

$$\frac{\pi}{8\lambda_0} = \int_0^1 \frac{\sigma_1^{-1/2}}{(1 + \lambda_0^2 \sigma_1^3)^2} (1 - \sigma_1)^{1/2} d\sigma_1,$$

$$\gamma_0 = 2U_0 \sin \theta \left(1 + \lambda_0 \pi^{-1} \int_0^1 \frac{\sigma_1^{1/2}}{1 + \lambda_0^2 \sigma_1^3} (1 - \sigma_1)^{1/2} d\sigma_1 \right)^{-1}.$$

С помощью первого из них константа λ_0 может быть найдена численно с любой степенью точности. Расчет показал, что $\lambda_0 = 0,252$. Отсюда следует $\gamma_0 = 1,94 U_0 \sin \theta$.

Таким образом, искомые функции будут в этом случае

$$(15) \quad \gamma_*(t) = \gamma_0 t, \quad \lambda(t) = 8\lambda_0 \gamma_0^{-3/2} t^{-3}, \quad l(t) = \gamma_0 t^2/4.$$

Полученная асимптотика может быть использована для качественного анализа и численного расчета начальной стадии обтекания кругового цилиндра. Например, соотношения (15) позволяют сделать вывод, что центр тяжести завихренности вихревого следа и его конец B_1 в окрестности момента времени $t = 0$ движутся по прямым, составляющим с осью σ_1 углы около 6 и 14° соответственно.

Автор считает приятным долгом выразить благодарность Д. Н. Горелову за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 20 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогиш Л. В., Нейланд В. Я., Степанов Г. Ю. Теория двумерных отрывных течений. — Итоги науки и техники. Гидромеханика, 1975, т. 8, с. 5.
2. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
3. Мухелишвили И. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
4. Ильичев К. П., Постоловский С. Н. Расчет нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 2.
5. Бетяев С. К., Захаров С. Б., Молчанов В. Ф., Судаков Г. Г. Некоторые задачи теории отрывных течений идеальной жидкости и газа. Труды XI чтений К. Э. Циолковского, 1976.
6. Никольский А. А. О «второй» форме движения идеальной жидкости около обтекаемого тела (исследование вихревых отрывных потоков). — ДАН СССР, 1957, т. 116, № 2.
7. Бетяев С. К. Эволюция вихревых пелен. — В кн.: Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары: изд. Чуваш. ун-та, 1980.
8. Крикунов Ю. М. Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций. — В кн.: Краевые задачи теории функций. Коми. перем. Казань: изд. Казан. ун-та, 1962.

УДК 532.62

КРУПНЫЕ ВОЛНЫ И СРЫВ ПРИ ГРАВИТАЦИОННОМ СТЕКАНИИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ

А. Е. Боков, Б. Г. Ганчев

(Москва)

При стекании пленки жидкости по вертикальной стенке на ее поверхности развивается волновое движение. Характеристики волн не остаются неизменными, а меняются вдоль пути пробега пленки [1—3].

Волновое движение имеет характер слабо стационарного эргодического процесса. Поэтому для его описания могут быть использованы осредненные характеристики — средняя толщина пленки $\delta_{\text{ср}}$, средняя толщина непрерывного слоя $\delta_{\text{н}}$, средняя толщина выступов $\delta_{\text{в}}$, средняя высота волн $h = \delta_{\text{в}} - \delta_{\text{н}}$, средняя частота ω и длина волны λ .

Если средняя толщина пленки стабилизируется уже на небольших расстояниях от входа (как правило, не более 200—400 мм), то насыщение волнового движения затягивается до 3—4 м. Наряду с мелкими волнами капиллярной природы развива-

ются крупные волны, переносящие значительную часть расхода [4, 5]. Крупные волны покрыты капиллярной рябью, имеют крутой передний склон с углом к направлению движения около 90° . Они перемещаются с относительно небольшой частотой $\omega = 3-7 \text{ с}^{-1}$.

При достаточно большой плотности орошения с гребней волн происходит срыв жидкости [4, 6]. Первый срыв — отдельные капли — обнаружен [4] уже при плотности орошения $\Gamma = 1,3-1,5 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$ на расстоянии от входа около 15 м. По мере увеличения расхода срыв становится регулярным и начало его поднимается вверх по потоку. С возникновением срыва прекращается рост волны.

Более или менее строгие аналитические решения получены только для установившегося волнового движения в ламинарно-волновой области течения, например, в [7, 8]. Эти решения не могут быть распространены в область турбулентно-волнового течения, не описывают изменения характеристик волн с длиной пробега и развития волн в условиях срыва. Полученные ранее чисто эмпирические зависимости для осредненных волновых характеристик [3, 4] не описывают развитие волн в области малых плотностей орошения при $Re < 200$ и при больших плотностях орошения в условиях срыва. Ниже приводится упрощенная модель развития крупных волн, в том числе в условиях срыва.

Примем, что форму крупной волны можно аппроксимировать выражением (фиг. 1)

$$(1) \quad \delta = \delta_n(1 + \bar{C}l^n),$$

где $\bar{l} = l/\delta^*$ — безразмерная координата волнового профиля; $0 \leq \bar{l} \leq \bar{\lambda}$; $\delta^* = (\sigma/\rho g)^{1/2}$ — масштаб длины; σ — поверхностное натяжение; ρ — плотность; $\bar{\lambda} = \lambda/\delta^*$ — безразмерная длина волны, являющаяся функцией пути пробега x .

При $\bar{l} = 0$ $\delta = \delta_n$, при $\bar{l} = \bar{\lambda}$ $\delta = \delta_v$.

Из (1) следует

$$(2) \quad h = \delta_v - \delta_n = C\delta_n\bar{\lambda}^n.$$

Профиль волны подбираем таким образом, чтобы выполнялось условие

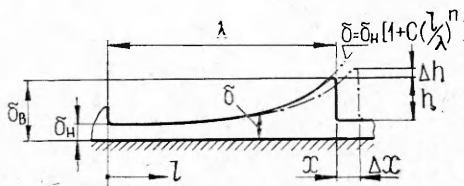
$$(3) \quad \int_0^{\lambda} \delta dl = \delta_{cp}\lambda,$$

тогда

$$(4) \quad \delta_n = \delta_{cp} - (1/(n+1))h.$$

Анализ данных экспериментов (см., например, [3, 4]) показывает, что соотношение (4) действительно выполняется при $n = 4$ в ламинарно-волновой области течения и при $n = 5/2$ — в турбулентно-волновой. На фиг. 2, а — з приведены зависимости δ_{cp} , δ_n , h от x (точки 1—3 соответственно) при следующих значениях: а — $\Gamma = 0,89 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$, $Re = 940$, $t = 18-28^\circ\text{C}$; б — $\Gamma = 0,493 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$, $Re = 675$, $t = 35^\circ\text{C}$; в — $\Gamma = 0,493 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$, $Re = 428$, $t = 28^\circ\text{C}$; г — $\Gamma = 0,09-0,112 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$, $Re = 65$, $t = 5^\circ\text{C}$.

Полагаем, что по длине волны профиль скорости автомодельный (аналогичное допущение использовано П. Л. Капицей при разработке теории капиллярных волн) и определяется квадратичной зависимостью $u = (g/\nu)(\delta y - y^2/2)$ в ламинарно-волновом режиме и степенной зависимостью $u = U(y/\delta)^{1/7}$ в турбулентно-волновом (y — координата по нормали к стенке, ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости, U — скорость на поверхности). В связи с большей толщиной слоя во фронте волны он движется со скоростью u_1 , большей скорости движения во впадине перед фронтом u_2 . Фронт волны набегаёт на впадину, и объём волны увеличивается (эффект «бульдозера»). При сохранении автомодельности безразмерного профиля волны



Ф и г. 1

ее высота увеличивается, а толщина непрерывного слоя уменьшается. За время $d\tau = dx/u_{н1}$ приращение объема будет

$$dV = \left(\int_0^{\delta_n} u_1 dy - \int_0^{\delta_n} u_2 dy \right) dx/u_{н1},$$

откуда в ламинарно-волновой области

$$dV = \frac{1}{2} \frac{\delta_n h}{h + \delta_n/2} dx;$$

в турбулентно-волновом режиме

$$(5) \quad dV = \frac{7}{8} \delta_n [1 - (\delta_n/\delta_v)^{4/7}] dx,$$

где $u_{н1}$ — скорость во фронте волны на расстоянии от стенки $y = \delta_n$. С другой стороны, приращение объема волны можно записать в виде

$$dV = \frac{1}{n+1} (\lambda dh + h d\lambda).$$

Объем волны отнесен к периметру единичной длины.

Используя выражения (1)–(4), получим

$$(6) \quad dV = \frac{1}{n} \left(\frac{h}{C\delta_n} \right)^{1/n} \left[1 + \frac{1}{(n+1)^2} \frac{h}{\delta_n} \right] dh.$$

Из равенств (5), (6) в ламинарно-волновой области имеем

$$dh = C_{л}^{1/4} \frac{1}{\delta^*} \frac{\delta_n^{1,25} h^{0,75}}{(2h + \delta_n)(1 + 0,04h/\delta_n)} dx,$$

в турбулентно-волновой области

$$(7) \quad dh = \frac{35}{16} C_{т}^{2/5} \frac{1}{\delta^*} \frac{\delta_n^{7/5}}{h^{2/5}} \left[1 - \left(\frac{\delta_n}{\delta_v} \right)^{4/7} \right] \left(1 + \frac{4}{49} \frac{h}{\delta_n} \right)^{-1}.$$

Из сопоставления с экспериментом следует, что $C_{л}^{1/4} = 8,345 \cdot 10^{-3}$, $C_{т}^{2/5} = 3,6685 \cdot 10^{-3}$.

Если предположить, что крупные волны развиваются из капиллярных, то из анализа данных [5], а также наших данных при $x < 0,1$ м начальную относительную высоту волн можно считать приблизительно постоянной и равной $h_0/\delta_{ср} \simeq 0,15$.

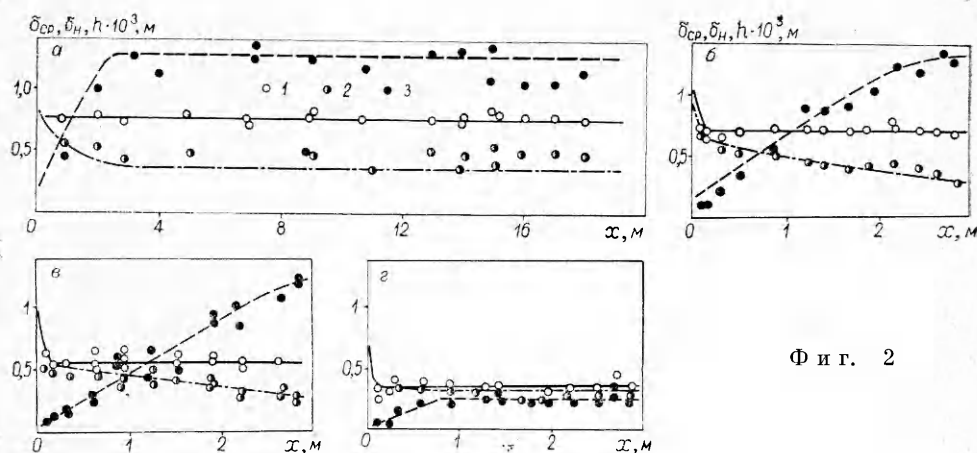
На фиг. 2 результаты некоторых экспериментов, проведенных в условиях стекания пленки по наружной поверхности цилиндрических рабочих участков диаметром 60 мм и длиной 3 и 19 м в досрывных режимах, сопоставляются с расчетом по зависимости (7). Средняя толщина пленки $\delta_{ср}$ определялась по зависимости из [3].

Расчет по зависимости (7) достаточно хорошо обобщает результаты эксперимента на участке развития волнового движения. Здесь увеличивается высота волн и соответственно уменьшается толщина непрерывного слоя. Далее происходит достаточно резкий переход к волнам с постоянными осредненными характеристиками. Причем этот переход происходит при постоянном значении числа Рейнольдса Re^* непрерывного слоя и не зависит от Re , найденного по полному расходу в пленке ($Re = \Gamma/\rho\nu$).

В ламинарно-волновой области $Re_1^* \simeq 45$, в турбулентно-волновой $Re_2^* \simeq 300$. Значения Re^* определяются зависимостями

$$Re_1^* = \delta_n^3/(3\nu^2/g), \quad Re_2^* = [\delta_n/(0,303(\nu^2/g)^{1/3})]^{12/7}.$$

На фиг. 3 показано полученное расчетом изменение δ_n , δ_v и δ_n' (без учета срыва) вдоль длины пробега пленки в области плотностей орошения $\Gamma = 1-7$ кг/(м·с) при одинаковой температуре, равной 20°C. При отсутствии срыва при одинаковой температуре значения δ_n стремятся к



Ф и г. 2

одинаковому значению, величина же $\delta_{\text{в}}$ существенно различна и увеличивается с ростом Γ ($\Gamma = 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0; 7,0$ кг/(м·с), кривые 1—7 соответственно).

Как указывалось выше, при определенных условиях с гребней волн происходит срыв жидкости. Анализ результатов экспериментов [6] показывает, что срыв возникает в том случае, если кинетическая энергия элемента жидкости в гребне волны превысит энергию у ее основания на определенную величину и этой энергии будет достаточно для отрыва капели. Условия возникновения срыва могут быть обобщены критическим числом Вебера $We^* = (\rho(U_1 - u_{\text{н1}})^2 \delta^*) / \sigma$. В рамках рассмотренной модели

$$We^* = 10^3 \frac{\rho \delta^*}{\sigma \nu^{2/7}} \delta_{\text{в}}^{8/7} (\delta_{\text{в}}^{1/7} - \delta_{\text{н}}^{1/7})^2,$$

и данные по началу срыва обобщаются значением $We^* = 21,5$.

Граница начала срыва в координатах $(\delta_{\text{в}}, x)$ обозначена на фиг. 3 кривой C. С ростом плотности орошения существенно увеличивается средняя высота гребней волн $\delta_{\text{в}}$, при которой начинается срыв, а сечение начала срыва сдвигается ко входу жидкости на рабочий участок. При $Re < 1300$ —1500 срыв вообще не возникает. Срыв жидкости, таким образом, может происходить только в области турбулентно-волнового движения.

Будем считать, что и после срыва справедлива аппроксимация формы волны выражением (1), а показатель степени сохраняет свое значение ($n = 2, 5$).

Пусть на увеличение полного объема в волне и под нею идет объем жидкости, пропорциональный найденному по (5):

$$(8) \quad dV_{\text{п}} = k(7/8)\delta_{\text{н}}[1 - (\delta_{\text{н}}/\delta_{\text{в}})^{4/7}]dx.$$

С другой стороны, приращение полного объема можно записать в виде

$$(9) \quad dV_{\text{п}} = \delta_{\text{ср}}d\lambda + \lambda d\delta_{\text{ср}}.$$

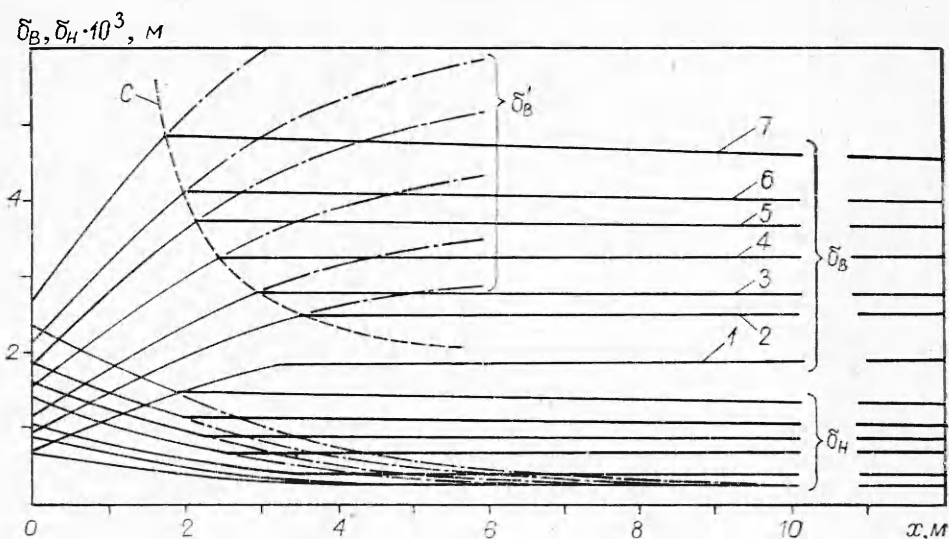
Используя условие, что после начала срыва $We = We^* = \text{const}$, в нашем случае равнозначное условие $\delta_{\text{в}}^{5/7} - \delta_{\text{в}}^{4/7}\delta_{\text{н}}^{1/7} = \text{const}$, и условия (1)—(3), выражение (9) можно преобразовать к виду

$$(10) \quad dV_{\text{п}} = \frac{\delta_{\text{ср}}}{n} \frac{\delta^*}{c^{1/n}} \left(\frac{h}{\delta_{\text{н}}}\right)^{1/n} \left[\frac{n+1}{h} - \left(\frac{n+1}{h} + \frac{1}{\delta_{\text{н}}}\right) \frac{n+1}{B} + \frac{n}{\delta_{\text{ср}}} \right] d\delta_{\text{ср}},$$

$$\text{где } B = 1 + \frac{\delta_{\text{н}}}{5n\delta_{\text{в}}^{1/7}\delta_{\text{н}}^{6/7} - 4n\delta_{\text{н}}}.$$

Приравнявая (8) и (10), получим

$$(11) \quad d\delta_{\text{ср}} = A \frac{\delta_{\text{н}}^{1,4}}{\delta_{\text{ср}}\delta^*h^{0,4}} \left[1 - \left(\frac{\delta_{\text{н}}}{\delta_{\text{в}}}\right)^{4/7} \right] \left[\frac{3,5}{h} - \left(\frac{12,25}{h} + \frac{3,5}{\delta_{\text{н}}}\right) \frac{1}{B} + \frac{2,5}{\delta_{\text{н}}} \right]^{-1} dx.$$



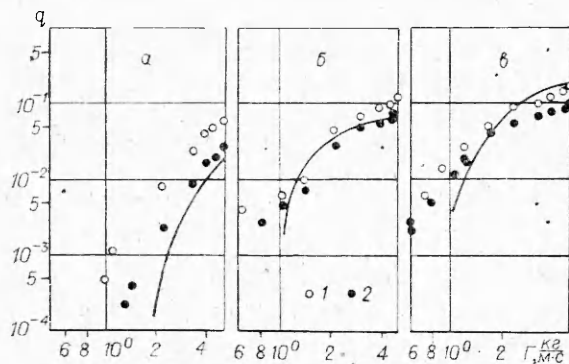
Ф и г. 3

Найденное из (11) значение $\delta_{\text{ср}}$ в условиях срыва позволяет определить долю сорванной жидкости в рассматриваемом сечении

$$(12) \quad q = 1 - (\delta_{\text{ср}}/\delta_{\text{ср}}^0)^{12/7},$$

где $\delta_{\text{ср}}^0$ — средняя толщина пленки в отсутствие срыва.

Данные экспериментов по срыву достаточно хорошо обобщаются зависимостями (11), (12) при $A = (7/8)kC^{1/n} = 4,375 \cdot 10^{-4}$. На фиг. 4 сопоставляются значения q по расчету и найденные в эксперименте с помощью отбора насадками диаметром 40 и 45 мм при свободном стекании жидкости внутри вертикального канала диаметром 54 мм ($x = 3; 6$ и 16 мм — a — b соответственно). Расчет по полученным зависимостям отражает найденное в эксперименте увеличение доли срыва с увеличением



Ф и г. 4

длины пробега и с увеличением плотности орошения. С другой стороны, с увеличением плотности орошения рост градиента приращения срыва при $\Gamma = 2,5-3,0$ кг/(м·с) замедляется.

На фиг. 3 показано изменение осредненных характеристик волнового движения δ_H и δ_B после начала срыва. При наличии срыва прекращается увеличение высоты волн h и выступов δ_B . Можно отметить даже некоторое их снижение вместе с уменьшением средней толщины (за счет срыва) $\delta_{\text{ср}}$. Вместе с тем резко замедляется уменьшение средней толщины непрерывного слоя.

Поступила 26 I 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Brauer H. Strömung und Wärmeübergang bei Reifelfilmen. — VDJ-Forschungsheft, 1956, vol. 457, N 22.
2. Воронцов Е. Г. Особенности волнового течения с изменением длины пробега пленки. — ИФЖ, 1969, т. 16, № 1.

3. Ганчев Б. Г., Козлов В. М., Лозовецкий В. В. Исследование нисходящего течения жидкости по вертикальной поверхности и теплопереноса к ней. — ИФЖ, 1971, т. 20, № 4.
4. Ганчев Б. Г., Козлов В. М. Исследование гравитационного течения пленки жидкости по стенкам вертикального канала большой длины. — ПМТФ, 1973, № 1.
5. Chu K. J., Dukler A. E. Statistical characteristics of thin, wavy films. Pt III. Structure of the large waves and their resistance to gas flow. — AIChE J., 1975, vol. 21, N 3.
6. Ганчев Б. Г., Козлов В. М., Лозовецкий В. В. Стеkanie пленки жидкости в вертикальном канале. — В кн.: Исследование процессов в энергетических установках. Вып. 2. М.: изд. МВТУ, 1975.
7. Маурин Л. Н., Сорокин В. С. О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости. — ПМТФ, 1962, № 4.
8. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Волны на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости. — ПМТФ, 1973, № 2.

УДК 532.593

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Букреев, Н. В. Газрилов

(Новосибирск)

Получены экспериментальные данные для проверки некоторых результатов теоретических исследований уединенных внутренних волн в двух различных случаях. В первом из них уединенная волна генерировалась на поверхности раздела двух мелких слоев несмешивающихся жидкостей разной плотности ρ_1 и $\rho_2 > \rho_1$, ограниченных снизу горизонтальным дном, сверху — свободной поверхностью и в невозмущенном состоянии покоящихся (фиг. 1, а). Теоретически такая схема впервые рассматривалась в приближении Буссинеска в [1], а затем в условиях применимости уравнения Кортевега — де Вриза в [2, 3].

Соответствующие этому случаю экспериментальные исследования были выполнены в [4, 5]. Полученная в них информация дополнена в данных исследованиях, в частности, в том отношении, что в опытах наряду со скоростью распространения уединенной волны и ее профилем регистрировались также траектории жидких частиц. Ранее были выполнены еще два лабораторных экспериментальных исследования уединенных внутренних волн в покоящейся в невозмущенном состоянии жидкости [6, 7], но при ином, чем указано выше, распределении плотности по глубине и иной геометрии течения.

Второй из рассмотренных случаев отличался тем, что слои были ограничены сверху непроницаемой горизонтальной «крышкой» и, что более существенно, в невозмущенном состоянии имел место сдвиг скорости между слоями (фиг. 1, б). Возможность образования уединенных волн на поверхности раздела в этой схеме движения стратифицированной жидкости впервые была предсказана на основе второго приближения теории мелкой воды в докладе Л. В. Овсянникова, который будет упоминаться ниже, как работа [8] (в списке литературы под этим номером указана краткая аннотация доклада).

Ниже используется неподвижная прямоугольная система координат x, y , показанная на фиг. 1 (разное положение начала отсчета по оси y и разный способ задания глубин в схемах а и б приняты для согласования с соответствующими теоретическими работами). Отклонение границы раздела от положения равновесия обозначено символом η , максимальное отклонение (амплитуда волны) — a , скорость распространения волны — c . Рассматриваются только двумерные волны.

Для реализации в опытах схемы, изображенной на фиг. 1, а, использовался непроточный лоток из оргстекла прямоугольного поперечного сечения длиной 220 см, шириной 17 см и высотой 15 см. Стратификация в нем создавалась с помощью одной из двух пар несмешивающихся жидкостей: керосина и воды с отношением плотностей $\sigma = \rho_1/\rho_2 = 0,8$ или воды и хладона-113 с $\sigma = 0,67$. Генерация уединенной волны на поверхности раздела осуществлялась, как и в [4, 5], пластиной I , перемещаемой на некоторое расстояние по вертикали. При этом имели место нежелательные возмущения свободной поверхности, которым в результатах теоретического анализа соответствует так называемая быстрая мода колеба-