrm{s}^2 + b_2^2\mathrm{s}^4 + b_2^3\mathrm{s}^6. \tag{28}$$

Отметим, что известны все коэффициенты этого полинома, за исключением b_2^0, поскольку этот коэффициент содержит неизвестную константу μ_2.

С учетом (25), (28) имеем $\displaystyle\int vh_2\,dz = \int h_2\,d(\mathrm{s}^2) = b_2^0\mathrm{s}^2 + \frac{1}{2}\,b_2^1\mathrm{s}^4 + \frac{1}{3}\,b_2^2\mathrm{s}^6 + \frac{1}{4}\,b_2^3\mathrm{s}^8$. Введя обозначения $\displaystyle J_n = \mathrm{scd}\int\frac{\mathrm{s}^{2n-4}}{\mathrm{c}^2\mathrm{d}^2}\,du$, из (26) получим

$$g_2 = c_1\,\mathrm{scd} + c_2J_1 + \frac{1}{2\rho^2}\Bigl(b_2^0J_2 + \frac{1}{2}\,b_2^1J_3 + \frac{1}{3}\,b_2^2J_4 + \frac{1}{4}\,b_2^3J_5\Bigr). \tag{29}$$

Все интегралы J_n $(1\leqslant n\leqslant 5)$, входящие в (29), вычисляются. Они состоят из трех слагаемых: квадратного полинома от s^2, функций $u\,\mathrm{scd}$ и $\displaystyle\mathrm{scd}\int\mathrm{d}^2\,du$, умноженных на некоторые константы, и имеют вид $\displaystyle J_n = D_n^0 + D_n^1\mathrm{s}^2 + D_n^2\mathrm{s}^4 + E_nu\,\mathrm{scd} + F_n\,\mathrm{scd}\int\mathrm{d}^2\,du$. Это можно доказать непосредственным дифференцированием, используя, например, систему MAPLE. Константы D_n^m, E_n, F_n представлены в таблице.

n	D_n^0	D_n^1	D_n^2	E_n	F_n
1	-1	$\dfrac{(1+k^2)(2k^4-3k^2+2)}{(k^2-1)^2}$	$-\dfrac{2k^2(1-k^2+k^4)}{(k^2-1)^2}$	$\dfrac{k^2-2}{k^2-1}$	$-\dfrac{2(1-k^2+k^4)}{(k^2-1)^2}$
2	0	$\dfrac{k^4+1}{(k^2-1)^2}$	$-\dfrac{k^2(1+k^2)}{(k^2-1)^2}$	$-\dfrac{1}{k^2-1}$	$-\dfrac{1+k^2}{(k^2-1)^2}$
3	0	$\dfrac{k^2+1}{(k^2-1)^2}$	$-\dfrac{2k^2}{(k^2-1)^2}$	$-\dfrac{1}{k^2-1}$	$-\dfrac{2}{(k^2-1)^2}$
4	0	$\dfrac{2}{(k^2-1)^2}$	$-\dfrac{1+k^2}{(k^2-1)^2}$	$-\dfrac{1}{k^2(k^2-1)}$	$-\dfrac{1+k^2}{k^2(k^2-1)^2}$
5	0	$\dfrac{1+k^2}{k^2(k^2-1)^2}$	$-\dfrac{1+k^4}{k^2(k^2-1)^2}$	$\dfrac{k^2-2}{k^4(k^2-1)}$	$-\dfrac{2(k^4-k^2+1)}{k^4(k^2-1)^2}$

Из (29) следует, что g_2 также состоит из полинома от s^2, функций $u\,\mathrm{csd}$ и $\mathrm{scd}\int \mathrm{d}^2\,du$:

$$g_2 = a_2^0 + a_2^1\mathrm{s}^2 + a_2^2\mathrm{s}^4 + c_1\,\mathrm{scd} + \mathrm{scd}\Big(\omega_1 u + \omega_2\int\limits_0^u \mathrm{d}^2\,du\Big). \tag{30}$$

В (29) среди констант c_1, c_2, b_2^0, b_2^1, b_2^2, b_2^3 неизвестными, подлежащими определению, были c_1, c_2, b_2^0. В (30) сохранилась неизвестная константа c_1, а новые константы — коэффициенты полинома a_2^0, a_2^1, a_2^2 и ω_1, ω_2 — являются функциями неизвестных c_2, b_2^0. Например, в ω_1, ω_2 неизвестные входят следующим образом:

$$\begin{gathered}\omega_1 = \frac{1}{k^2-1}\Big\{c_2(k^2-2) - \frac{b_2^0}{2\rho^2} + \ldots\Big\},\\ \omega_2 = -\frac{1}{(k^2-1)^2}\Big\{2c_2(1-k^2+k^4) + \frac{b_2^0}{2\rho^2}\,(1+k^2) + \ldots\Big\}.\end{gathered} \tag{31}$$

Пусть константа μ_2 в правой части (27) известна, тогда задана одна из трех неизвестных b_2^0. Следовательно, функция h_2 определена, и согласно лемме 1 неизвестные c_1, c_2 определяются единственным образом. Необходимо положить $c_1 = 0$, так как периодическая функция scd является нечетной. Далее, если потребовать периодичности величины $\omega_1 u + \omega_2\int\limits_0^u \mathrm{d}^2\,du$, то, как следует из (30), функция g_2 будет и четной, и периодической. Это требование выполнимо, так как функция $\int\limits_0^u \mathrm{d}^2\,du$ хотя и не является периодической, однако при увеличении u на $2K(k)$ ее значение увеличивается на $2E(k)$. Значит, g_2 будет периодической функцией, если

$$\omega_1 K(k) + \omega_2 E(k) = 0. \tag{32}$$

Подставляя (31) в (32), получаем уравнение для нахождения неизвестной c_2.

Однако константа μ_2 неизвестна, поэтому функция g_2 определяется, вообще говоря, не единственным образом. Покажем, что неединственность связана с неопределенностью параметра ε. Рассмотрим, как изменится разложение мелкой воды

$$\frac{df}{d\chi} = \frac{1}{3} + \varepsilon^2 g_1(z) + \varepsilon^4 g_2(z) + \ldots = \frac{1}{3} + \varepsilon^2 g_1(\varepsilon\chi) + \varepsilon^4 g_2(\varepsilon\chi) + \ldots$$

при замене ε на $\varepsilon + a\varepsilon^3 + \ldots$, где a — вещественное число. С учетом разложения в ряд Тейлора $g_1([\varepsilon + a\varepsilon^3 + \ldots]\chi) = g_1(\varepsilon\chi) + a\varepsilon^3\chi\,dg_1/dz + \ldots$ получим новое разложение мелкой воды $df/d\chi = 1/3 + \varepsilon^2 g_1(z) + \varepsilon^4\tilde g_2(z) + \ldots$, где $\tilde g_2(z) = g_2(z) + 2ag_1(z) + az\,dg_1(z)/dz$. Следовательно, при таком изменении ε меняется $g_2(z)$. Так как $z\,dg_1/dz$ с точностью до числового множителя совпадает с $u\,\mathrm{scd}$, то последнее утверждение можно уточнить: при изменении ε меняется коэффициент ω_1 в (30). Можно подобрать такое ε, при котором $\omega_1 = 0$, тогда следует положить и $\omega_2 = 0$ (иначе g_2 будет непериодической функцией). Только в этом случае функция g_2 является полиномом от s^2. Величина a определяется из уравнения $\omega_1 = 0$ единственным образом.

Итак, существует такой параметр ε, при котором g_2 имеет вид квадратного полинома от s^2: $g_2 = a_2^0 + a_2^1\mathrm{s}^2 + a_2^2\mathrm{s}^4$. Коэффициенты этого полинома выражаются через неизвестные

c_2, b_2^0 ($c_1 = 0$), которые могут быть найдены из решения линейной системы $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ (ω_1, ω_2 определены в (31)). В результате имеем

$$g_2 = \rho^4[-(16/1215)(13k^4 - 43k^2 + 13) - (64/81)k^2(1+k^2)\mathrm{s}^2 + (32/27)k^4\mathrm{s}^4].$$

Приближения высших порядков. Докажем методом индукции по j, что g_j являются полиномами от s^2. Пусть выполнено предположение индукции: для $l < j$ все g_l — полиномы от s^2 степени l. Будем решать уравнения (18). Непосредственно из леммы 2 вытекает

Лемма 3. *Если* $g_l = a_l^0 + a_l^1\mathrm{s}^2 + \ldots + a_l^l\mathrm{s}^{2l}$ ($l < j$), *то функция* h_j *является полиномом от* s^2 *степени* $j+1$: $h_j = b_j^0 + b_j^1\mathrm{s}^2 + \ldots + b_j^{j+1}\mathrm{s}^{2(j+1)}$.

С учетом (25) из (26) получаем формулу, аналогичную (29):

$$g_j = c_1\,\mathrm{scd} + c_2 J_1 + \frac{1}{2\rho^2}\sum_{n=2}^{j+3}\frac{J_n b_j^{n-2}}{n-1} \qquad (j > 2). \tag{33}$$

Здесь также неизвестными являются c_1, c_2, b_j^0. Ранее внешний вид интегралов J_n был найден только для $1 \leqslant n \leqslant 5$. Для установления внешнего вида остальных интегралов, входящих в (33), потребуется

Лемма 4. *При* $n \geqslant 5$ *имеем*

$$J_n = P_n(\mathrm{s}) + Q_n u\,\mathrm{scd} + R_n\,\mathrm{scd}\int \mathrm{d}^2\,du, \tag{34}$$

где $P_n(\mathrm{s})$ *— полином от* s^2 *степени* $n-3$; Q_n, R_n *— константы.*

Доказательство. Обозначим $K_n = \mathrm{scd}\displaystyle\int \mathrm{s}^{2n}\,du$. Используя рекуррентную формулу

$$K_n = \frac{1}{(2n-1)k^2}\,\mathrm{c}^2\mathrm{d}^2\mathrm{s}^{2n-2} + \frac{(2n-2)(1+k^2)}{(2n-1)k^2}\,K_{n-1} - \frac{2n-3}{(2n-1)k^2}\,K_{n-2},$$

индукцией по n нетрудно доказать, что

$$K_n = L_n(\mathrm{s}) + M_n u\,\mathrm{scd} + N_n\,\mathrm{scd}\int \mathrm{d}^2\,du, \tag{35}$$

где $L_n(\mathrm{s})$ — полином от s^2 степени $n+1$; M_n, N_n — константы. Используя (35) и применяя индукцию по n к

$$J_{n+2} = \frac{1}{k^2}\,J_{n+1} + \frac{1}{k^2}\sum_{j=0}^{n-2}K_j - \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{c}^2}{k^2(1-k^2)} - \frac{u\,\mathrm{scd}}{k^2} + \frac{\mathrm{scd}}{k^2(1-k^2)}\int \mathrm{d}^2\,du,$$

получим (34). Лемма 4 доказана.

Из (33) имеем

$$g_j = \sum_{n=0}^{j} a_j^n\mathrm{s}^{2n} + c_1\,\mathrm{scd} + \mathrm{scd}\Big(\omega_1 u + \omega_2\int_0^u \mathrm{d}^2\,du\Big). \tag{36}$$

Далее рассуждения аналогичны приведенным выше. Полагаем в (36) $c_1 = 0$, остальные константы a_j^n, ω_1, ω_2 выражаются через c_2, b_j^0. Например, ω_1, ω_2 определяются по формулам, которые получаются из (31) заменой b_2^0 на b_j^0. Изменением ε на $\varepsilon + a\varepsilon^{2j-1} + \ldots$ мы меняем $g_j(z)$ на $g_j(z) + 2ag_1(z) + az\,dg_1/dz$ и, следовательно, изменяем ω_1 в (36). Положим $\omega_1 = 0$. Это условие определяет константу a единственным образом. Потребовав $\omega_2 = 0$, исключаем непериодический член. Решая далее систему $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, находим c_2, b_j^0 и затем коэффициенты полинома a_j^n. Таким образом, индукцией по j доказана следующая

Теорема 2. *Существует и притом единственный параметр ε такой, что в разложении мелкой воды*

$$\frac{df}{d\chi} = \frac{1}{3} + \varepsilon^2 g_1(\varepsilon\chi) + \varepsilon^4 g_2(\varepsilon\chi) + \dots \tag{37}$$

каждый член g_j является полиномом от s^2 степени j, т. е.

$$g_j = a_j^0 + a_j^1 \mathrm{s}^2 + \dots + a_j^j \mathrm{s}^{2j}. \tag{38}$$

Компьютерные вычисления. Будем искать g_j в виде полинома (38). Подставляя (38) в уравнение (18) и приравнивая члены при одинаковых степенях s, получим линейную систему уравнений с треугольной матрицей. Приведем пять начальных членов разложения (37):

$$\frac{g_1}{\rho^2} = -\frac{4}{9}\,k^2\mathrm{s}^2 + \frac{4}{27}\,(1+k^2), \qquad \frac{g_2}{\rho^4} = \frac{32}{27}\,k^4\mathrm{s}^4 - \frac{64}{81}\,k^2(1+k^2)\mathrm{s}^2 - \frac{16}{1215}\,(13 - 43\,k^2 + 13\,k^4),$$

$$\frac{g_3}{\rho^6} = -\frac{4352}{1215}\,k^6\mathrm{s}^6 + \frac{4352}{1215}\,k^4(1+k^2)\mathrm{s}^4 - \frac{256}{3645}\,k^2(2 + 49\,k^2 + 2\,k^4)\mathrm{s}^2 + {} \\ + \frac{64}{76\,545}\,(1+k^2)(242\,k^4 - 521\,k^2 + 242),$$

$$\frac{g_4}{\rho^8} = \frac{1\,040\,384}{91\,125}\,k^8\mathrm{s}^8 - \frac{4\,161\,536}{273\,375}\,k^6(1+k^2)\mathrm{s}^6 + {} \\ + \frac{16\,384}{273\,375}\,k^4(59\,k^4 + 322\,k^2 + 59)\mathrm{s}^4 - \frac{1024}{5\,740\,875}\,k^2(1+k^2)(1898\,k^4 + 15\,079\,k^2 + 1898)\mathrm{s}^2 - {} \\ - \frac{256}{17\,222\,625}\,(16\,135 - 43\,658\,k^2 + 112\,101\,k^4 - 43\,658\,k^6 + 16\,135\,k^8),$$

$$\frac{g_5}{\rho^{10}} = -\frac{11\,165\,696}{297\,675}\,k^{10}\mathrm{s}^{10} + \frac{11\,165\,696}{178\,605}\,k^8(1+k^2)\mathrm{s}^8 - \frac{16\,384}{120\,558\,375}\,k^6(189\,041 + 730\,984\,k^2 + {} \\ + 189\,041\,k^4)\mathrm{s}^6 + \frac{8192}{120\,558\,375}\,k^4(1+k^2)(37\,528\,k^4 + 473\,303\,k^2 + 37\,528)\mathrm{s}^4 + {} \\ + \frac{8192}{361\,675\,125}\,k^2(26\,909 - 166\,402\,k^2 - 111\,600\,k^4 - 166\,402\,k^6 + 26\,909\,k^8)\mathrm{s}^2 + {} \\ + \frac{1024}{11\,935\,279\,125}\,(1+k^2)(3\,314\,710\,k^8 - 15\,153\,473\,k^6 + 7\,595\,607\,k^4 - 15\,153\,473\,k^2 + 3\,314\,710).$$

Полученные формулы довольно сложны. Они являются полиномами от s^2, коэффициенты которых, в свою очередь, полиномы от k^2. Заметим, что это не единственное представление решения. Можно представить, например, g_j в виде полиномов от c^2 или d^2, коэффициенты которых также будут полиномами от k^2. По-видимому, наиболее простое представление решения получается, если g_j выразить через первый член разложения g_1. Введем новую переменную $\zeta = -(4/9)k^2\mathrm{s}^2 + (4/27)(1+k^2)$, тогда g_j будут полиномами от ζ:

$$\frac{g_1}{\rho^2} = \zeta, \qquad \frac{g_2}{\rho^4} = 6\,\zeta^2 - \frac{368}{1215}\,(1 - k^2 + k^4),$$

$$\frac{g_3}{\rho^6} = \frac{204}{5}\,\zeta^3 - \frac{64}{27}\,(1 - k^2 + k^4)\zeta + \frac{9664}{45\,927}\,(k^2 - 2)(-1 + 2\,k^2)(1 + k^2),$$

$$\frac{g_4}{\rho^8} = \frac{36\,576}{125}\,\zeta^4 - \frac{69\,632}{3375}\,(1-k^2+k^4)\zeta^2 + \\ + \frac{2\,936\,576}{1\,913\,625}\,(k^2-2)(-1+2\,k^2)(1+k^2)\zeta - \frac{2\,196\,736}{5\,740\,875}\,(1-k^2+k^4)^2,$$

$$\frac{g_5}{\rho^{10}} = \frac{2\,649\,672}{1225}\,\zeta^5 - \frac{30\,114\,304}{165\,375}\,(1-k^2+k^4)\zeta^3 + \frac{1\,944\,064}{165\,375}(k^2-2)(-1+2k^2)(1+k^2)\zeta^2 - \\ - \frac{20\,860\,928}{13\,395\,375}(1-k^2+k^4)^2\zeta + \frac{7\,820\,391\,424}{35\,805\,837\,375}(k^2-2)(-1+2k^2)(1+k^2)(1-k^2+k^4).$$

Новые формулы значительно упростились. Коэффициенты при ζ являются полиномами от k^2, которые раскладываются на простые множители, причем неопределенным остается только числовой коэффициент. Встречается два типа множителей: либо степень $1-k^2+k^4$, либо эта степень, умноженная на $(k^2-2)(2k^2-1)(k^2+1)$.

Отметим свойство $g_j(k^2,\zeta) = (-1)^j g_j(1-k^2,-\zeta)$, которое означает, что решение, выраженное через θ^2, k^2, ζ, обладает инвариантностью:

$$\frac{df}{d\chi}(\theta^2,k^2,\zeta) = \frac{df}{d\chi}(-\theta^2,1-k^2,-\zeta).$$

Это свойство представляется важным, поскольку найдено неочевидное нелинейное преобразование, связывающее два решения с разной длиной волны. Например, уединенные волны ($k=1$) и волны на поверхности бесконечно глубокой жидкости ($k=0$) связаны преобразованием $\theta \to i\theta$.

Заключение. В данной работе предложен новый способ построения разложения мелкой воды, основанный на замене интегродифференциального уравнения, к которому обычно сводится задача о волнах, на дифференциально-разностное уравнение (13). По сравнению с существующими предложенный способ более прост и может быть полезен, в частности, при численных расчетах, так как позволяет быстрее и точнее строить ряды и находить большее количество их членов. В других работах (см., например, [6–8]) применяется более сложный способ, когда одновременно используются четыре ряда, члены которых являются функциями от двух переменных.

В теоретическом плане предложенный способ также представляет интерес: 1) для уравнения (13) известны точные решения [1–3]; 2) разложение Стокса (второе известное разложение теории волн на воде) естественным образом получается из (13), если решение этого уравнения искать в виде ряда

$$f(\chi) = \tilde{f}_0(\chi) + \varepsilon \tilde{f}_1(\chi) + \varepsilon^2 \tilde{f}_2(\chi) + \ldots. \tag{39}$$

Известно, что разложение Стокса плохо описывает длинные волны, а разложение мелкой воды, наоборот, пригодно для длинных волн, но плохо описывает короткие волны. Теперь появляется возможность сравнить оба разложения (7), (39) и попытаться построить разложение, равномерно пригодное для всех длин волн.

Автор выражает благодарность Н. И. Макаренко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Karabut E. A.** Asymptotic expansions in the problem of a solitary wave // J. Fluid Mech. 1996. V. 319. P. 109–123.
2. **Karabut E. A.** An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth // J. Fluid Mech. 1998. V. 372. P. 45–70.

3. **Карабут Е. А.** О суммировании ряда Вайтинга в задаче об уединенной волне // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 1. С. 44–54.
4. **Fenton J. D.** A ninth-order solution for the solitary wave // J. Fluid Mech. 1972. V. 53. P. 257–271.
5. **Fenton J. D.** A high-order cnoidal wave theory // J. Fluid Mech. 1979. V. 94. P. 129–161.
6. **Longuet-Higgins M. S., Fenton J. D.** On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II // Proc. Roy. Soc. London. 1974. V. A340. P. 471–493.
7. **Pennel S. A., Su C. H.** A seventeenth-order series expansion for the solitary wave // J. Fluid Mech. 1984. V. 149. P. 431–443.
8. **Pennel S. A.** On a series expansion for the solitary wave // J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 557–561.
9. **Littman W.** On the existence of periodic waves near critical speed // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. P. 241–269.
10. **Тер-Крикоров А. М.** Существование периодических волн, вырождающихся в уединенную // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 4. С. 622–636.
11. **Friedrichs K. O., Hyers D. H.** The existence of solitary waves // Comm. Pure Appl. Math. 1954. V. 7. P. 517–550.
12. **Бабенко К. И.** Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294, № 5. С. 1033–1037.
13. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 20/X 1998 г.