ПРИТОК ВОДЫ К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРУБЧАТОЙ ДРЕНЕ В НАПОРНОМ ДВУСЛОЙНОМ ПЛАСТЕ ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

С. В. Ковальчук, А. Я. Олейник

(Киев)

В работе [1] рассмотрена частная задача о притоке воды к трубчатой дрене в двуслойном пласте ограниченной мощности, в которой кровля верхнего слоя пласта являлась линией равного потенциала (дно водоема). Ниже рассматривается чаще встречающаяся на практике задача о притоке воды к трубчатой дрене в двуслойном напорном пласте ограниченной мощности с прямолинейным контуром питания (фиг. 1).

В точке (l, — b) верхнего слоя поместим дрену (сток), расход которой на единицу длины равен q. Для удовлетворения граничного условия на контуре питания при $x = 0$ влево от оси расположим симметричный источник равного расхода. Методом [2, 3] сначала ищется решение для стока, а затем для источника. Окончательное решение задачи получается в результате суммирования решений для стока и источника.

В верхнем слое, который содержит сток (дрена), комплексная скорость равна

$$w_1 = \frac{q}{2\pi k_1}\left[\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{z-\bar{\zeta}}\right] + \int\limits_0^\infty [A_1(\alpha)\, e^{i\alpha z} + B_1(\alpha)\, e^{-i\alpha z}]\, d\alpha \tag{1}$$

$$(\zeta = l - ib, \quad \bar{\zeta} = l + ib)$$

В нижнем слое комплексная скорость равна

$$w_2 = \int\limits_0^\infty [A_2(\alpha)\, e^{i\alpha z} + B_2(\alpha)\, e^{-i\alpha z}]\, d\alpha \tag{2}$$

В формулах (1) и (2) величины $A_1(\alpha)$, $A_2(\alpha)$, $B_1(\alpha)$, $B_2(\alpha)$ — комплексные функции действительной переменной α.

Учитывая, что на непроницаемых границах верхнего и нижнего слоев вертикальные скорости должны равняться нулю

$$\operatorname{Im}(w_1) = 0 \text{ при } y = 0, \quad \operatorname{Im}(w_2) = 0 \text{ при } y = -m_2$$

из формул (1) и (2) соответственно получаем

$$B_1(\alpha) = \overline{A}_1(\alpha), \quad B_2(\alpha) = [\overline{A}_2(\alpha) e^{2m_2\alpha}]$$

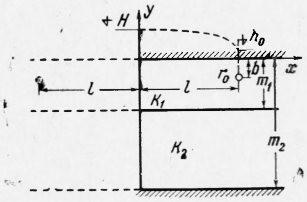
Чтобы впоследствии использовать условия на границе слоев, представим главную часть выражения w_1 в виде определенного интеграла:

при $\operatorname{Im}(z-\zeta) < 0$

$$\frac{1}{z-\zeta} = i\int\limits_0^\infty e^{-i\alpha(z-\zeta)}\, d\alpha = i\int\limits_0^\infty e^{-i\alpha(z-l+ib)} d\alpha$$

при $\operatorname{Im}(z-\bar{\zeta}) < 0$

$$\frac{1}{z-\bar{\zeta}} = i\int\limits_4^\infty e^{-i\alpha(z-l-ib)} d\alpha$$



Фиг. 1

Учитывая вышеприведенные преобразования, выражения для комплексных скоростей запишутся так:

$$w_1(z) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{iq}{\pi k_1}\operatorname{ch}\alpha b e^{-i\alpha(z-l)} + A_1 e^{i\alpha z} + \overline{A}_1 e^{-i\alpha z}\right] d\alpha \tag{3}$$

$$w_2(z) = \int\limits_0^\infty [A_2 e^{i\alpha z} + \overline{A}_2 e^{2\alpha m_2 - i\alpha z}]\, d\alpha \tag{4}$$

На границе раздела слоев нормальная к ней составляющая скорости должна быть непрерывной, касательные составляющие пропорциональны соответствующим коэффициентам фильтрации, т. е.

$$\operatorname{Im}(w_2) = \operatorname{Im}(w_1), \qquad k_1 \operatorname{Re}(w_2) = k_2 \operatorname{Re}(w_1) \quad \text{при } y = -m_1$$

Удовлетворяя условиям на границе раздела, из выражения (3) после соответствующих преобразований получаем

$$A_1(\alpha) = \frac{q}{\pi k_1}\operatorname{ch}\alpha b \frac{1+\lambda e^{2\alpha(m_2-m_1)}}{1-\lambda e^{2\alpha m_1}+\lambda e^{2\alpha(m_2-m_1)}-e^{2\alpha m_2}}(\sin\alpha l + i\cos\alpha l) \tag{5}$$

$$\bar{A}_1(\alpha) = \frac{q}{\pi k_1}\operatorname{ch}\alpha b \frac{1+\lambda e^{2\alpha(m_2-m_1)}}{1-\lambda e^{2\alpha m_1}+\lambda e^{2\alpha(m_2-m_1)}-e^{2\alpha m_2}}(\sin\alpha l - i\cos\alpha l) \quad \left(\lambda = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right). \tag{6}$$

Сделаем в уравнениях (5) и (6) замену

$$\sin\alpha l + i\cos\alpha l = ie^{-i\alpha l}, \qquad \sin\alpha l - i\cos\alpha l = -ie^{i\alpha l}$$

Выражение для комплексной скорости в верхней области движения примут вид

$$w_1(z) = \int_0^\infty \frac{iq}{\pi k_1}\operatorname{ch}\alpha b\,[e^{i\alpha(l-z)} + 2N_1\operatorname{sh} i\alpha(z-l)]\,d\alpha \tag{7}$$

$$N_1(\alpha) = \frac{1+\lambda e^{2\alpha(m_2-m_1)}}{1-\lambda e^{2\alpha m_1}+\lambda e^{2\alpha(m_2-m_1)}-e^{2\alpha m_2}} \tag{8}$$

Выражение (8), подобно тому, как это сделано в [1], можно записать в виде

$$N_1(\alpha) = -\frac{s^{p_2}+\lambda s^{p_1}}{1-\lambda s^{p_1}+\lambda s^{p_2-p_1}-s^{p_2}} \equiv \sum_{n=1} c_n s^n = \sum c_n e^{-2\alpha n m_0}$$

где m_0 — общий наибольший делитель m_1 и m_2,

$$p_1 = \frac{m_1}{m_0}, \quad p_2 - \frac{m_2}{m_0} \ (p_1, p_2 \text{ — целые числа}), \qquad s = e^{-2\alpha m_0} < 1$$

следовательно, ряд $N_1(\alpha)$ сходится.

Подставляя

$$N_1(\alpha) = \sum_{n=1} c_n e^{-2\alpha n m_0}$$

в уравнение (7), получаем

$$w_1(z) = \int_0^\infty \frac{iq}{2\pi k_1}\{[e^{-i\alpha(z-l+ib)} + e^{-i\alpha(z-l-ib)}] +$$

$$+\sum c_n[e^{-i\alpha[l-z-(2nm_0-b)i]} + e^{-i\alpha[l-z-(2nm_0+b)i]} -$$

$$-e^{-i\alpha[z-l-(2nm_0-b)i]} - e^{-i\alpha[z-l-(2nm_0+b)i]}]\}\,d\alpha =$$

$$= \frac{q}{2\pi k_1}\left[\frac{1}{z-l+ib} + \frac{1}{z-l-ib}\right] - \frac{q}{2\pi k_1}\sum c_n\left[\frac{1}{z-l+(2nm_0-b)i} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{z-l+(2nm_0+b)i} + \frac{1}{z-l-(2nm_0-b)i} + \frac{1}{z-l-(2nm_0+b)i}\right] \tag{9}$$

Для получения комплексного потенциала необходимо проинтегрировать уравнение (9)

$$W_1(z) = \varphi_1 + i\psi_1 = h_1 + i\psi = \frac{q}{2\pi k_1}[\ln(z-l+ib) + \ln(z-l-ib)] -$$

$$-\frac{q}{2\pi k_1}\sum c_n\{\ln[z-l+(2nm_0-b)i] + \ln[z-l+(2nm_0+b)i] +$$

$$+\ln[z-l-(2nm_0-b)i] + \ln[z-l-(2nm_0+b)i] + W_0 \tag{10}$$

де W_0 — комплексная величина.

Отделяя действительные части, определяем напор от стока, полученного в верхнем слое (l, $-ib$) и имеющего расход q.

$$h_c = \operatorname{Re} W_1^c(z) = \frac{q}{4\pi k_1}\{\ln[(x-l)^2+(y+b)^2] + \ln[(x-l)^2+(y-b)^2]\} -$$
$$-\frac{q}{4\pi k_1}\sum c_n\{\ln[(x-l)^2+(y+2nm_0-b)^2] + \ln[(x-l)^2+(y+2nm_0+b)^2] +$$
$$+\ln[(x-l)^2+(y-2nm_0+b)^2] + \ln[(x-l)^2+(y-2nm_0-b)^2]\} + C_c \qquad (11)$$

Аналогичным способом определяется напор от источника, помещенного в верхнем слое ($-l$, $-ib$) и имеющего расход $-q$

$$h_u = \operatorname{Re} W_1^u(z) = -\frac{q}{4\pi k_1}\{\ln[(x+l)^2+(y+b)^2] + \ln[(x+l)^2+(y-b)^2]\} +$$
$$+\frac{q}{4\pi k_1}\sum c_n\{\ln[(x+l)^2+(y+2nm_0-b)^2] + \ln[(x+l)^2+(y+2nm_0+b)^2] +$$
$$+\ln[(x+l)^2+(y-2nm_0+b)^2] + \ln[(x+l)^2+(y-2nm_0-b)^2]\} + C_u \qquad (12)$$

Наконец, суммируя выражения (11) и (12), находим окончательное решение задачи

$$h = h_c + h_u = \frac{q}{4\pi k_1}\left\{\ln\frac{[(x-l)^2+(y+b)^2]\,[(x-l)^2+(y-b)^2]}{[(x+l)^2+(y+b)^2]\,[(x+b)^2+(y-b)^2]} -\right.$$
$$-\sum_1 c_n \ln\frac{[(x-l)^2+(y+2nm_0-b)^2]\,[(x-l)^2+(y+2nm_0+b)^2]}{[(x+l)^2+(y+2nm_0-b)^2]\,[(x+l)^2+(y+2nm_0+b)^2]}\times$$
$$\left.\times\frac{[(x-l)^2+(y-2nm_0+b)^2]\,[(x-l)^2+(y-2nm_0-b)^2]}{[(x+l)^2+(y-2nm_0+b)^2]\,[(x+l)^2+(y-2nm_0-b)^2]}\right\} + C \qquad (13)$$

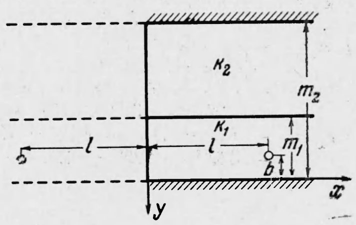
Для того чтобы удовлетворить условию $h = H$ при $x = 0$, постоянную величину C необходимо принять равной H.

Предположим, что на контуре трубчатой дрены радиуса r_0 напор равен h_0. Тогда, полагая в равенстве $x = l - r_0$ и $y = -b$, получим

$$h_0 = \frac{q}{4\pi k_1}\left\{\ln\frac{r_0^2(r_0^2+4b^2)}{(2l-r_0)^2[(2l-r_0)^2+4b^2]} - \sum_1 c_n \ln\frac{[r_0^2+4(nm_0-b)^2]}{[(2l-r_0)^2+4(nm_0-b)^2]}\times\right.$$
$$\times\frac{(r_0^2+4n^2m_0^2)^2[r_0^2+4(nm_0+b)^2]}{[(2l-r_0)^2+4n^2m_0^2]^2[(2l-r_0)^2+4(nm_0+b)^2]} + H \qquad (14)$$

Из формулы (14), учтя, что $r_0 < m_0$ и $r_0 \ll l$, получаем формулу для расхода q на единицу длины дрены

$$q = 4\pi k_1(H-h_0)\left\{\ln\frac{16l^2(l^2+b^2)}{r_0^2(r_0^2+4b^2)} -\right.$$
$$-\sum_1 c_n\left[\ln\left(1+\frac{l^2}{(nm_0-b)^2}\right) + 2\ln\left(1+\frac{l^2}{n^2m_0^2}\right) +\right.$$
$$\left.\left.+\ln\left(1+\frac{l^2}{(nm_0+b)^2}\right)\right]\right\}^{-1} \qquad (15)$$



Фиг. 2

При $b = 0$, когда дрена располагается у самой кровли верхнего слоя, формула для определения расхода будет (16)

$$q = \pi k_1(H-h_0)\left[\ln\frac{2l}{r_0} - \sum_1 c_n \ln\left(1+\frac{l^2}{n^2m_0^2}\right)\right]^{-1}$$

В случае расположения дрены в нижнем слое расчет выполняется по предложенным зависимостям, однако для расчетной схемы, представленной на фиг. 2, которая является как бы зеркальным отражением предыдущей схемы.

Отметим частные случаи. Если мощность нижнего слоя будет бесконечно большой $(m_2 \to \infty)$, имеем

$$N_1(\alpha) = -\frac{\lambda s^{p_1}}{1-\lambda s^{p_1}} = -(\lambda s^{p_1} + \lambda^2 s^{2p_1} + \lambda^3 s^{3p_1} + \ldots) = -\sum_1^\infty \lambda^n e^{-2n\alpha m_1}$$

$$q = 4\pi k_1 (H-h_0)\left\{\ln\frac{16l^2(l^2+b^2)}{r_0^2(r_0^2+4b^2)} + \sum_{n=1}^\infty \lambda^n\left[\ln\left(1+\frac{l^2}{(nm_1-b)^2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\ln\left(1+\frac{l^2}{n^2 m_1^2}\right) + \ln\left(1+\frac{l^2}{(nm_1+b)^2}\right)\right]\right\}^{-1} \qquad (17)$$

$$q = \pi k_1 (H-h_0)\left[\ln\frac{2l}{r_0} + \sum_{n=1}^\infty \lambda^n \ln\left(1+\frac{l^2}{n^2 m_1^2}\right)\right]^{-1} \qquad (18)$$

Если мощность верхнего слоя равна мощности нижнего слоя $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, имеем $c_n = -1$ $(n = 2, 4, 6\ldots)$; $c_n = -\lambda$ $(n = 1, 3, 5\ldots)$. Тогда формулы для определения расходов после соответствующих преобразований можно представить в виде

$$q = 2\pi(k_1+k_2)(H-h_0)\left[\frac{2\pi l}{m_0} + \frac{k_1+k_2}{k_1}\ln\frac{m_0}{2\pi r_0} + \frac{k_1-k_2}{2k_1}\ln\left(\frac{2}{1-\cos 2\pi b/m_0}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{k_2}{k_1}\ln\frac{(1-\cos\pi b/m_0)}{8}\right]^{-1} \qquad (19)$$

$$q = \pi(k_1+k_2)(H-h_0)\left(\frac{\pi l}{m_0} + \frac{k_1+k_2}{k_1}\ln\frac{4m_0}{\pi r_0} - 2\ln 2\right)^{-1} \qquad (20)$$

При $k_2 = 0$, $\lambda = 1$ из формул (17), (18) или (19), (20) получаем известные зависимости для определения удельного расхода трубчатой дрены в однородном напорном пласте

$$q = 2\pi k_1(H-h_0)\left[\frac{2\pi l}{m_1} + \ln\frac{m_1}{2\pi r_0} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1-\cos\frac{2\pi b}{m_1}}\right)\right]^{-1}$$

$$q = \pi k_1(H-h_0)\left[\frac{\pi l}{m_1} + \ln\frac{m_1}{\pi r_0}\right]^{-1}$$

Из (20) вытекает также приближенная формула В. М. Шестакова, (Автореф. докт. дис. М., ВНИИГ, 1963, г. (полученная им для случая $k_2/k_1 > 5 - 10$. Приведем также выражения для определения коэффициентов c_n для первых десяти членов ряда для случаев

а) $p_1 = 1$, $p_2 = 3$;

$c_1 = -\lambda$
$c_2 = -\lambda^2$
$c_3 = -(1-\lambda^2+\lambda^3)$
$c_4 = -(2\lambda - 2\lambda^3 + \lambda^4)$
$c_5 = -(-\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 - 3\lambda^4 + \lambda^5)$
$c_6 = -(1 - 4\lambda^2 + 4\lambda^3 + 3\lambda^4 - 4\lambda^5 + \lambda^6)$
$c_7 = -(3\lambda + \lambda^2 - 9\lambda^3 + 4\lambda^4 + 6\lambda^5 - 5\lambda^6 + \lambda^7)$
$c_8 = -(-2\lambda + 6\lambda^2 + 6\lambda^3 - 16\lambda^4 + 2\lambda^5 + 10\lambda^6 - 6\lambda^7 + \lambda^8)$
$c_9 = -(1 - 9\lambda^2 + 9\lambda^3 + 18\lambda^4 - 24\lambda^5 - 3\lambda^6 + 15\lambda^7 - 7\lambda^8 + \lambda^9)$
$c_{10} = -(4\lambda + 3\lambda^2 - 24\lambda^3 + 7\lambda^4 + 40\lambda^5 - 31\lambda^6 - 12\lambda^7 + 21\lambda^8 - 8\lambda^9 + \lambda^{10})$,

б) $p_1 = 1$, $p_2 = 4$.

$c_1 = -\lambda$
$c_2 = -\lambda^2$
$c_3 = -\lambda^3$
$c_4 = -(1 - \lambda^2 + \lambda^4)$
$c_5 = -(2\lambda - 2\lambda^3 + \lambda^5)$
$c_6 = -(3\lambda^2 - 3\lambda^4 + \lambda^6)$
$c_7 = -(-\lambda + 5\lambda^3 - 5\lambda^5 + \lambda^7)$
$c_8 = -(1 - 4\lambda^2 + 8\lambda^4 - 5\lambda^6 + \lambda^8)$
$c_9 = -(3\lambda - 9\lambda^3 + 12\lambda^5 - 6\lambda^7 + \lambda^9)$
$c_{10} = -(7\lambda^2 - 17\lambda^4 + 17\lambda^6 - 7\lambda^8 + \lambda^{10})$

Поступила 11 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ц ы - ц ю н ь Л ю. Приток воды к горизонтальным дренажным трубам в конечном двуслойном пласте. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
2. П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
3. Р и з е н к а м п ф Б. К. Об одном случае фильтрации воды в многослойном грунте. Уч. зап. Саратовск. ун-та, 1940, т. 15, вып. 5. Гидравлика.