

УДК 533+517.958

ВИХРЕВОЙ РАЗЛЕТ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА ВДОЛЬ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Р. Ф. Шаяхметова

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского федерального
исследовательского центра РАН, 450054 Уфа, Россия
E-mail: shayakhmetova.renata@gmail.com

Рассматривается инвариантная подмодель уравнений газовой динамики, построенная на трехмерной подалгебре с проективным оператором для случая одноатомного газа. Подмодель сведена к уравнению Абеля, для которого построены интегральные кривые. Для сепаратрисы седла исследовано приближенное решение. Подобные решения описывают вихревой разлет газа вдоль плоских кривых, расположенных на поверхности вращения.

Ключевые слова: газовая динамика, инвариантное решение, проективный оператор, уравнение Абеля.

DOI: 10.15372/PMTF20180207

Введение. В случае одноатомного газа система уравнений газовой динамики (УГД) имеет вид [1]

$$\begin{aligned}\rho D\mathbf{u} + \nabla p &= 0, & D\rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ DS &= 0, & S &= p\rho^{-5/3},\end{aligned}$$

где $D = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ — оператор полного дифференцирования; $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ — градиент; $\mathbf{u}$ — скорость; ρ — плотность; p — давление; S — функция энтропии. Газодинамические функции $\mathbf{u} = (u, v, w)$, ρ , p , S зависят от времени t и декартовых координат x, y, z .

Система УГД допускает группу преобразований с 14-мерной алгеброй Ли. В работе [2] построена оптимальная система из 1248 неподобных подалгебр. Специфика одноатомного газа заключается в том, что УГД допускают проективное преобразование, впервые обнаруженное Л. В. Овсянниковым в 1958 г. [1]. Подалгебры, не содержащие проективный оператор, входят в оптимальную систему 13-мерной алгебры Ли, допускаемой в случае политропного газа. Групповые решения на таких подалгебрах частично рассмотрены в [3]. Подалгебр, содержащих проективный оператор, значительно меньше, все они представлены в работе [4]. Групповой анализ модели одноатомного газа естественно начать с изучения инвариантных движений на подалгебрах с проективным оператором. В работе [5] из решения, описывающего состояние покоя, под действием проективного преобразования получено решение, которому соответствует однородное расширение или сжатие, а также

Работа выполнена в рамках проекта “Развитие группового анализа моделей гидродинамического типа” (государственное задание № 0246-2018-0005).

© Шаяхметова Р. Ф., 2018

нестационарное решение, порождаемое движением типа сферического источника или стока. В работе [5] также с помощью проективного преобразования простой волны Римана решена задача о распаде разрыва, в случае когда в начальный момент времени однородно расширяющийся или сжимающийся газ граничит с областью нулевого давления. С помощью решения Седова [6] в [5] исследована задача о точечном взрыве в однородно расширяющемся или сжимающемся газе. В работе [7] получена инвариантная подмодель на одномерной подалгебре, содержащей проективный оператор, в случае произвольной размерности пространства независимых переменных. Для этой подмодели рассматривается особое инвариантное решение, описывающее одномерные течения из источника в вакуум и фокусировку газа внутри сферы или цилиндра с ударными волнами. В [3] исследовались инвариантные и частично инвариантные подмодели УГД в плоском случае, порождаемые подалгебрами с проективным оператором. Построено точное решение, обладающее дискретной симметрией — инвариантностью относительно поворота вокруг начала координат на угол конечной величины. Получено непрерывное решение, описывающее движение газа, содержащего области вакуума. В явном виде найдено решение, описывающее растекание полосы газа (уменьшение давления) до значений, соответствующих вакууму, с одновременным вращением. В работе [8] построена оптимальная система подалгебр с проективной симметрией для модели двумерных изоэнтропических движений газа, получены и исследованы инвариантные решения ранга нуль (“простые” решения). В [9] исследована подмодель вихря Овсянникова с проективной симметрией, описывающая движение газа с нестационарными источником и стоком. Для задачи о движении объема газа между поршнями сферической формы получено решение с инвариантной ударной волной. Модель мелкой воды для пространственного сдвигового потока также обладает проективной симметрией, допускаемая в этом случае алгебра Ли изоморфна алгебре Ли для уравнений двумерных изоэнтропических движений политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$ [10]. В работе [11] рассмотрено регулярное частично инвариантное решение ранга один и дефекта два, которое сводится к инвариантному неявному уравнению. При различных значениях физических параметров происходит перестройка многообразия ветвления интегральных кривых. Решение описывает нестационарные движения газа с дозвуковым и сверхзвуковым режимами течения.

Несмотря на большое количество работ и полученные оригинальные примеры движений газа, сформулированная выше задача решена не полностью. Полную классификацию инвариантных решений необходимо проводить на основе работы [3]. В настоящей работе впервые рассмотрена серия трехмерных подалгебр (подалгебры 3.7 из оптимальной системы [3]), для которой инвариантная подмодель ранга один сведена к уравнению Абеля. Построены и исследованы интегральные кривые этого уравнения, для приближения одной из интегральных кривых дана физическая интерпретация задаваемого движения. Двумерная подалгебра, вложенная в выбранную серию подалгебр при некотором значении параметра, рассмотрена в работах [12, 13], в которых описан класс решений с частично линейным полем скоростей.

1. Инвариантная подмодель. Рассматривается серия подалгебр с базисом из операторов $aX_2 + X_6$, $-X_3 + aX_5$, $X_{10} + X_{12} + b(X_{11} - X_{13})$, где $a > 0$, b — произвольные параметры. В декартовой системе координат $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$ — операторы переносов по координатам y, z ; $X_5 = t\partial_y + \partial_v$, $X_6 = t\partial_z + \partial_w$ — операторы галилеевых переносов по y, z ; $X_{10} = \partial_t$ — оператор переноса по времени t ; $X_{12} = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v + (z - tw)\partial_w - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p$ — оператор проективных преобразований; $X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$, $X_{13} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 3\rho\partial_\rho - 5p\partial_p$ — операторы растяжений [1. С. 33]. В работе [4] для этой серии подалгебр получено следующее инвариантное

решение:

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{u}(\bar{x}) e^{b\tau} (1+t^2)^{-1/2} + tx(1+t^2)^{-1}, \\
 v &= \bar{v}(\bar{x}) e^{b\tau} (1+t^2)^{-1/2} + (ty - az)(1+t^2)^{-1}, \\
 w &= -\bar{w}(\bar{x}) e^{b\tau} (1+t^2)^{-1/2} + (tz + a^{-1}y)(1+t^2)^{-1}, \\
 \rho &= \bar{\rho}(\bar{x}) e^{3b\tau} (1+t^2)^{-3/2}, \quad p = \bar{p}(\bar{x}) e^{5b\tau} (1+t^2)^{-5/2}, \\
 S &= \bar{S}(\bar{x}), \quad \bar{x} = x e^{-b\tau} (1+t^2)^{-1/2}, \quad \tau = \arctg t,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

с использованием которого для системы УГД построена инвариантная подмодель из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 (\bar{u} - b\bar{x})\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{p}_{\bar{x}}/\bar{\rho} &= -b\bar{u} - \bar{x}, & (\bar{u} - b\bar{x})\bar{v}_{\bar{x}} &= -b\bar{v} - a\bar{w}, \\
 (\bar{u} - b\bar{x})\bar{w}_{\bar{x}} &= -b\bar{w} + a^{-1}\bar{v}, & (\bar{u} - b\bar{x})\bar{\rho}_{\bar{x}} + \bar{\rho}\bar{u}_{\bar{x}} &= -3b\bar{\rho}, \\
 (\bar{u} - b\bar{x})\bar{S}_{\bar{x}} &= 0, & \bar{S} &= \bar{p}\bar{\rho}^{-5/3}.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Система (1.2) допускает отражения $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$, $a \rightarrow -a$, $b \rightarrow -b$ и $\bar{u} \rightarrow -\bar{u}$, $a \rightarrow -a$, $b \rightarrow -b$, а также следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
 D_1: \quad \bar{\rho}' &= A\bar{\rho}, \quad \bar{p}' = A\bar{p}, \quad \bar{S}' = A^{-2/3}\bar{S}, \\
 D_2: \quad \bar{x}' &= B\bar{x}, \quad \bar{u}' = B\bar{u}, \quad \bar{p}' = B^2\bar{p}, \quad \bar{S} = B^2\bar{S}, \\
 D_3: \quad \bar{v}' &= D\bar{v}, \quad \bar{w}' = D\bar{w}.
 \end{aligned}$$

Решения системы (1.2) рассматриваются с точностью до этих преобразований. При $\bar{u} = b\bar{x}$ получается частное решение

$$b = 0, \quad \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0, \quad \bar{\rho} = -\bar{p}_{\bar{x}}\bar{x}^{-1}, \tag{1.3}$$

где $\bar{p}(\bar{x})$ — произвольная функция. Решение (1.3), исследованное в работе [14], задает сгущение газа к стенке $x = 0$ и отражение газа от нее с растеканием (уменьшением давления) до значений, соответствующих вакууму. Движение частиц происходит по гиперболам, лежащим на конусе.

2. Интегралы подмодели. Пусть $\bar{u} \neq b\bar{x}$, тогда $\bar{S} = S_0$ — постоянная. В случае $b = 0$ система интегрируется:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}\bar{\rho} &= A_0, \quad 5S_0\bar{\rho}^{8/3} + A_0^2 + (\bar{x}^2 - B_0^2)\bar{\rho}^2 = 0, \\
 \bar{v} &= C_0 \cos \Theta, \quad \bar{w} = C_0 a^{-1} \sin \Theta, \quad \Theta = A_0^{-1} \int_0^{\bar{x}} \bar{\rho}(\bar{x}) d\bar{x}.
 \end{aligned}$$

Полученное решение описывает растекание (с вращением) “хребта” давления в направлении оси $x > 0$ до значений, соответствующих вакууму.

Далее рассматривается случай $b \neq 0$. По формуле

$$\bar{x}_s = \bar{u} - b\bar{x} \neq 0 \tag{2.1}$$

вводится новая независимая переменная s , которая определена с точностью до постоянного слагаемого, т. е. допускается преобразование

$$T_1: \quad s' = s + d.$$

В новых переменных второе и третье уравнения системы (1.2) линеаризуются:

$$\bar{v}_s = -b\bar{v} - a\bar{w}, \quad \bar{w}_s = -b\bar{w} + a^{-1}\bar{v}.$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\bar{v} = aC_1 \sin(s + \varphi_0) e^{-bs}, \quad \bar{w} = -C_1 \cos(s + \varphi_0) e^{-bs},$$

где C_1, φ_0 — постоянные. С использованием преобразований T_1, D_3 можно получить $\varphi_0 = 0, C_1 = 1$. Остальные уравнения системы (1.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{u}_s + b\bar{u} + \bar{x} + (5/2)S_0(\bar{\rho}^{2/3})_s \bar{x}_s^{-1} &= 0, \\ \bar{\rho}_s + \bar{\rho}\bar{u}_s \bar{x}_s^{-1} + 3b\bar{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В силу (2.1) из уравнений (2.2) исключается $\bar{u}$:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{ss} + 2b\bar{x}_s + (b^2 + 1)\bar{x} + (5/2)S_0(\bar{\rho}^{2/3})_s \bar{x}_s^{-1} &= 0, \\ \bar{\rho}_s/\bar{\rho} + \bar{x}_{ss}/\bar{x}_s + 4b &= 0 \Rightarrow \bar{\rho}\bar{x}_s e^{4bs} = C \end{aligned}$$

(C — постоянная интегрирования). С использованием преобразований D_1, D_2 можно получить $C = \pm 1, S_0 = \pm 1$.

Таким образом, система сводится к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\bar{x}_{ss} + 2b\bar{x}_s + (b^2 + 1)\bar{x} = (5/3) e^{-(8/3)bs} \bar{x}_s^{-5/3} (\bar{x}_{ss} \bar{x}_s^{-1} + 4b), \quad (2.3)$$

инвариантные функции определяются по формулам

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{x}_s + b\bar{x}, \quad \bar{v} = a \sin(s) e^{-bs}, \quad \bar{w} = -\cos(s) e^{-bs}, \\ \bar{\rho}\bar{x}_s e^{4bs} = \pm 1, \quad \bar{S} = \pm 1, \quad \bar{p} = \pm \bar{\rho}^{5/3}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В результате замены $\bar{x} = k(s) e^{-bs}$ уравнение (2.3) приводится к автономному виду

$$k_{ss} + k = (5/3)(k_s - bk)^{-8/3}(k_{ss} + 2bk_s - 3b^2k),$$

где $k \neq e^{bs}$ в силу (2.1); $k \neq k_0$ — постоянная. Порядок уравнения уменьшается путем замены $k_s = n(k)$:

$$n_k n = \frac{(5/3)(2bn - 3b^2k) - k(n - bk)^{8/3}}{(n - bk)^{8/3} - 5/3}, \quad n \neq bk.$$

После подстановки $n = bk + m^3(k)$ уравнение записывается в рациональном виде

$$\frac{dm}{dk} = \frac{-(1 + b^2)km^6 + bm(5 - m^8)}{3(bk + m^3)(m^8 - 5/3)}. \quad (2.5)$$

С использованием преобразования растяжения $m \rightarrow (5/3)^{1/8}m, k \rightarrow (5/3)^{3/8}b^{-1}k$ уравнение (2.5) приводится к виду

$$\frac{dm}{dk} = \frac{-\varepsilon km^6 + m(3 - m^8)}{3(k + m^3)(m^8 - 1)}, \quad (2.6)$$

где $\varepsilon = (1 + b^2)b^{-2} > 1$. Замена

$$k = f(m) + \frac{3 - m^8}{\varepsilon m^5}, \quad p = -\frac{18}{5\varepsilon m^5}, \quad A(\varepsilon) = \frac{4 - \varepsilon}{6\varepsilon} \left(\frac{18}{5\varepsilon}\right)^{3/5}, \quad B(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - 1}{6\varepsilon} \left(\frac{18}{5\varepsilon}\right)^{11/5}$$

приводит (2.6) к уравнению Абеля в каноническом виде

$$f f_p - f = -\frac{5}{36} p + A(\varepsilon) p^{-3/5} + B(\varepsilon) p^\delta, \quad \delta = -\frac{11}{5},$$

которое интегрируется в элементарных функциях только при $\delta = -7/5$, $B < 0$ [15]. Проведем качественный анализ и численное интегрирование уравнения (2.6).

3. Интегральные кривые. Уравнение (2.6) имеет интегральную прямую $m = 0$, которой соответствует решение (1.3). При преобразовании отражения $m \rightarrow -m$, $k \rightarrow -k$ уравнение (2.6) остается инвариантным, поэтому можно исследовать интегральные кривые в полуплоскости $m > 0$. Уравнение (2.6) имеет три элементарные особые точки: $(0, 0)$, $(1, 2\varepsilon^{-1})$, $(-1, -2\varepsilon^{-1})$. Точка $(0, 0)$ представляет собой седло, $m = 0$ — его сепаратриса, вторая сепаратриса имеет асимптотику

$$k = -\frac{1}{4}m^3 + \frac{1}{192}(8 + \varepsilon)m^{11} + O(m^{19}).$$

Линеаризованное в особой точке $(1, 2\varepsilon^{-1})$ уравнение (2.6) принимает вид

$$\frac{d\bar{m}}{d\bar{k}} = \frac{-18\bar{m} - \varepsilon\bar{k}}{24(2\varepsilon^{-1} + 1)\bar{m}}, \quad (3.1)$$

где $\bar{m} = m - 1$; $\bar{k} = k - 2\varepsilon^{-1}$. Характеристическое уравнение матрицы из коэффициентов дробно-линейной части уравнения (3.1) имеет вид $\lambda^2 + 18\lambda + 24(2 + \varepsilon) = 0$. Собственные значения и собственные векторы равны $\lambda_{\pm} = -9 \pm \sqrt{33 - 24\varepsilon}$, $\mathbf{e}_{\pm} = (\varepsilon, \lambda_{\mp})$.

При $1,000 < \varepsilon < 1,375$ ($b \in (-\infty; -2\sqrt{6}/3) \cup (2\sqrt{6}/3; +\infty)$) собственные значения $\lambda_{\pm}$ представляют собой действительные отрицательные числа, особая точка является узлом, из которого в направлении вектора $\mathbf{e}_-$ выходит единственная интегральная кривая, а оси, задаваемой вектором $\mathbf{e}_+$, касается множество интегральных кривых (рис. 1). При $\varepsilon > 1,375$ ($b \in (-2\sqrt{6}/3; 2\sqrt{6}/3)/\{0\}$) собственные значения $\lambda_{\pm}$ представляют собой комплексно-сопряженные числа, особая точка — фокус. При $\varepsilon = 1,375$ ($b = \pm 2\sqrt{6}/3$), $\lambda = -9$ особая точка является вырожденным узлом, в котором интегральные кривые касаются оси, задаваемой вектором $\mathbf{e} = (1, 375, -9)$.

Для представления интегральных кривых $m = m(k)$ при $k \rightarrow \pm\infty$ в уравнение (2.6) вводится малый параметр δ : $k = \delta^{-5}k_1$, $m = \delta m_1$. При разложении решения по малому

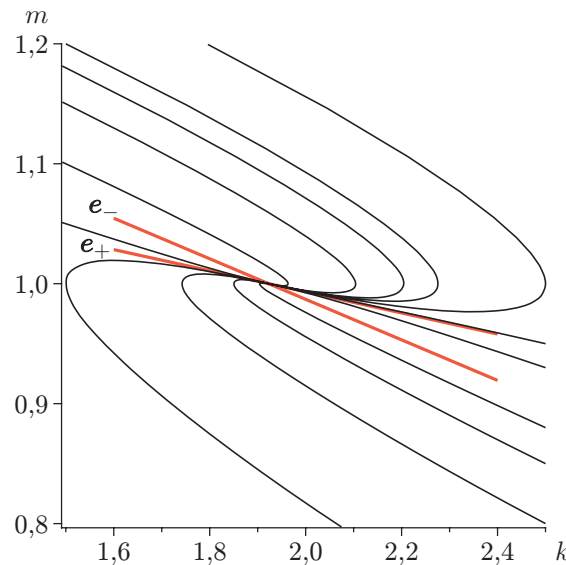


Рис. 1. Интегральные кривые уравнения (2.6) в окрестности особой точки $(1, 2\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon = 1,04$ (узел)

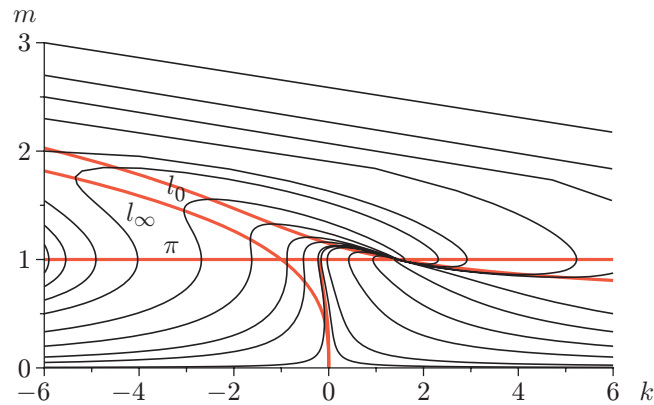


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (2.6) при $\varepsilon = 1,375$ (вырожденный узел)

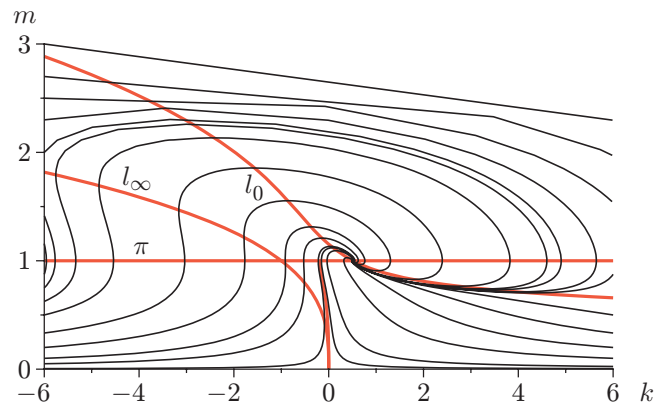


Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (2.6) при $\varepsilon = 4$ (фокус)

параметру получаем в нулевом приближении уравнение

$$\frac{dm_1}{dk_1} = \frac{\varepsilon}{3} m_1^6 - \frac{m_1}{k_1}, \quad (3.2)$$

решение которого имеет вид

$$m_1 = k_1^{-1} \left(C^{-5} + \frac{5\varepsilon}{12} k_1^{-4} \right)^{-1/5}. \quad (3.3)$$

Из (3.3) при $k_1 \rightarrow \pm\infty$ получаем $m_1 \sim Ck_1^{-1}$. Следовательно, при $m \rightarrow 0$, $k \rightarrow \pm\infty$ интегральные кривые уравнения (2.6) имеют асимптотику $m \sim \delta^{-4} Ck^{-1} = C_1 k^{-1}$.

Угловые коэффициенты касательных к интегральным кривым $m = m(k)$ равны бесконечности на прямой π : $m = 1$ и в точках кривой l_∞ : $k = -m^3$. Угловые коэффициенты равны нулю на оси k и в точках кривой l_0 : $k = \varepsilon^{-1}(3m^{-5} - m^3)$. Эти кривые подтверждают правильность вычислений интегральных кривых, представленных на рис. 1–3. При $1,000 < \varepsilon < 1,375$ и $\varepsilon = 1,375$ (см. рис. 2) интегральные кривые качественно не различаются. Для $\varepsilon < 1,75$ приведены интегральные кривые вблизи особой точки $(1, 2\varepsilon^{-1})$ (см. рис. 1).

Далее рассматривается новое решение, соответствующее сепаратрисе седла.

4. Представление движения газа для сепаратрисы седла. Приближенно в окрестности седла его сепаратриса задается формулой $k \approx -m^3/4$ (для всех значений ε). Для представления движения газа, соответствующего этому решению, необходимо рассмотреть только малые значения $k \geq 0$. При использовании переменной s решение имеет вид

$$k = k_0 e^{-3bs}, \quad bs \rightarrow \infty, \quad k_0 \geq 0, \quad (4.1)$$

что соответствует приближенному решению $\bar{x} = k_0 e^{-4bs}$ для уравнения (2.3). Для решения (4.1) при малых $\bar{x} \geq 0$ формулы (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{u} = -3b\bar{x}, \quad \bar{v} = -a\left(\frac{\bar{x}}{k_0}\right)^{1/4} \sin\left(\frac{1}{4b} \ln \frac{\bar{x}}{k_0}\right), \quad \bar{w} = -\left(\frac{\bar{x}}{k_0}\right)^{1/4} \cos\left(\frac{1}{4b} \ln \frac{\bar{x}}{k_0}\right), \\ \bar{\rho} = \pm(4bk_0)^{-1}, \quad \bar{p} = \pm\bar{S}(4bk_0)^{-5/3}, \quad \bar{S} = \pm 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В (4.2) знак выбирается из условия $\bar{\rho} > 0$, $\bar{p} > 0$. Подставляя выражения (4.2) в (1.1), получаем приближенное частное решение УГД при малых $x \geq 0$ либо при $t \rightarrow \pm\infty$.

При $t \rightarrow \infty$ газ растекается (давление уменьшается) до значений, соответствующих вакууму: $p \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, температура $T = p\rho^{-1}R^{-1} = R^{-1}(4bk_0)^{-2/3} e^{2b\tau}(1+t^2)^{-1}$ стремится к нулю. Движение газа является вихревым:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y) = \left(\frac{a^{-1} + a}{1+t^2}; -\frac{a^{-1}b^{-1}v_1 + w_1}{4x}; \frac{v_1 - ab^{-1}w_1}{4x} \right) \neq 0, \\ v_1 = v - \frac{ty - az}{1+t^2}, \quad w_1 = w - \frac{tz + a^{-1}y}{1+t^2}. \end{aligned}$$

При $t \rightarrow \infty$ вектор $\boldsymbol{\omega}$ стремится к нулю. Мировые линии частиц определяются их скоростью:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (4.3)$$

Подставляя в уравнение (4.3) формулы (4.2), (1.1), интегрируя и выполняя замену $x_0 \rightarrow k_0 x_0$, $x_0 \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned} x = k_0 x_0 \sqrt{1+t^2} e^{-3b\tau}, \quad y = -a(x_0^{1/4} \sin((4b)^{-1} \ln x_0) + z_0)t + y_0, \\ z = (x_0^{1/4} \cos((4b)^{-1} \ln x_0) + a^{-1}y_0)t + z_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

(x_0, y_0, z_0 — лагранжевы координаты). Якобиан перехода от лагранжевых координат к эйлеровым равен $J = (1+t^2)^{3/2} e^{-3b\tau} > 0$. Мировые линии частиц не пересекаются. Формулы (4.4) задают кривые в $\mathbb{R}^4$. Проекция кривых на плоскость (x, t) представлена на рис. 4 для двух значений параметра b ($b = 0,25$ — фокус, $b = 1,70$ — узел). У кривых имеются наклонные асимптоты при $t \rightarrow +\infty$: $x = k_0 x_0 e^{-3b\pi/2}(t + 3b)$ и при $t \rightarrow -\infty$: $x = -k_0 x_0 e^{3b\pi/2}(t + 3b)$ и минимум в точке $t = 3b$.

Система (4.4) допускает отражение $z \rightarrow -z$, $t \rightarrow -t$, $b \rightarrow -b$, поэтому достаточно рассмотреть случай $b > 0$.

При преобразовании растяжения $y \rightarrow a\bar{y}$, $y_0 \rightarrow a\bar{y}_0$ параметр a исключается (можно считать $a = 1$). При $x_0 = 0$ формулы (4.4) принимают вид

$$x = 0, \quad \bar{y} = -z_0 t + \bar{y}_0, \quad z = \bar{y}_0 t + z_0.$$

Частицы движутся в плоскости $x = 0$ по прямым с направляющим вектором $\mathbf{q} = (-z_0, \bar{y}_0)$.

Определим вид кривой $F(\bar{y}_0, z_0) = 0$, с которой точки начинают двигаться по касательным к ней. Для этого направление касательной к кривой должно совпадать с $\mathbf{q}$,

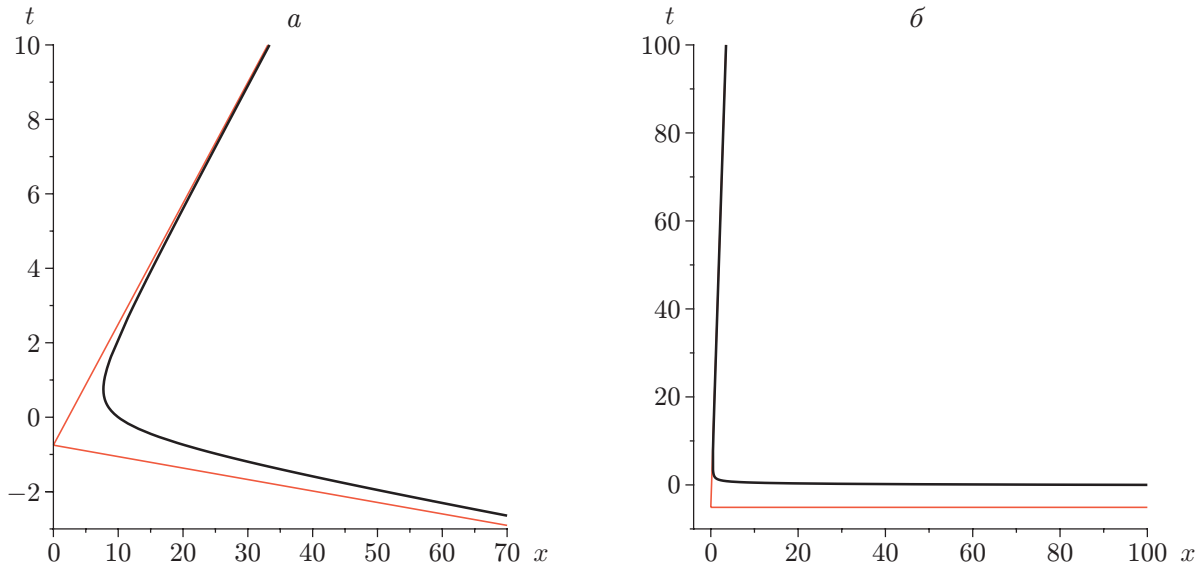


Рис. 4. Проекция кривых (4.4) на плоскость (x, t) при различных значениях параметров $b, k_0 x_0$:

a — $b = 0,25, k_0 x_0 = 10$, $б$ — $b = 1,70, k_0 x_0 = 100$

а направление нормали $\mathbf{n} = (F_{\bar{y}_0}, F_{z_0})$ должно быть коллинеарно вектору $(\bar{y}_0, z_0)$. Тогда $F_{\bar{y}_0}/\bar{y}_0 = F_{z_0}/z_0$ и кривая представляет собой окружность с произвольным радиусом r :

$$\bar{y}_0^2 + z_0^2 = r^2. \quad (4.5)$$

За время t точки окружности (4.5) окажутся на окружности с тем же центром в точке $(0, 0)$ и радиусом $r\sqrt{1+t^2}$.

Далее рассматривается случай $x_0 > 0$. Проекция движения частиц на плоскость $(\bar{y}, z)$ являются прямыми линиями с направляющим вектором $\mathbf{q} = (-z_0 - x_0^{1/4} \sin((4b)^{-1} \ln x_0), \bar{y}_0 + x_0^{1/4} \cos((4b)^{-1} \ln x_0))$.

Аналогичным образом в плоскости $x = x_0$ определяется вид кривой $F(\bar{y}_0, z_0) = 0$, с которой проекции точек $(x_0, \bar{y}_0, z_0)$ на эту плоскость начинают двигаться по касательным к ней. Для этого должно выполняться соотношение

$$\frac{F_{\bar{y}_0}}{\bar{y}_0 + x_0^{1/4} \cos((4b)^{-1} \ln x_0)} = \frac{F_{z_0}}{z_0 + x_0^{1/4} \sin((4b)^{-1} \ln x_0)}.$$

Тогда искомая кривая представляет собой окружность с центром $(-x_0^{1/4} \cos((4b)^{-1} \ln x_0), -x_0^{1/4} \sin((4b)^{-1} \ln x_0))$ и произвольным радиусом R :

$$(\bar{y}_0 + x_0^{1/4} \cos((4b)^{-1} \ln x_0))^2 + (z_0 + x_0^{1/4} \sin((4b)^{-1} \ln x_0))^2 = R^2. \quad (4.6)$$

Из равенств (4.4) выразим $\bar{y}_0, z_0$ при фиксированном x_0 :

$$\begin{aligned} \bar{y}_0 &= \frac{\bar{y} + zt + tx_0^{1/4}(\sin((4b)^{-1} \ln x_0) - t \cos((4b)^{-1} \ln x_0))}{1 + t^2}, \\ z_0 &= \frac{z - \bar{y}t - tx_0^{1/4}(t \sin((4b)^{-1} \ln x_0) + \cos((4b)^{-1} \ln x_0))}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Из (4.6) следует

$$(\bar{y} + x_0^{1/4} \cos((4b)^{-1} \ln x_0))^2 + (z + x_0^{1/4} \sin((4b)^{-1} \ln x_0))^2 = R^2(1 + t^2). \quad (4.7)$$

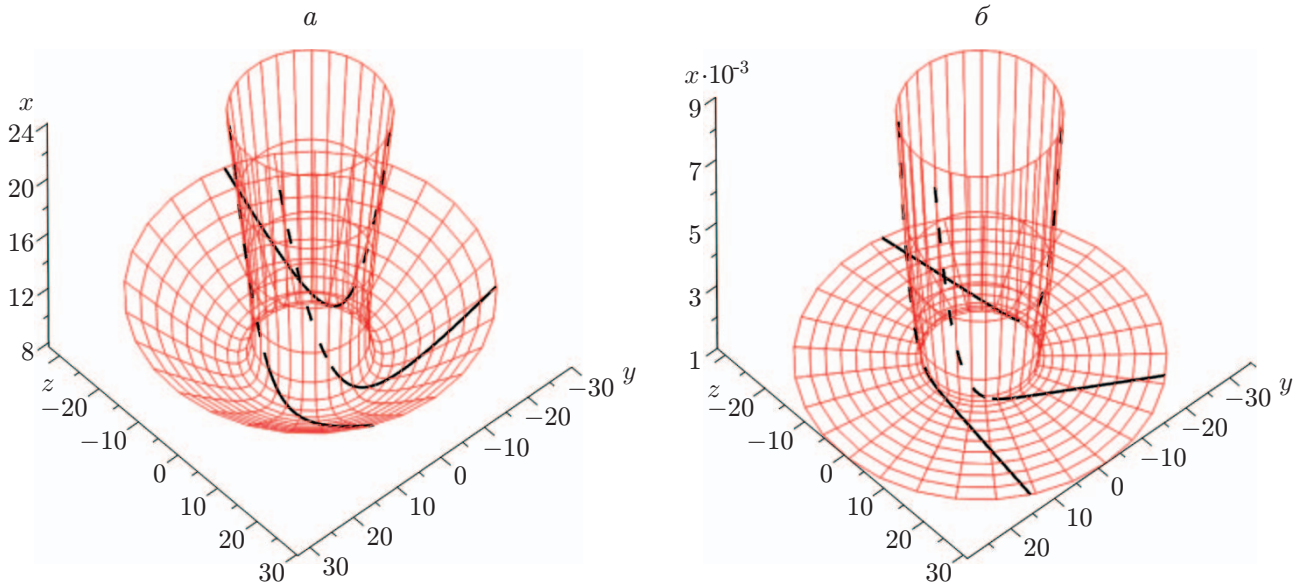


Рис. 5. Поверхность, на которой расположены траектории частиц, при $R = 10$ и различных значениях параметров b, k_0, x_0 :

a — $b = 0,25, k_0 = 1, x_0 = 10$; $б$ — $b = 1,70, k_0 = 10, x_0 = 10$; сплошные линии — для положительных значений времени t , штриховые — для отрицательных значений времени t

В момент времени t проекции частиц на плоскость $(\bar{y}, z)$ будут находиться на окружности с тем же центром и радиусом $R\sqrt{1+t^2}$. Уравнение (4.7) и первое уравнение (4.4) задают уравнение поверхности, на которой расположены траектории частиц. На рис. 5 показаны эта поверхность, траектории частиц для отрицательных и положительных значений времени t при различных значениях параметра b . Видно, что качественно интегральные кривые хорошо согласуются.

Таким образом, в пространстве $(x, \bar{y}, z)$ в каждой плоскости $x = x_0$ имеются окружности, с которых проекции частиц начинают двигаться по касательным. Центры этих окружностей $(x_0, -x_0^{1/4} \cos((4b)^{-1} \ln x_0), -x_0^{1/4} \sin((4b)^{-1} \ln x_0))$ расположены на кривой, которая в цилиндрической системе координат $x = x, \bar{y} = r \cos \varphi, z = r \sin \varphi$ задается как линия пересечения цилиндра, направляющая которого является логарифмической спиралью $r = e^{b\varphi}$, и поверхности $x = r^4$ (рис. 6). Частицы, в начальный момент времени находящиеся на кривой, на которой расположены центры окружностей, движутся только вдоль оси Ox .

Заключение. Исследовано решение, соответствующее приближению сепаратрисы в окрестности седла уравнения (2.6) для подмодели (1.2). Движение частиц, задаваемое этим решением, описывается следующим образом. В каждой плоскости $x = x_0$ существует центр концентрических окружностей, расположенных на кривой, образующейся при пересечении поверхности $x = r^4$ и цилиндра (образующая цилиндра параллельна оси Ox , направляющая представляет собой логарифмическую спираль $r = e^{b\varphi}$). Из точки какой-либо концентрической окружности проводятся полукасательная и полупрямая, параллельная оси Ox . Эти полупрямые задают плоскость, в которой расположена траектория частицы, выходящей из этой точки. В любой момент времени проекции частиц, выходящих с данной окружности, на плоскость $x = x_0$ окажутся на окружности, концентрической с исходной. Следовательно, траектории этих частиц образуют поверхности вращения, оси которых па-

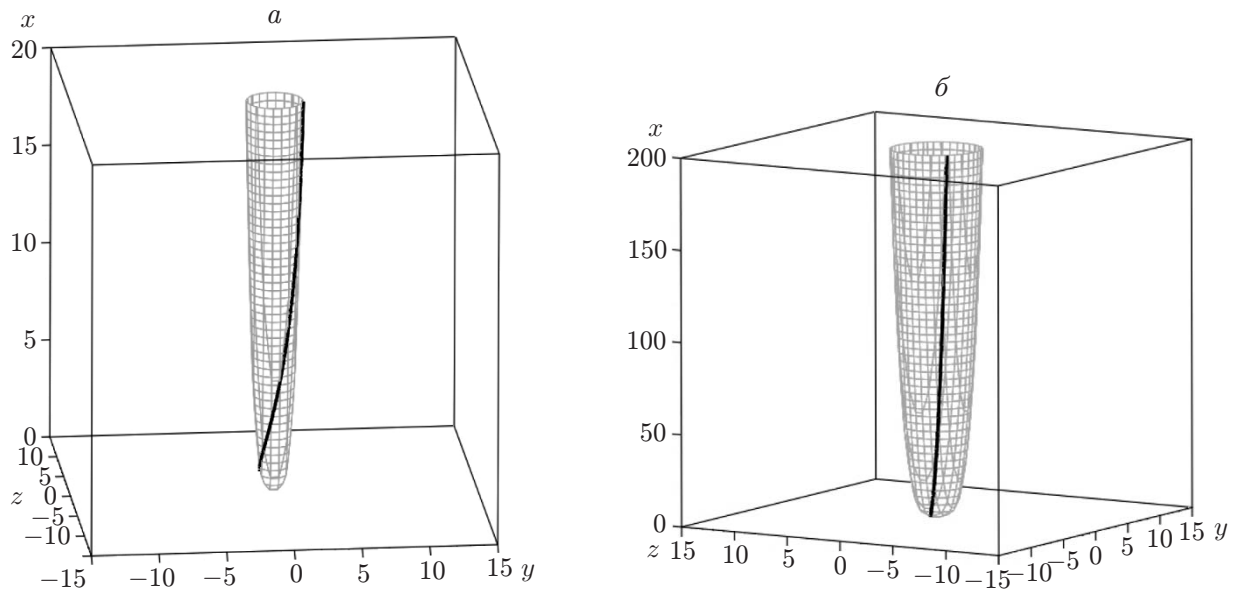


Рис. 6. Кривая, на которой расположены центры окружностей вида (4.6), при различных значениях b :

a — $b = 0,25$, $б$ — $b = 1,70$

параллельны оси Ox и проходят через центр концентрических окружностей, расположенный в плоскости $x = x_0$. Таким образом, решение задает разлет газа в пространстве вдоль плоских кривых с непараллельными плоскостями, что объясняет наличие ненулевого вихря в каждой точке пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
2. **Черевко А. А.** Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{5/3}$. Новосибирск, 1996. (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 4-96).
3. **Головин С. В.** Подмодели динамики политропного газа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2000.
4. **Шаяхметова Р. Ф.** Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 605–625.
5. **Никольский А. А.** Инвариантное преобразование уравнений движения идеального одноатомного газа и новые классы их точных решений // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, № 3. С. 496–508.
6. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
7. **Хабиров С. В.** Нестационарное инвариантное решение уравнений газовой динамики, описывающее растекание газа до вакуума // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, № 6. С. 967–975.
8. **Павленко А. С.** Симметрии и решения уравнений двумерных движений политропного газа // Сиб. электрон. мат. изв. 2005. Т. 2. С. 291–307.
9. **Павленко А. С.** Проективная подмодель вихря Овсянникова // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 4. С. 3–16.

10. **Чесноков А. А.** Симметрии и точные решения уравнений мелкой воды на пространственном сдвиговом потоке // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 41–54.
11. **Барлукова А. М., Чупахин А. П.** Частично инвариантные решения в газовой динамике и неявные уравнения // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 6. С. 11–24.
12. **Головин С. В.** Об одном инвариантном решении уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 1. С. 3–10.
13. **Головин С. В.** Точные решения для эволюционных подмоделей газовой динамики // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 3–14.
14. **Шаяхметова Р. Ф.** Завихренный разлет одноатомного газа // Тр. Ин-та механики Уфим. науч. центра РАН. 2014. Вып. 10. С. 110–113.
15. **Зайцев В. Ф.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. М.: Физматлит, 2001.

*Поступила в редакцию 15/XII 2015 г.,
в окончательном варианте — 25/IV 2017 г.*
