

активное сопротивление токового контура в проводнике и интенсивность его нагрева.

В заключение, используя соотношение (7), оценим достижимые по условию плавления скорости метания алюминиевого проводника с толщиной стенки $\Delta = 0,01$ м ($\sigma_0 = 3,8 \cdot 10^7$ (Ом·м) $^{-1}$, $\beta = 4,42 \cdot 10^{-6}$ кг/Дж, $q_* = 1,02 \cdot 10^6$ Дж/кг). В режиме максимального КПД ($\kappa = 0,06 \div 0,08$) $v_* = 5 \div 7$ км/с. В режиме максимального «коэффициента идеальности» ($\kappa = 0,16 \div 0,20$) $v_* = 14 \div 16$ км/с.

Итак, предложен критерий («коэффициент идеальности»), позволяющий оценивать эффективность электромагнитного ускорителя проводников или режима его работы с точки зрения достижимых предельных по условию плавления скоростей. Показано, что наибольший КПД достигается в ускорителе с относительной длиной каскадов $a^* = 1,0 \div 1,5$, длиной участков одноименной полярности подключения батарей $h^* \leq \leq 3 \div 6$, относительной скоростью движения проводника $v^* = 0,4 \div 0,8$; максимальные предельные по условию плавления скорости метания достигаются в ускорителе с параметрами $a^* \leq 0,5$, $h^* > 10$, $v^* = 1,2 \div 1,6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chilton F., Hibbs B., Kolm H. et al. Electromagnetic mass drivers // Progr. in Astronaut. and Aeronaut.— 1977.— V. 57, N 2.
2. O'Neil G. K., Kolm H. High-acceleration mass drivers // Acta Astronaut.— 1980.— V. 7, N 11.
3. Driga M. D., Weldon W. F., Woodson H. H. Electromagnetic induction launchers // IEEE Trans. on Magnetics.— 1986.— V. 22, N 6.
4. Васильев И. А., Петров С. Р. Численное и экспериментальное исследование многокаскадного индукционного ускорителя проводников // ПМТФ.— 1989.— № 6.
5. Балтаханов А. М., Иванов Е. Н. О тепловом ограничении скорости кольцевых проводников при индукционном аксальном ускорении // ПМТФ.— 1982.— № 6.
6. Бондалетов В. Н., Иванов Е. Н., Петров С. Р., Тютюкин В. А. Исследование эффективности ускорения проводников в импульсном магнитном поле соленоида // ПМТФ.— 1983.— № 2.

г. Истра
Московской области

Поступила 28/IV 1989 г.,
в окончательном варианте — 28/VIII 1989 г.

УДК 551.466

В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

БЛИЖНЕЕ ПОЛЕ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ИСТОЧНИКОМ В ПОТОКЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается задача о возбуждении внутренних гравитационных волн (ВВ) источником, находящимся в потоке стратифицированной жидкости с произвольным распределением частоты Брента — Вейселя $N^2(z)$. Поле ВВ на больших расстояниях от источника есть сумма мод, распространяющихся независимо друг от друга [1]. Асимптотики отдельной моды для различных распределений $N^2(z)$ исследованы в [1—3]. В ближней зоне, когда разделения мод еще не произошло, для получения поля ВВ необходимо суммировать значительное число мод, каждая из которых может иметь определенную особенность, например логарифмическую [4]. Поэтому важно исследовать асимптотику поля ВВ вблизи источника возмущений.

В настоящей работе изучается поле ВВ вблизи источника, построены асимптотики как вертикальной, так и горизонтальной компонент скорости ВВ; проведенные численные расчеты показали хорошее совпадение асимптотического и точного решений на расстояниях, сравнимых с толщиной слоя жидкости, в котором распространяются колебания.

Пусть стратифицированная жидкость течет со скоростью V в слое $0 < z < H$, тогда вертикальная скорость w ВВ, возбуждаемых источником, включенным в момент времени $t = 0$ и находящимся в потоке,

в приближении Буссинеска удовлетворяет уравнению

$$(1) \quad (\partial^2/\partial t^2) \Delta_3 w + N^2(z) \Delta_2 w = Q \theta(t) \delta_{tt}(x + Vt) \delta(y) \delta_{z_0}(z - z_0),$$

где Q — интенсивность источника; $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $\Delta_3 = \Delta_2 + \partial^2/\partial z^2$; z_0 — глубина погружения источника; $\theta(t) = 0, t < 0$; $\theta(t) = 1, t > 0$. В приближении «жесткой крышки» ($w = 0$ при $z = 0, H$) решение уравнения (1) при $t \rightarrow \infty$ имеет вид [5] $w = \sum_n w_n, w_n = I_0 \quad (\xi < 0), w_n = I_0 + I_- + I_+ \quad (\xi > 0), \xi = x + Vt$, где

$$(2) \quad I_{\pm} = \frac{Q}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(+i\mu_n(v)\xi - ivy) A_n(v, z, z_0) dv;$$

$$(3) \quad I_0 = \frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda_n(v)|\xi| - ivy) B_n(v, z, z_0) dv,$$

$$A_n(v, z, z_0) = \frac{V^2 \mu_n^3(v)}{\mu_n^2(v) + v^2} \left(\frac{\mu_n(v) \mu_n'(v)}{v} + 1 \right) \psi_n(z, v) \frac{\partial \psi_n(z_0, v)}{\partial z_0},$$

$$B_n(v, z, z_0) = \frac{V^2 \lambda_n^3(v)}{\lambda_n^2(v) - v^2} \left(\frac{\lambda_n(v) \lambda_n'(v)}{v} - 1 \right) \varphi_n(z, v) \frac{\partial \varphi_n(z_0, v)}{\partial z_0}.$$

Здесь собственные функции $\psi_n(z, v)$ и собственные числа $\mu_n(v)$ определяются из задачи

$$\frac{\partial^2 \psi_n(z, v)}{\partial z^2} + [\mu_n^2(v) + v^2] \left[\frac{N^2(z)}{V^2 \mu_n^2(v)} - 1 \right] \psi_n(z, v) = 0,$$

$$\psi_n = 0, z = 0, H,$$

а собственные функции $\varphi_n(z, v)$ и собственные числа $\lambda_n(v)$ — из

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \varphi_n(z, v)}{\partial z^2} + [\lambda_n^2(v) - v^2] \left[\frac{N^2(z)}{V^2 \lambda_n^2(v)} + 1 \right] \varphi_n(z, v) = 0,$$

$$\varphi_n = 0, z = 0, H.$$

Основной вклад при $\xi \rightarrow 0$ вносит слагаемое I_0 , так как $I_- + I_+ = 0$ при $\xi = 0$. Поэтому в дальнейшем нас будет интересовать асимптотика I_0 при $y, \xi \rightarrow 0$. Асимптотика интеграла (3) при $y, \xi \rightarrow 0$ определяется поведением дисперсионных кривых $\lambda_n(v), v \rightarrow \infty$. В [5] построено их разложение при $v \rightarrow \infty$ и фиксированных n , которое, однако, неравномерно по n при больших v . В отличие от [5] равномерное по n разложение дисперсионных кривых $\lambda_n(v)$ и собственных функций $\varphi_n(z, v)$ находим в виде

$$(5) \quad \lambda_n^2(v) = \sigma_n^2 + \beta_n/\sigma_n^2 + o(\sigma_n^{-2}) = \alpha_n^2 + o(\sigma_n^{-2});$$

$$(6) \quad \varphi_n(z, v) = \varphi_n^0 + \varphi_n^1/\sigma_n^2 + o(\sigma_n^{-2}), \sigma_n^2 = v^2 + \pi^2 n^2/H^2.$$

Подставляя (5), (6) в (4) и приравнявая члены при соответствующих степенях σ_n^2 , получаем в первом приближении $\varphi_n^0(z) = \sin(\pi n z/H)$. Тогда для второго приближения собственной функции $\varphi_n^1(z, v)$, приравнявая члены при σ_n^{-2} , запишем

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \varphi_n^1}{\partial z^2} + \frac{\pi^2 n^2}{H^2} \varphi_n^1 = \left[-(\alpha_n^2 - \sigma_n^2) - (\alpha_n^2 - v^2) \frac{N^2(z)}{V^2 \sigma_n^2} \right] \varphi_n^0,$$

$$\varphi_n^1 = 0, z = 0, H.$$

Задачу (7) решим методом вариации постоянных

$$\varphi_n^1(z, v) = S_n(z, v) \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right) + C_n(z, v) \cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right).$$

Для определения функций $S_n(z, v)$, $C_n(z, v)$ запишем линейную систему относительно $\partial S_n / \partial z$, $\partial C_n / \partial z$:

$$\frac{\partial S_n}{\partial z} \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right) + \frac{\partial C_n}{\partial z} \cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right) = 0, \quad \frac{\partial S_n}{\partial z} \cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right) - \frac{\partial C_n}{\partial z} \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right) = R_n(z, v),$$

$$R_n(z, v) = \frac{H}{\pi n} \left[-(\alpha_n^2 - \sigma_n^2) - (\alpha_n^2 - v^2) \frac{N^2(z)}{V^2 \sigma_n^2} \right] \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial S_n}{\partial z} = R_n(z, v) \cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right), \quad \frac{\partial C_n}{\partial z} = -R_n(z, v) \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right).$$

Тогда с точностью до постоянных c_1 , c_2 собственная функция $\varphi_n^1(z, v)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_n^1(z, v) = & \left[\int_0^z R_n \cos\left(\frac{\pi n \tau}{H}\right) d\tau + c_1 \right] \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right) - \\ & - \left[\int_0^z R_n \sin\left(\frac{\pi n \tau}{H}\right) d\tau + c_2 \right] \cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right). \end{aligned}$$

Используя граничные условия, получим, что $c_2 = 0$, и также определяем условие для нахождения α_n^2 :

$$\int_0^H \left[\alpha_n^2 - \sigma_n^2 - (\alpha_n^2 - v^2) \frac{N^2(z)}{V^2 \sigma_n^2} \right] \sin^2\left(\frac{\pi n z}{H}\right) dz = 0.$$

Тогда

$$(8) \quad \lambda_n^2(v) = \alpha_n^2 + o(\sigma_n^{-2}) = \sigma_n^2 + \frac{2\pi^2 n^2}{H^3 V^2 \sigma_n^2} \int_0^H N^2(z) \sin^2\left(\frac{\pi n z}{H}\right) dz + o(\sigma_n^{-2}).$$

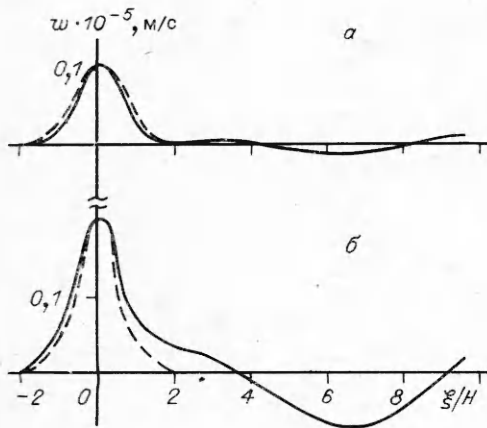
Разложение (8) равномерно по n при $v \rightarrow \infty$. Согласно (8), асимптотика отдельной моды w_n при $y, \xi \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (9) \quad w_n \approx I_0 \approx \frac{nQ}{2H^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma_n |\xi| - i\nu y) \frac{\sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right) \cos\left(\frac{\pi n z_0}{H}\right)}{\sigma_n} dv = \\ = \frac{nQ}{H^2} K_0\left(\frac{\pi n \rho}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right) \cos\left(\frac{\pi n z_0}{H}\right) \equiv w_n^0, \quad \rho^2 = y^2 + \xi^2. \end{aligned}$$

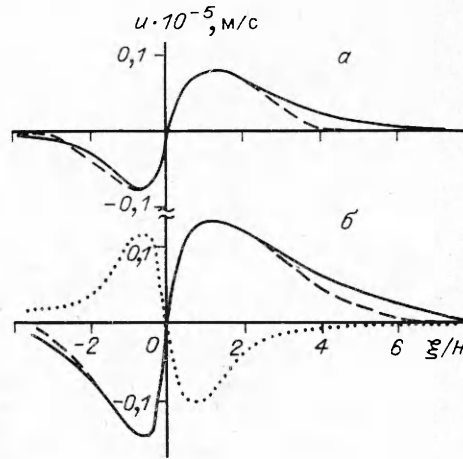
Здесь $K_0(x)$ — функция Макдональда нулевого порядка. Таким образом, асимптотика отдельной моды вертикальной скорости при $y, \xi \rightarrow 0$ дается выражением (9), однако каждая мода, представленная в таком виде, имеет логарифмическую особенность при $\rho \rightarrow 0$ и для любых $z \neq z_0$, что отмечалось в [4]. Ряд $\sum_n w_n^0$ удастся просуммировать [6]. Тем самым определим полное поле, регулярное при $\rho \rightarrow 0$, $z \neq z_0$:

$$\begin{aligned} (10) \quad w \approx \sum_n w_n^0 = \frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{z_-}{(\rho^2 + z_-^2)^{3/2}} + \frac{z_+}{(\rho^2 + z_+^2)^{3/2}} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2mH - z_-}{(\rho^2 + (2mH - z_-)^2)^{3/2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2mH + z_-}{(\rho^2 + (2mH + z_-)^2)^{3/2}} + \frac{2mH - z_+}{(\rho^2 + (2mH - z_+)^2)^{3/2}} - \frac{2mH + z_+}{(\rho^2 + (2mH + z_+)^2)^{3/2}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $z_- = z - z_0$, $z_+ = z + z_0$.



Р и с. 1



Р и с. 2

Для численных расчетов вертикальной скорости (рис. 1) использовались значения Q и $N^2(z)$, взятые из [5], остальные параметры следующие: $V = 6$ м/с, $H = 600$ м, $z = 200$ м, $z_0 = 100$ м, $y = 100$ м. На рис. 1, а представлены результаты расчетов первой моды вертикальной скорости по формулам (2), (3) (сплошная линия) и по формуле (9) (штриховая). Результаты расчетов суммы по (2), (3) (сплошная линия) и по (10) (штриховая) приведены на рис. 1, б.

Горизонтальные и вертикальная компоненты скорости ВВ, как известно, связаны посредством соотношений [7]

$$(11) \quad \Delta_2 u + \partial^2 w / \partial x \partial z = 0, \quad \Delta_2 v + \partial^2 w / \partial y \partial z = 0$$

(u — компонента скорости вдоль оси x , v — вдоль оси y). Далее рассмотрим компоненту u , для v все выкладки проводятся аналогично. Используя (11), нетрудно выписать выражения для горизонтальной скорости u : $u = \sum_n u_n$, $u_n = J_0 + J_- + J_+$ ($\xi > 0$), $u_n = J_0$ ($\xi < 0$), где

$$(12) \quad J_{\pm} = \frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mp i\mu_n(v)\xi - ivy) \frac{\mu_n(v)}{\mu_n^2(v) + v^2} \frac{\partial A_n(v, z, z_0)}{\partial z} dv;$$

$$(13) \quad J_0 = \frac{Q \operatorname{sgn}(\xi)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda_n(v)|\xi| - ivy) \frac{\lambda_n(v)}{\lambda_n^2(v) - v^2} \frac{\partial B_n(v, z, z_0)}{\partial z} dv.$$

Аналогично (9), используя разложение (8), выпишем асимптотику отдельной моды

$$(14) \quad u_n \approx J_0 \approx \frac{Q \operatorname{sgn}(\xi)}{2\pi H} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma_n|\xi| - ivy) \cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right) \cos\left(\frac{\pi n z_0}{H}\right) dv = \\ = \frac{Q n \xi}{H^2 \rho} K_1\left(\frac{\pi n \rho}{H}\right) \cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right) \cos\left(\frac{\pi n z_0}{H}\right) \equiv u_n^0$$

($K_1(x)$ — функция Макдональда первого порядка). Полное поле горизонтальной скорости u в этом случае [6]

$$(15) \quad u \approx \sum_n u_n^0 = \frac{Q \xi}{2\pi H} \left\{ -\rho^{-2} + \frac{H}{2} [(\rho^2 + z_-^2)^{-3/2} + (\rho^2 + z_+^2)^{-3/2}] + \right. \\ \left. + \frac{H}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [(\rho^2 + (2mH - z_-)^2)^{-3/2} + (\rho^2 + (2mH + z_-)^2)^{-3/2} + \right. \\ \left. + (\rho^2 + (2mH - z_+)^2)^{-3/2} + (\rho^2 + (2mH + z_+)^2)^{-3/2} \right\}.$$

Как видно из (15), полученное таким образом выражение для u имеет особенность при $y, \xi \rightarrow 0$ и $z \neq z_0$, которая равна производной по ξ от фундаментального решения двумерного уравнения Лапласа $\Delta_2 u = 0$ (для компоненты скорости v особенность есть производная по y от фундаментального решения). Поэтому, для того чтобы найти регулярное при $y, \xi \rightarrow 0$ и $z \neq z_0$ выражение для u , удовлетворяющее уравнению (11), необходимо из ряда (15) исключить первое слагаемое, тогда новый ряд и будет описывать u при $y, \xi \rightarrow 0$.

Численные расчеты u (рис. 2) проводились при тех же значениях всех параметров. На рис. 2, а представлены результаты расчетов первой моды u , рассчитанной по (12), (13) (сплошная линия) и по (14) (штриховая). На рис. 2, б приведены результаты суммирования мод (сплошная линия — по (12), (13) с исключенной особенностью, штриховая — по (15), также с исключением особенности, пунктирная линия — особенность горизонтальной скорости u). Как видно из рис. 2, для нахождения истинного значения горизонтальной скорости учет особенности играет определяющую роль при $y, \xi \rightarrow 0$.

Таким образом, представленные результаты показывают, что полученные явные асимптотические выражения для вертикальной и горизонтальных компонент скорости ВВ позволяют на расстояниях, сравнимых с толщиной слоя жидкости, эффективно рассчитывать поле ВВ, не прибегая к сложным и громоздким численным расчетам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Изв. АН СССР. ФАО.— 1984.— Т. 20, № 6.
2. Санников В. Ф. Дальнее поле установившихся волн, создаваемых локальными источниками возмущений в потоке стратифицированной жидкости // ПММ.— 1986.— Т. 50, № 6.
3. Боровиков В. А., Булатов В. В., Кельберт М. Я. О промежуточной асимптотике дальнего поля внутренних волн в слое стратифицированной жидкости, лежащем на однородном слое // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 3.
4. Санников В. Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теоретическое исследование волновых процессов в океане.— Севастополь: Морск. гидрофиз. ин-т, 1983.
5. Боровиков В. А., Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Левченко Е. С. О расчете поля внутренних гравитационных волн, генерируемых неподвижным источником в потоке стратифицированной жидкости // ПМТФ.— 1989.— № 4.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.
7. Мирополюцкий Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане.— Л.: Гидрометеопиздат, 1981.

г. Москва

Поступила 22/V 1989 г.,
в окончательном варианте — 17/VIII 1989 г.

УДК 532.516:536.24.01

Е. А. Рябицкий

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ НАГРЕВА

При отсутствии массовых сил возмущения равновесного состояния неравномерно нагретой жидкости определяются интенсивностью термокапиллярных сил, обусловленных зависимостью коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Если равновесный градиент температуры достаточно велик, то изменение поверхностного натяжения приводит к потере устойчивости равновесия — появлению термокапиллярной конвекции.

Изучению условий возникновения конвекции в жидкости при нагревании твердой или свободной границы без учета деформации свободной поверхности посвящены