

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ УПРУГО-НЕУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ

А. А. Роговой

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь

E-mail: rogovoy@icmm.ru

На основе кинематики наложения малых упругих и неупругих деформаций на конечные упруго-неупругие построен общий вид эволюционного определяющего соотношения упруго-неупругости с согласованной с ним объективной производной. Уравнение конкретизировано с использованием упругого закона для слабосжимаемого материала.

Ключевые слова: упруго-неупругость, конечные деформации, слабая сжимаемость, эволюционные определяющие уравнения.

1. Предварительные сведения. В работе [1] с использованием трех конфигураций: \mathfrak{a}_0 — начальной, \mathfrak{a} — текущей и \mathfrak{a}_* — промежуточной, близкой к текущей, и в рамках кинематики, определяемой наложением малых деформаций (градиентов места) на конечные, построены уравнения состояния для конечных упругих деформаций простого материала относительно промежуточной конфигурации.

В соответствии с теоремой Селерье — Рихтера или теоремой приведения Нолла определяющее уравнение для простого материала, удовлетворяющее принципу объективности, имеет вид (см. [2])

$$T = R \cdot \tilde{g}_1(U) \cdot R^T, \quad (1.1)$$

где T — тензор истинных напряжений; R, U — ортогональный тензор и симметричный положительно-определенный тензор чистой деформации в полярном разложении градиента места $F = R \cdot U$; $\tilde{g}_1(U)$ — отклик материала на чистую деформацию. Соотношение (1.1) может быть представлено в нескольких эквивалентных формах [1], в частности

$$T = J^{-1} F \cdot \tilde{g}_6 \cdot F^T, \quad (1.2)$$

где $J = I_3(F)$ — третий главный инвариант F , определяющий относительное изменение объема; \tilde{g}_6 — функция отклика материала. В работе [1] функция \tilde{g}_6 связана с \tilde{g}_1 соотношением $\tilde{g}_1 = J^{-1} U \cdot \tilde{g}_6 \cdot U$. Относительно промежуточной конфигурации \mathfrak{a}_* , близкой к текущей, определяющее уравнение (1.2) представляется в виде

$$T = [1 - I_1(e)] T_* + h \cdot T_* + T_* \cdot h^T + \tilde{L}_6^{IV} \cdot e. \quad (1.3)$$

Здесь T_* — напряжение, достигнутое в конфигурации \mathfrak{a}_* (начальное для этой конфигурации); $h = (\nabla^{\mathfrak{a}_*} \mathbf{u})^T$ — градиент относительно конфигурации \mathfrak{a}_* вектора малых перемеще-

Работа выполнена по разделам Программы Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (2003, 2004) и интеграционной Программы УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН (2003, 2004) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00554).

ент места в виде мультипликации малых упругих, малых неупругих и конечных упруго-неупругих деформаций (см. рисунок):

$$F = f_E \cdot f_{IN} \cdot F_* \quad (2.1)$$

Здесь упруго-неупругий градиент места F_* переводит начальную конфигурацию, положение точки в которой определяется радиус-вектором \mathbf{r} , в первую промежуточную \mathfrak{a}_1 . Градиент f_{IN} переводит конфигурацию \mathfrak{a}_1 во вторую тоже промежуточную конфигурацию \mathfrak{a}_2 , а градиент f_E переводит конфигурацию \mathfrak{a}_2 в текущую с радиус-вектором \mathbf{R} . Причем конфигурации \mathfrak{a}_1 , \mathfrak{a}_2 и текущая близки между собой, что формализуется выражениями

$$R_{\mathfrak{a}_2} = R_{\mathfrak{a}_1} + \varepsilon \mathbf{u}_{IN}, \quad R = R_{\mathfrak{a}_2} + \varepsilon \mathbf{u}_E, \quad (2.2)$$

где ε — малый параметр (положительная величина); \mathbf{u}_{IN} , \mathbf{u}_E — векторы неупругих и упругих перемещений, последовательно переводящие конфигурацию \mathfrak{a}_1 в \mathfrak{a}_2 и \mathfrak{a}_2 — в текущую. Соотношения (2.2) позволяют определить f_{IN} и f_E :

$$f_{IN} = (\overset{\mathfrak{a}_1}{\nabla} R_{\mathfrak{a}_2})^T = g + \varepsilon h_{IN} = g + \varepsilon(e_{IN} + d_{IN}) = (g + \varepsilon e_{IN}) \cdot (g + \varepsilon d_{IN}),$$

$$f_E = (\overset{\mathfrak{a}_2}{\nabla} R)^T = g + \varepsilon h_E = g + \varepsilon(e_E + d_E) = (g + \varepsilon e_E) \cdot (g + \varepsilon d_E),$$

где g — единичный тензор; e_{IN} , d_{IN} — симметричная (малые неупругие деформации) и кососимметричная (малые неупругие повороты) части тензора $h_{IN} = (\overset{\mathfrak{a}_1}{\nabla} \mathbf{u}_{IN})^T$; e_E , d_E — симметричная (малые упругие деформации) и кососимметричная (малые упругие повороты) части тензора

$$\varepsilon h_E = \varepsilon (\overset{\mathfrak{a}_2}{\nabla} \mathbf{u}_E)^T = \varepsilon (f_{IN}^{-T} \cdot \overset{\mathfrak{a}_1}{\nabla} \mathbf{u}_E)^T = \varepsilon (\overset{\mathfrak{a}_1}{\nabla} \mathbf{u}_E)^T.$$

Из этих выражений следует, что конфигурации \mathfrak{a}_1 и \mathfrak{a}_2 неразличимы (с точностью до линейного представления по ε):

$$f_E \cdot f_{IN} = f_{IN} \cdot f_E = g + \varepsilon(e + d) = (g + \varepsilon e) \cdot (g + \varepsilon d) = (g + \varepsilon d) \cdot (g + \varepsilon e),$$

где $e = e_E + e_{IN}$ — полная малая деформация; $d = d_E + d_{IN}$ — полный малый поворот. В результате соотношение (2.1) принимает вид

$$F = (g + \varepsilon h) \cdot F_* = [g + \varepsilon(e_E + e_{IN} + d_E + d_{IN})] \cdot F_* \quad (2.3)$$

Здесь $h = h_E + h_{IN}$. Приближенные соотношения (2.3) (при их получении сохранялись только линейные относительно ε слагаемые) легко сводятся к точным. Принимая во внимание, что $F - F_* = \Delta F$ — приращение градиента места, а $\varepsilon \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}$ — приращение перемещения, деля первое уравнение в соотношениях (2.3) на Δt — время перехода из промежуточной конфигурации в текущую, устремляя первую к последней (при этом $\overset{\mathfrak{a}_1}{\nabla}$ стремится к $\tilde{\nabla}$ — оператору Гамильтона в текущей конфигурации) и учитывая, что $(\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T = \dot{F} \cdot F^{-1}$ (\mathbf{v} — скорость перемещения), получаем тождество. Осуществляя аналогичный предельный переход во втором уравнении соотношений (2.3), имеем

$$\dot{F} = (D_E + D_{IN} + W_E + W_{IN}) \cdot F = P \cdot F + Q \cdot F.$$

Здесь $D_E = \dot{e}_E$, $D_{IN} = \dot{e}_{IN}$ — деформации упругой и неупругой скоростей перемещений (совпадающие в данном случае со скоростями соответствующих деформаций); $W_E = \dot{d}_E$, $W_{IN} = \dot{d}_{IN}$ — упругий и неупругий тензоры вихря; P , Q — любые достаточно гладкие тензорные функции, удовлетворяющие условию $P + Q = A$, $A = D_E + D_{IN} + W_E + W_{IN}$.

Решением тензорного уравнения (см. [3])

$$\dot{F} = P(t) \cdot F(t) + Q(t) \cdot F(t) \quad (2.4)$$

при $F(t=0) = g$ является тензор (матрицант)

$$F_0^t(A) = F_0^t(P) \cdot F_0^t(S), \quad S = [F_0^t(P)]^{-1} \cdot Q \cdot F_0^t(P), \quad (2.5)$$

где $F_0^t(P)$, $F_0^t(S)$ — решения при тех же самых начальных условиях уравнения (2.4) с правыми частями P и S (умноженными на F) соответственно, что легко проверить простой подстановкой. Каждый из матрицантов в решении (2.5) представляется выражением вида

$$F_0^t(A) = (g + A(\tau) \Delta t) \cdot F_0^{t*}(A), \quad \Delta t = t - t_*, \quad \tau \in (t_*, t), \quad (2.6)$$

являющимся при рекуррентном продолжении интегральным произведением, приводящим в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ к мультипликативному интегралу [3].

Покажем эквивалентность соотношений (2.5) и (2.3). Поскольку $F(t)$ есть $F_0^t(A)$, $P + Q = A$, учитывая выражение для тензора S , используя для матрицантов представления (2.6) и сохраняя в выкладках слагаемые только первого порядка малости относительно Δt , соотношение (2.5) приводим к виду

$$(g + A(\tau) \Delta t) \cdot F_* = (g + A(\tau) \Delta t) \cdot F_0^{t*}(P) \cdot F_0^{t*}(S).$$

Отсюда $F_* = F_0^{t*}(P) \cdot F_0^{t*}(S)$, что и должно быть в соответствии с соотношением (2.5), а $A(\tau) \Delta t = \varepsilon(e_E + e_{IN} + d_E + d_{IN})$.

Таким образом, выбирая любые достаточно гладкие тензорные функции P и Q с заданной суммой, получим разные мультипликативные разложения градиента места F . Положим $P = D_E + W_E$. Тогда согласно (2.6) имеем

$$F_0^t(P) = [g + \varepsilon(e_E + d_E)] \cdot F_0^{t*}(P).$$

В последнем выражении содержится только упругая кинематика. Поэтому естественно ввести обозначение $F_0^t(P) = F_E$ и название “упругий градиент места”:

$$F_E = [g + \varepsilon(e_E + d_E)] \cdot F_{E*}. \quad (2.7)$$

Тензор Q определяется выбором тензора P : $Q = D_{IN} + W_{IN}$. Тогда, используя второе соотношение в (2.5), находим тензор S и, сохраняя в соответствии с (2.6) слагаемые только первого порядка малости относительно Δt или ε , строим тензор $F_0^t(S)$, который назовем неупругим градиентом места и обозначим F_{IN} :

$$F_{IN} = [g + \varepsilon F_{E*}^{-1} \cdot (e_{IN} + d_{IN}) \cdot F_{E*}] \cdot F_{IN*}. \quad (2.8)$$

В результате из первого соотношения (2.5) получаем представление $F = F_E \cdot F_{IN}$, совпадающее по форме с известным разложением Ли, но свободное от недостатков последнего. В частности, из этого представления следует, что полная деформация скорости перемещений есть сумма упругой и неупругой деформаций скорости и упругий градиент места не меняется при чисто неупругом изменении конфигурации.

Первое положение вытекает из следующей цепочки соотношений. Как известно, $l = (\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T = \dot{F} \cdot F^{-1}$. Тогда $l = \dot{F}_E \cdot F_E^{-1} + F_E \cdot \dot{F}_{IN} \cdot F_{IN}^{-1} \cdot F_E^{-1}$. Подставляя сюда соотношения $\dot{F}_E = (D_E + W_E) \cdot F_E$ и $\dot{F}_{IN} = F_E^{-1} \cdot (D_{IN} + W_{IN}) \cdot F_E \cdot F_{IN}$, следующие из выражений (2.7) и (2.8), находим $l = D_E + W_E + D_{IN} + W_{IN}$ или, учитывая симметричность тензоров D и кососимметричность W , получаем $D = (l + l^T)/2 = D_E + D_{IN}$.

Для доказательства второго положения запишем представление F в виде мультипликации F_E и F_{IN} через соответствующие операторы Гамильтона и радиусы-векторы в известном виде

$$F = F_E \cdot F_{IN} = \left(\overset{IN}{\nabla} \mathbf{R} \right)^T \cdot (\nabla \mathbf{R}_{IN})^T = \mathbf{R}_i \mathbf{R}_{IN}^i \cdot (\mathbf{R}_{IN})_j \mathbf{r}^j = \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i. \quad (2.9)$$

Здесь радиусы-векторы \mathbf{R} и \mathbf{R}_{IN} определяют текущую и неупругую конфигурации; $\overset{IN}{\nabla}$ и ∇ — операторы Гамильтона относительно неупругой и начальной конфигураций; \mathbf{R}_i , \mathbf{R}^i , $(\mathbf{R}_{IN})_i$, \mathbf{R}_{IN}^i , \mathbf{r}_i , \mathbf{r}^i — векторы основного и взаимного базисов текущей, неупругой и начальной конфигураций соответственно. Согласно (2.7) упругий градиент места не меняется при чисто неупругом изменении конфигурации. Из выражений (2.9) следует, что

$$F_E = (\overset{IN}{\nabla} \mathbf{R})^T = \mathbf{R}_i \mathbf{R}_{IN}^i,$$

где и \mathbf{R} , и $\overset{IN}{\nabla}$, а соответственно, и \mathbf{R}_i , и \mathbf{R}_{IN}^i зависят от неупругой кинематики. Покажем, что здесь нет никакого противоречия.

Неизменность F_E при неупругом изменении конфигурации определяется соотношением $\dot{F}_E = \dot{\mathbf{R}}_i \mathbf{R}_{IN}^i + \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{R}}_{IN}^i = 0$. Отсюда следует $\mathbf{R}^i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{R}_{IN}^i \cdot (\dot{\mathbf{R}}_{IN})_i$. Учитывая, что положение точки в текущей конфигурации \mathbf{R} определяется ее положением в предыдущей близкой конфигурации \mathbf{R}_* и вектором малых неупругих перемещений $\varepsilon \mathbf{u}_{IN}$: $\mathbf{R} = \mathbf{R}_* + \varepsilon \mathbf{u}_{IN}$, имеем $\dot{\mathbf{R}}_i = \partial \mathbf{v}_{IN} / \partial q^i$, где $\mathbf{v}_{IN} = \dot{\mathbf{u}}_{IN}$, q^i — обобщенные координаты. В результате приходим к следующему условию неизменности упругого градиента места при неупругом изменении конфигурации: $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{v}_{IN} = \overset{IN}{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{IN}$.

Рассмотрим сомножитель в квадратных скобках в соотношении (2.8). Это выражение есть не что иное, как градиент вектора \mathbf{R}_{IN} относительно промежуточной неупругой конфигурации, определяемой вектором \mathbf{R}_{IN*} , близкой к текущей неупругой:

$$\overset{IN*}{\nabla} \mathbf{R}_{IN} = \overset{IN*}{\nabla} (\mathbf{R}_{IN*} + \varepsilon \varphi) = g + \varepsilon \overset{IN*}{\nabla} \varphi,$$

где $\varepsilon \varphi$ — малое изменение неупругой конфигурации. Отсюда

$$\varepsilon \overset{IN*}{\nabla} \varphi = \varepsilon F_{E*}^{-1} \cdot h_{IN} \cdot F_{E*}.$$

Так как $h_{IN} = (\overset{*}{\nabla} \mathbf{u}_{IN})^T$ — градиент вектора малых неупругих перемещений относительно упруго-неупругой промежуточной конфигурации (конфигурация \mathfrak{a}_1 в соотношении (2.3)), близкой к текущей, то $h_{IN} \cdot F_{E*} = (\overset{IN*}{\nabla} \mathbf{u}_{IN})^T$. Тогда

$$\varepsilon \overset{IN*}{\nabla} \varphi = \varepsilon F_{E*}^{-1} \cdot (\overset{IN*}{\nabla} \mathbf{u}_{IN})^T.$$

Деля последнее соотношение на приращение времени осуществления малого неупругого процесса Δt и выполняя предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем равенство $\overset{IN}{\nabla} \dot{\mathbf{R}}_{IN} = F_E^{-1} \cdot (\overset{IN}{\nabla} \mathbf{v}_{IN})^T$, первый инвариант которого совпадает с выписанным выше условием независимости упругого градиента места от неупругой кинематики. Таким образом, соотношением (2.8) определяется переменная неупругая конфигурация (радиус-вектор \mathbf{R}_{IN}), относительно которой градиент изменяемого за счет неупругих перемещений вектора \mathbf{R} остается постоянным. Конечно, этот упругий градиент может быть записан в любом базисе, в том числе и в переменном, использованном, например, в соотношении (2.9).

Таким образом, исходя из выражений (2.1) или (2.3), которые и только которые определяют действительную историю деформирования, получено мультипликативное разложение полного градиента места на упругий и неупругий, совпадающее по форме с известным разложением Ли, но с совершенно иным содержанием. Естественно, что найденные таким образом упругий и неупругий градиенты места (соотношения (2.7) и (2.8)) отражают действительную историю деформирования: подстановка в правую часть разложения типа Ли выражений для этих градиентов приводит к соотношениям (2.1) или (2.3).

Отметим, что представление F в виде мультипликации F_E и F_{IN} полезно в некоторых случаях трактовать, используя терминологию структурного моделирования, как последовательное соединение упругого и неупругого элементов. Действительно, в рамках малых деформаций ($F_{E*} = F_{IN*} = g$) из соотношений (2.7), (2.8) следует, что полные деформация и поворот равны сумме упругих и неупругих величин, что соответствует последовательному соединению упругого и неупругого элементов.

Корректное выделение из упруго-неупругого градиента места чисто упругого, выполненное здесь, понадобится нам при построении уравнения состояния упруго-неупругого поведения материала при конечных деформациях. Понадобится также мера деформации Коши — Грина $C = F^T \cdot F$, которая с учетом выражений (2.3), (2.5) представляется в виде

$$C = F_{IN}^T \cdot C_E \cdot F_{IN} = C_* + 2\varepsilon F_*^T \cdot (e_E + e_{IN}) \cdot F_*, \quad (2.10)$$

где $F_* = F_{E*} \cdot F_{IN*}$.

3. Определяющее уравнение. Любой упруго-неупругий процесс, приводящий к текущей конфигурации \mathfrak{a} , интерпретируется как упругий из напряженной конфигурации \mathfrak{a}_2 , близкой к текущей (см. рисунок). Близость определяется возможностью использовать соотношение (1.3) в качестве определяющего уравнения упругости, которое допускает удобную для наших целей трактовку, связанную со слагаемыми, содержащими напряжение T_* , соответствующее градиенту места F_* . Эти слагаемые полностью определяют преобразование напряжений T_* при наложении на F_* градиента места f , т. е. поворот этих напряжений и их изменение в связи с изменением текущей элементарной площадки. Действительно, элементарные ориентированные площадки в текущей и промежуточной конфигурациях связаны известным соотношением (см. [1]) $J_f^{-1} N \cdot f dS = N_* dS_*$, где $J_f = I_3(f) = 1 + \varepsilon I_1(e)$; $N dS$ и $N_* dS_*$ — ориентированные элементарные площадки в текущей и промежуточной (\mathfrak{a}_2) конфигурациях. Из равенства усилия, соответствующего напряжению T_* в промежуточной конфигурации, усилию в текущей конфигурации получаем для последней симметричный тензор напряжений $J_f^{-1} f \cdot T_* \cdot f^T$. Подставляя сюда выражения для J_f и f и удерживая только линейные относительно ε слагаемые, приходим к соотношению $[1 - I_1(e)]T_* + h \cdot T_* + T_* \cdot h^T$, в котором, учитывая, что $h = e + d$, можно выделить члены, связанные только с поворотом и изменением величины площадки.

Рассмотрим процесс перехода из конфигурации \mathfrak{a}_1 в текущую \mathfrak{a} (см. рисунок). Конфигурации \mathfrak{a}_1 соответствует накопленное напряженное состояние $T_{\mathfrak{a}_1}$. Градиент f_{IN} переводит конфигурацию \mathfrak{a}_1 с этим напряженным состоянием в конфигурацию \mathfrak{a}_2 , поворачивая тензор $T_{\mathfrak{a}_1}$ посредством d_{IN} и пересчитывая его на новую текущую площадку посредством e_{IN} (путь 1 на рисунке). В результате напряженное состояние в конфигурации \mathfrak{a}_2 определяется соотношением

$$T_{\mathfrak{a}_2} = [1 - \varepsilon I_1(e_{IN})]T_{\mathfrak{a}_1} + \varepsilon h_{IN} \cdot T_{\mathfrak{a}_1} + \varepsilon T_{\mathfrak{a}_1} \cdot h_{IN}^T. \quad (3.1)$$

Напряжения $T_{\mathfrak{a}_2}$ являются начальными для кинематики, определяемой упругим градиентом места f_E , поэтому в соответствии с уравнением состояния (1.3) тензор истинных напряжений записывается в виде

$$T = [1 - \varepsilon I_1(e_E)]T_{\mathfrak{a}_2} + \varepsilon h_E \cdot T_{\mathfrak{a}_2} + \varepsilon T_{\mathfrak{a}_2} \cdot h_E^T + \varepsilon \tilde{L}_6^{IV} \cdot e_E, \quad (3.2)$$

где \tilde{L}_6^{IV} определяет отклик материала на малые упругие деформации e_E относительно конфигурации \mathfrak{a}_2 . Подставляя выражение (3.1) в соотношение (3.2) и сохраняя только линейные по ε слагаемые, приходим к уравнению

$$T = [1 - \varepsilon I_1(e)]T_{\mathfrak{a}_1} + \varepsilon h \cdot T_{\mathfrak{a}_1} + \varepsilon T_{\mathfrak{a}_1} \cdot h^T + \varepsilon \tilde{L}_6^{IV} \cdot e_E, \quad (3.3)$$

где $e = e_E + e_{IN}$ и $h = h_E + h_{IN}$ — полная малая деформация и градиент полных перемещений при переходе из конфигурации \mathfrak{a}_1 (с накопленными в ней напряжениями $T_{\mathfrak{a}_1}$ (далее T_*) в текущую. (Заметим, что соотношение (3.3) можно получить, двигаясь по пути 2 (см. рисунок), т. е. сначала осуществляя малый упругий процесс, а затем — малый неупругий, что следует из отмеченного выше равенства $f_E \cdot f_{IN} = f_{IN} \cdot f_E$.) Так как $e_E = e - e_{IN}$, то

$$T = [1 - \varepsilon I_1(e)]T_* + \varepsilon h \cdot T_* + \varepsilon T_* \cdot h^T + \varepsilon \tilde{L}_6^{IV} \cdot (e - e_{IN}). \quad (3.4)$$

Приближенное уравнение (3.4) можно свести к точному (дифференциальному, эволюционному) делением его на приращение времени перехода из конфигурации \mathfrak{a}_1 в актуальную и устремлением промежуточных конфигураций к текущей ($\mathfrak{a}_1 \rightarrow \mathfrak{a}_2 \rightarrow \mathfrak{a}$). В результате имеем

$$T^{\text{Tr}} = \tilde{L}_6^{IV} \cdot (\dot{e} - \dot{e}_{IN}), \quad (3.5)$$

где $T^{\text{Tr}} \equiv \dot{T} - \dot{h} \cdot T - T \cdot \dot{h}^T + I_1(\dot{e})T$ — автоматически получающаяся объективная производная Трусделла; $\dot{h} \equiv (\nabla \mathbf{v})^T$; $\dot{e} \equiv D$ (D — тензор деформации скорости полных перемещений). Аргументами у тензора четвертого ранга \tilde{L}_6^{IV} в (3.5) являются те же кинематические величины, что и в соотношении (3.4), но не в промежуточной, а в текущей конфигурации. В результате, вводя уравнение состояния для \dot{e}_{IN} , получаем эволюционное определяющее уравнение, записанное через истинное напряжение, скорость его изменения, деформацию скорости полных перемещений и упругую кинематику, через которую определяется тензор \tilde{L}_6^{IV} . Построим для этого тензора конкретное выражение.

4. Упругий потенциал. Рассмотрим чисто упругий материал, поведение которого определяется только упругой кинематикой. (Для упрощения обозначений далее опускаем индекс E во всех кинематических величинах, считая их упругими.)

Тензор истинных напряжений представляется через тензор Пиолы — Кирхгофа второго рода в виде $T = J^{-1}F \cdot P_{II} \cdot F^T$. Сравнивая это выражение с соотношением (1.2), заключаем, что $\tilde{g}_6(U) = P_{II}$. Тензор P_{II} определяется в упругости через упругий потенциал W , зависящий, как правило, от меры упругих деформаций Коши — Грина $C = F^T \cdot F$: $P_{II} = 2(\partial W / \partial C)$. Используя известные правила дифференцирования тензорных функций тензорного аргумента по тензорному аргументу [4], имеем

$$dP_{II} = \frac{\partial P_{II}}{\partial C} \cdot dC = \frac{\partial P_{II}}{\partial C} \cdot (2F^T \cdot de \cdot F) = 2 \left(F \overset{\circ}{\circ} \frac{\partial P_{II}}{\partial C} \cdot F^T \right) \cdot de.$$

Здесь учтено, что в соответствии с соотношением (2.10) (в котором $F_{IN} = g$, $e_{IN} = 0$) в пределе (при стремлении промежуточной конфигурации к текущей) имеем $dC = 2F^T \cdot de \cdot F$. Выражение $A \overset{\circ}{\circ} B^{IV}$ означает позиционное умножение, т. е. скалярное умножение слева тензора второго ранга A на третий базисный вектор тензора четвертого ранга B^{IV} . Учитывая теперь представление P_{II} через упругий потенциал, получаем

$$P_{II} = 4 \int_{e_0^t} \left(F \overset{\circ}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C^2} \cdot F^T \right) \cdot de = 4 \int_0^t \left(F \overset{\circ}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C^2} \cdot F^T \right) \cdot D d\tau. \quad (4.1)$$

Здесь e_0^t — история изменения тензора e , а в последнем интеграле все величины в подынтегральном выражении являются функциями времени τ .

Аналогично

$$dW = \frac{\partial W}{\partial C} \cdot dC = \frac{\partial W}{\partial C} \cdot (2F^T \cdot de \cdot F) = 2 \left(F \cdot \frac{\partial W}{\partial C} \cdot F^T \right) \cdot de = (F \cdot P_{II} \cdot F^T) \cdot de.$$

Отсюда

$$W = \int_{e_0^t} (F \cdot P_{II} \cdot F^T) \cdot de = \frac{1}{2} \int_{C_0^t} P_{II} \cdot dC, \quad (4.2)$$

где C_0^t — история изменения тензора C , или с учетом (4.1)

$$\begin{aligned} W &= 4 \int_{e_0^t} \left\{ F \cdot \left[\int_{e_0^t} \left(F \overset{\circ}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C^2} \cdot F^T \right) \cdot de \right] \cdot F^T \right\} \cdot de = 2 \int_{C_0^t} \left[\int_{e_0^t} \left(F \overset{\circ}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C^2} \cdot F^T \right) \cdot de \right] \cdot dC = \\ &= 4 \int_0^t \left\{ F \cdot \left[\int_0^{\tau_1} \left(F \overset{\circ}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C^2} \cdot F^T \right) \cdot D \, d\tau_2 \right] \cdot F^T \right\} \cdot D \, d\tau_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из последнего равенства в (4.3) следует, что

$$\frac{dW}{dt} = P_{II} \cdot (F^T \cdot D \cdot F) = JT \cdot D.$$

Учитывая, что $D \, dt = de$ и $2F^T \cdot de \cdot F = dC$, получаем соотношения $P_{II} = 2(\partial W / \partial C)$ и $T = J^{-1}(\partial W / \partial e)$. Последние выражения непосредственно следуют и из других равенств в (4.2), (4.3). Определяя из второго равенства в (4.3) вторую производную по C , получаем тождество. Такая форма представления упругого потенциала позволяет обобщить его на упруго-неупругий процесс.

Как следует из соотношения (4.1), тензор четвертого ранга $\partial^2 W / \partial C^2$ определяет свойства материала в текущий момент времени относительно базиса начальной конфигурации и его отклик (напряжение, отнесенное к начальной конфигурации) на бесконечно малое приращение меры деформации Коши — Грина. Тензор F просто переводит два последних базисных вектора этого тензора четвертого ранга в векторы текущей конфигурации, к которым отнесен тензор de . Будем моделировать упруго-неупругий процесс с помощью последовательного соединения упругого и неупругого элементов, кинематика которых определяется соотношениями (2.7) и (2.8) соответственно, а кинематика всей сборки — (2.5). При таком соединении элементов истинные напряжения в них одинаковы и равны полному напряжению всей сборки. Приращение этих напряжений определяется свойствами упругого элемента, т. е. тензором четвертого ранга $\partial^2 W(C_E) / \partial C_E^2$, и приращением упругих деформаций. Поэтому естественным обобщением соотношений (4.1), (4.3) на упруго-неупругий процесс будут выражения

$$P_{II} = 4 \int_0^t \left(F \overset{\circ}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot F^T \right) \cdot D_E \, d\tau; \quad (4.4)$$

$$W_1 = 4 \int_0^t \left\{ F \cdot \left[\int_0^{\tau_1} \left(F \overset{\circ}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot F^T \right) \cdot D_E \, d\tau_2 \right] \cdot F^T \right\} \cdot D_E \, d\tau_1, \quad (4.5)$$

где F — полный упруго-неупругий градиент места; W — упругий потенциал, зависящий только от упругой кинематики, определяемой выражением (2.7). Из этих соотношений следует, что

$$JT \cdot D_E = \frac{dW_1}{dt} = 4 \left\{ F \cdot \left[\int_0^t \left(F \overset{\circ}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot F^T \right) \cdot D_E \, d\tau \right] \cdot F^T \right\} \cdot D_E. \quad (4.6)$$

Отсюда имеем

$$T = 4J^{-1}F \cdot \left[\int_0^t \left(F \circ \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot F^T \right) \cdot D_E d\tau \right] \cdot F^T.$$

Представим последний интеграл в виде суммы двух интегралов: первый — от 0 до t_* , который согласно (4.4) есть P_{II*} , второй — от t_* до t , причем $t - t_* = \Delta t$ — малая конечная величина, и поэтому его можно аппроксимировать выражением

$$\left(F_* \circ \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \Big|_{C_E=C_{E*}} \cdot F_*^T \right) \cdot \varepsilon e_E.$$

Здесь и ниже величины с индексом “*” относятся к моменту времени t_* . Учитывая теперь соотношение (2.3) для F и представление $J = J_*(1 + \varepsilon I_1(e))$ для якобиана (отсюда $J^{-1} = J_*^{-1}(1 - \varepsilon I_1(e))$) [1], приходим, сохраняя только линейные слагаемые по ε , к определяющему уравнению (3.3) с конкретным выражением для \tilde{L}_6^{IV} :

$$\tilde{L}_6^{IV} = 4J_*^{-1}F_* \cdot \left(F_* \circ \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \Big|_{C_E=C_{E*}} \cdot F_*^T \right) \cdot F_*^T, \quad (4.7)$$

где $B^{IV} \cdot A$ означает скалярное умножение справа тензора второго ранга A на второй базисный вектор тензора четвертого ранга B^{IV} .

5. Упругий потенциал W слабосжимаемого материала. Так как потенциал W в (4.4)–(4.7) зависит от меры только упругих деформаций, то для упрощения в начале этого раздела индекс E в обозначениях кинематических величин будем опускать.

Эластомеры, т. е. материалы, допускающие большие упругие деформации, проявляют слабую сжимаемость и в обычных условиях считаются несжимаемыми. Такая аппроксимация используется большинством авторов и является вполне корректной, когда материалы работают в обычных (не экстремальных) условиях, т. е. при невысоком гидростатическом давлении [5–7]. Условия работы эластомеров в узлах современной техники — это экстремальные условия с высокими гидростатическими давлениями, которые могут провоцироваться и температурными полями, и неучет слабой сжимаемости материала приводит к неадекватным реальности результатам. Разработанная в [8] теория конечных упругих деформаций изначально изотропного слабосжимаемого материала основана на разложении упругого потенциала W в ряд по третьему главному инварианту меры деформации Коши — Грина C в окрестности единицы с удержанием (в силу слабой сжимаемости материала) только членов не выше квадратичных:

$$W(I_1, I_2, I_3) = \hat{W}(I_1, I_2) + \chi_1(I_3 - 1) + (1/2)\chi_2(I_3 - 1)^2,$$

$$\hat{W}(I_1, I_2) = W(I_1, I_2, 1), \quad \chi_1(I_1, I_2) = \frac{\partial W}{\partial I_3} \Big|_{I_3=1}, \quad \chi_2(I_1, I_2) = \frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2} \Big|_{I_3=1},$$

где $I_i = I_i(C)$ ($i = 1, 2, 3$) — главные инварианты меры C . Этим вводятся четыре обобщенных модуля упругости, один из которых и определяет сжимаемость (несжимаемость) материала.

Дальнейшему развитию теории посвящены работы [9–11], в которых учитывается экспериментально наблюдаемый факт изменения “объемного модуля” и “модуля сдвига” при изменении объема и продемонстрированы возникающие при этом эффекты, в частности эффект раскручивания и натягивания обратно предварительно закрученной и стянутой в осевом направлении внешней поверхности полого цилиндра при подаче внутреннего давления. При конечных деформациях выражения, определяющие модуль сдвига и объемный

модуль, зависят от конкретной задачи, т. е. для разных задач они разные (что и описано в [8, 9]). И это неудивительно, поскольку гидростатика при конечных деформациях определяется изменением не только объема, но и формы. И наоборот, изменение объема определяется и шаровой и девиаторной частями тензора напряжений. В связи с этим понятия “объемный модуль” и “модуль сдвига” чисто условные, терминологически удобные, но их нужно обязательно привязывать к конкретной задаче, поэтому они и взяты в кавычки.

Определяющее соотношение, полученное и использованное в работах [9–11], имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P_{II} &= \frac{\partial W}{\partial C} = (g - I_3 C^{-1})c_1 + (I_1 g - C - 2I_3 C^{-1})c_2 + \sigma I_3 C^{-1}, \\ \alpha(\sigma - \chi_1) &= I_3 - 1, \quad \alpha = 1/\chi_2, \\ c_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2, I_3) &= k_i + p_i(I_3 - 1) + (1/2)q_i(I_3 - 1)^2, \\ k_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) &= \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{I}_i}, \quad p_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \frac{\partial \chi_1}{\partial \hat{I}_i}, \quad q_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \frac{\partial \chi_2}{\partial \hat{I}_i} \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь

$$\hat{I}_1 = I_1 - (I_3 - 1), \quad \hat{I}_2 = I_2 - 2(I_3 - 1), \quad \hat{I}_3 = I_3 \tag{5.2}$$

— инварианты, введенные в [12]. Причем

$$\begin{aligned} \chi_1(\hat{I}_1, \hat{I}_2)|_{C=g} &= 0, \quad 2(k_1 + k_2)|_{C=g} = G_0, \\ 4\left(\chi_2 - \frac{2(k_1 + k_2)}{3}\right)|_{C=g} &= B_0, \quad \frac{\chi_2 - (k_1 + k_2)}{2\chi_2 - (k_1 + k_2)}|_{C=g} = \nu_0, \end{aligned}$$

где G_0 , B_0 , ν_0 — модуль сдвига, объемный модуль и коэффициент Пуассона линейной теории упругости. Для того чтобы уравнения состояния были энергетически допустимыми [13], должны выполняться равенства

$$\frac{\partial k_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial k_2}{\partial \hat{I}_1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial p_2}{\partial \hat{I}_1}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial q_2}{\partial \hat{I}_1}.$$

В работах [9–11] принимались простейшие выражения для \hat{W} , χ_1 и χ_2 :

$$\begin{aligned} \hat{W} &= k_1(\hat{I}_1 - 3) + k_2(\hat{I}_2 - 3), \quad \chi_1 = p_1(\hat{I}_1 - 3) + p_2(\hat{I}_2 - 3), \\ \chi_2 &= \chi_{20} + q_1(\hat{I}_1 - 3) + q_2(\hat{I}_2 - 3) = \chi_{20}(1 + Q_1(\hat{I}_1 - 3) + Q_2(\hat{I}_2 - 3)), \quad Q_i = q_i/\chi_{20}, \\ &k_1, k_2, p_1, p_2, q_1, q_2, \chi_{20} — \text{const}, \end{aligned}$$

которые тем не менее позволили достаточно ярко выявить эффект, связанный со слабой упругой сжимаемостью материала.

Из соотношений (5.1) несложно получить выражение для $\partial^2 W/\partial C^2$, учитывая, что (см. [4, 13])

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial C} &= g, \quad \frac{\partial I_2}{\partial C} = I_1 g - C, \quad \frac{\partial I_3}{\partial C} = I_3 C^{-1}, \\ \frac{\partial C}{\partial C} &= C_{II}^{IV}, \quad \frac{\partial C^{-1}}{\partial C} = -C^{-1} \cdot C_{II}^{IV} * C^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь C_{II}^{IV} — второй изотропный тензор четвертого ранга. В результате, принимая во внимание (4.7) и вновь помечая величины, относящиеся только к упругости, индексом E , получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_6^{IV} \cdot e_E = & 4J_*^{-1} \{ (c_1 - \sigma_*) I_{3E*} [Y \cdot e_E \cdot Y - Y(Y \cdot e_E)] + \\
& + I_{3E*} [Y(\Phi_* \cdot e_E) + (\Phi_* - 2I_{3E*}Y)(Y \cdot e_E)] [p_1 + q_1(I_{3E*} - 1)] + \\
& + [\Phi_*(\Phi_* \cdot e_E) - \Phi_* \cdot e_E \cdot \Phi_* + 2I_{3E*}(Y \cdot e_E \cdot Y - (Y \cdot e_E)Y)] c_2 + \\
+ I_{3E*} [I_{1E*}Y(\Phi_* \cdot e_E) - Y(X \cdot e_E) + (I_{1E*}\Phi_* - X - 4I_{3E*}Y)(Y \cdot e_E)] [p_2 + q_2(I_{3E*} - 1)] + \\
& + I_{3E*}^2 [\chi_{20} + q_1(\hat{I}_{1E*} - 3) + q_2(\hat{I}_{2E*} - 3)] Y(Y \cdot e_E) \}. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Здесь $c_i = k_i + p_i(I_{3E*} - 1) + (1/2)q_i(I_{3E*} - 1)^2$ ($i = 1, 2$); σ_* определяется соотношением

$$\alpha_0 \frac{\sigma_* - p_1(\hat{I}_{1E*} - 3) - p_2(\hat{I}_{2E*} - 3)}{1 + Q_1(\hat{I}_{1E*} - 3) + Q_2(\hat{I}_{2E*} - 3)} = I_{3E*} - 1, \quad \alpha_0 = \frac{1}{\chi_{20}}, \quad (5.4)$$

а \hat{I}_{1E} , \hat{I}_{2E} — соотношениями (5.2); $Y = F_* \cdot C_{E*}^{-1} \cdot F_*^T$; $X = F_* \cdot C_{E*} \cdot F_*^T$; $\Phi_* = F_* \cdot F_*^T$ — тензор меры деформаций Фингера, инварианты которого совпадают с соответствующими инвариантами тензора C_* . Все величины с индексом “*” отнесены к достигнутой промежуточной конфигурации \mathfrak{a}_1 и поэтому известны. Представляя в соотношении (5.3) малые упругие деформации разностью малых полных и неупругих деформаций (для последних нужно записать свои уравнения состояния; некоторые из них приведены в п. 4), завершаем построение определяющего уравнения (3.4), описывающего упруго-неупругое поведение материала при конечных деформациях, конечных упругих (слабосжимаемый материал) и неупругих. Полная кинематика, присутствующая в соотношениях (3.4), (5.3), определяется выражением (2.3), а упругая, входящая в (5.3), (5.4), — выражением (2.7).

Заключение. Из кинематики упруго-неупругого процесса выделена чисто упругая кинематика, не зависящая от неупругого изменения деформационной конфигурации. Это позволило, трактуя упруго-неупругий процесс как упругий из напряженной однозначно определенной конфигурации, близкой к текущей, записать эволюционное уравнение (с автоматически вытекающей объективной производной) поведения сложных сред при конечных деформациях. Процедура построения уравнения достаточно просто формализуется и применялась для построения определяющих соотношений упругопластичности [1], вязко-термоупругости [14, 15] при конечных деформациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новокшанов Р. С., Роговой А. А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С. 77–95.
2. Трудселл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
4. Роговой А. А. Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента // Вестн. Перм. гос. техн. ун-та. 2001. № 2. С. 83–90.
5. Ogden R. W. Non-linear elastic deformations. Horwood: Chichester, 1984.
6. Anand L. A. A constitutive model for compressible elastomeric solids // Comput. Mech. 1996. V. 18. P. 339–355.
7. Lambert-Diani J., Rey C. New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers // Europ. J. Mech. A / Solids. 1999. V. 18. P. 1027–1043.
8. Мошев В. В., Свистков А. Л., Гаришин О. К. и др. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов. Екатеринбург: Ин-т механики сплошных сред УрО РАН, 1997.

9. **Кузнецова В. Г., Роговой А. А.** Эффект учета слабой сжимаемости материала в упругих задачах с конечными деформациями // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 4. С. 64–77.
10. **Роговой А. А., Кузнецова В. Г.** Эффект учета слабой сжимаемости эластомеров. Осесимметричная задача. Аналитическое решение // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 6. С. 27–37.
11. **Rogovoy A.** Effect of elastomer slight compressibility // Europ. J. Mech. A / Solids. 2001. V. 20. P. 757–775.
12. **Cescotto S., Fonder G.** A finite element approach for large strain of nearly incompressible rubber-like materials // Intern. J. Solids Struct. 1979. V. 15, N 8. P. 589–605.
13. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
14. **Роговой А. А., Новокшанов Р. С.** Формализованный подход к построению определяющих уравнений сложных сред при конечных деформациях // Сб. докл. Всерос. школы-семинара по современным проблемам механики деформируемого твердого тела. Новосибирск, 13–17 окт. 2003 г. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. техн. ун-та, 2003. С. 184–187.
15. **Роговой А. А.** Построение и аттестация определяющих уравнений сложных сред при конечных деформациях // Тез. докл. II Всерос. конф. “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, посвященной памяти акад. А. Ф. Сидорова, Абрау-Дюрсо, 8–11 сент. 2004 г. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2004. С. 86–88.

Поступила в редакцию 29/XII 2004 г.
