УДК 537.56

ОБ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ИОНИЗИРУЮЩЕГО ОБЛУЧЕНИЯ

А. А. Данцер, В. А. Феоктистов

(Москва)

Проведен численный расчет вольт-амперной характеристики газового промежутка, ионизированного внешним источником, в случае ион-ионной проводимости. Проведено сравнение полученных результатов с имеющимися приближенными аналитическими решениями. Обсуждается методика численного интегрирования системы уравнений.

В работах [1,2] рассматривалась вольт-амперная характеристика ионизированного внешним источником газа как в пренебрежении, так и с учетом объемного заряда при произвольной геометрии электрического поля. В случае действия объемного заряда получение точного аналитического решения связано с большими математическими трудностями, и поэтому, очевидно, авторы ограничились рассмотрением двух предельных случаев: случая выполнимости закона Ома (напряжение $V \to 0$), а также случая почти полного сбора ионов ($V \to \infty$). На основе полученных решений в работе [2] приведена аппроксимационная формула для описания тока проводимости при произвольных напряжениях. Однако способ экстраполяции вольт-амперной характеристики на промежуточную область напряжений не является однозначным, и поэтому точность полученной в работе [2] аппроксимационной формулы требует дополнительного уточнения. В данной работе с использованием ЭВМ проведено численное решение соответствующей системы уравнений, позволяющее получить вольт-амперную характеристику для коэффициента сбора f, заключенного в интервале $0.18 < f < 1$. Как показано в работе [2], система дифференциальных уравнений, учитывающая действие объемного заряда, имеет один и тот же вид для любой системы электродов с равномерным распределением поверхностного заряда (в частности, для плоской, цилиндрической и сферической геометрии). Поэтому в данной работе для простоты расчет и обсуждение вычислительной процедуры будет проведен на примере плоской геометрии.

Исходная система уравнений, учитывающая рождение и рекомбинацию положительных и отрицательных ионов, в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\frac{\varepsilon}{dx} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}(j - (1 + \mu) I), \qquad \frac{dI}{dx} = 1 + \frac{\lambda}{\varepsilon^2} I (I - f) \tag{1}$$

$$\left(\varepsilon = \sqrt{\frac{K_+}{eqd^2}}\, E, \quad I = \frac{I_-}{eqd}, \quad j = \frac{J}{eqd}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{eK_-}, \quad \mu = \frac{K_+}{K_-}\right)$$

Здесь ε — безразмерное электрическое поле, I — безразмерный ток отрицательных ионов, f — коэффициент сбора, λ и μ — безразмерные параметры задачи, q — интенсивность образования ионов внешним источником, J — полный ток, α — коэффициент рекомбинации ионов, x — безразмерная координата, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ($x = 0$ — катод), K_+ и K_- — подвижность положительных и отрицательных ионов соответственно.

Система (1) решается при следующих граничных условиях:

$$I(0) = 0, \qquad I(1) = f \tag{2}$$

Система (1) совместно с граничными условиями (2) представляет собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Поскольку граничные условия заданы в двух точках, то при численном интегрировании системы в начальной точке $x = 0$ приходится задавать недостающее граничное условие для функции $\varepsilon(x)$. При каждом пробном значении $\varepsilon(0)$ система решается, например, методом Рунге — Кутта, и полученное значение функции $I(x)$ на другом конце отрезка сравнивается с заданным граничным условием. Процесс повторяется до тех пор, пока не выполнится условие $|I(1) - f| < \delta f$, где δ — заранее заданное малое число.

В рассматриваемом случае подобный метод пристрелок требует большого количества машинного времени. Это обусловлено тем, что решение очень чувствительно к малым изменениям величины $\varepsilon(0)$, и поэтому поиск величины $\varepsilon(0)$ должен производиться с достаточно высокой степенью точности. В противном случае решение уходит в область, не соответствующую физическому содержанию задачи. Значительное упрощение достигается путем сведения двухточечной краевой задачи (1), (2) к задаче Коши. Этот метод с успехом применяется при численном решении различных задач гидродинамики [3].

Чтобы преобразовать систему (1), (2) к начальной задаче, введем однопараметрическое преобразование вида

$$\varepsilon = A^{\alpha_1}\varepsilon_1, \quad x = A^{\alpha_3}x_1, \quad I = A^{\alpha_2}I_1, \quad f = A^{\alpha_2}f_1 \tag{3}$$

где A — параметр преобразования, α_1, α_2, α_3 — постоянные, которые должны быть определены. Система (1) в новых переменных принимает вид

$$A^{\alpha_1-\alpha_3}\frac{d\varepsilon_1}{dx_1} = -A^{\alpha_2-\alpha_1}\frac{4\pi}{\varepsilon_1}[f_1 - (1+\mu)I_1] \tag{4}$$
$$A^{\alpha_2-\alpha_3}\frac{dI_1}{dx_1} = 1 - A^{2(\alpha_2-\alpha_1)}\frac{\lambda}{\varepsilon^2_1}I_1(f_1 - I_1)$$

Требование инвариантности системы (1) относительно данной группы преобразований приводит к следующим равенствам для α_1, α_2 и α_3

$$\alpha_1 - \alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_1, \ \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \quad 2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$$

Отсюда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Тогда система (1) принимает вид

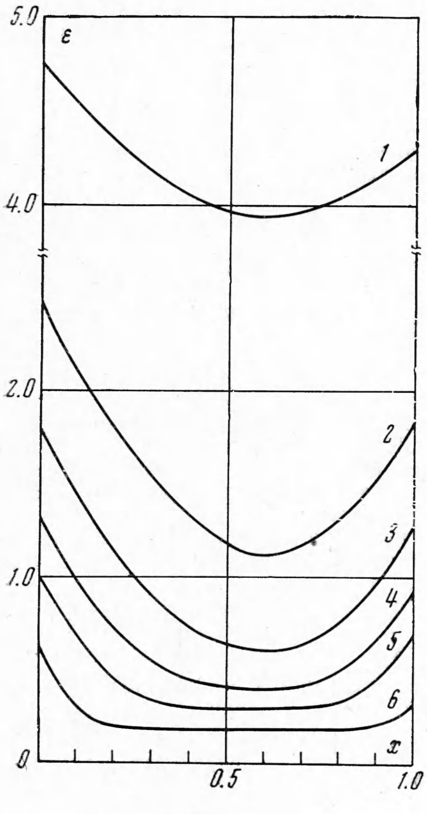
$$\frac{d\varepsilon_1}{dx_1} = -\frac{4\pi}{\varepsilon_1}[f_1 - (1+\mu)I_1], \qquad \frac{dI_1}{dx_1} = 1 - \frac{\lambda I_1}{\varepsilon^2_1}(f_1 - I_1) \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \ I_1(0) = 0 \tag{5}$$

Чтобы получить недостающее условие, положим, например, $\varepsilon(0) = A$. Тогда $A^{\alpha_1}\varepsilon_1(0) = A$. Это граничное условие не зависит от α_1 и A, если $\alpha_1 = 1$. Окончательно граничные условия для системы (5) записываются так:

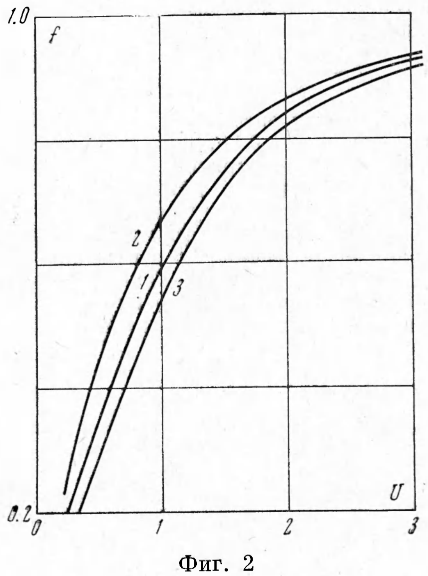
$$I_1(0) = 0, \ \varepsilon_1(0) = 1 \tag{6}$$

Таким образом, система (5) совместно с условиями (6) является эквивалентной задачей Коши. Значение параметра A можно найти из граничного условия на другом конце отрезка, которое в новых переменных имеет вид

$$I_1(x_1 = A^{-1}) = f_1 \tag{7}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Путем численного решения задачи Коши (5), (6) (при фиксированном f_1) с учетом условия (7) определяется параметр A. Зная A, с помощью соотношений (3) находим решение исходной задачи для

$$f = Af_1 \tag{8}$$

Изменяя f_1, можно в принципе получить решение для любого f. Другими словами, сведение исходной задачи к задаче Коши в рассматриваемом случае оправдано тогда, когда необходимо получить решение для коэффициента f, изменяющегося в некотором диапазоне. Таким образом, если в методе пристрелок получение решения для каждого фиксированного значения коэффициента f связано с расчетом большого количества пробных вариантов, то теперь каждый вариант дает решение исходной задачи для f, определяемого равенством (8).

Анализ системы (5) показывает, что не при всяком f_1 может быть найдено решение, удовлетворяющее условию (7). Существует некоторое граничное значение f_1^* такое, что при $f_1 > f_1^*$ решение задачи Коши, удовлетворяющее условию (7), отсутствует.

С другой стороны, при приближении к f_1^* со стороны меньших значений по f_1 можно получить решение для сколь угодно малых значений коэффициента f. Однако при этом параметр f_1 надо задавать с достаточно высокой точностью. В частности, чтобы получить решение исходной задачи для $f \approx 0.3$, необходимо параметр f_1 задать с точностью до седьмого знака. Подобная вычислительная процедура может быть реализована, например, на машине «Минск-22», с использованием стандартной программы Рунге—Кутта. В случае необходимости получения численного решения для $f < 0.3$ можно перейти к алгоритму Рунге—Кутта с удвоенной точностью (применительно к машине «Минск-22» это дает возможность работать с числами, имеющими 16 значащих цифр).

Результаты численного интегрирования системы (1) показаны на фиг. 1 и 2. На фиг. 1 приведены кривые изменения электрического поля в зависимости от координаты при различных значениях коэффициента сбора f ($\mu = 0.65$, $\lambda = 4.33$). Кривым *1—6* соответствуют следующие значения $f = 0.952$, 0.750, 0.550, 0.405, 0.303, 0.181. Отсюда видно, что, например, при $f = 0.181$ кривая может быть аппроксимирована ломаной линией, изменяющейся по линейному закону вблизи электродов. Если проинтегрировать функции $\varepsilon(x)$ при различных f, то можно получить вольт-амперную характеристику в виде зависимости коэффициента сбора от безразмерного напряжения

$$U = \frac{V}{d^2}\sqrt{K_+/eq}$$

На фиг. 2 показана расчетная вольт-амперная характеристика (кривая *1*) и для сравнения приведены вольт-амперные характеристики, полученные по формуле Боуга [4] (кривая *2*)

$$f = 2[1 + (1 + 2\lambda / 3U^2)^{1/2}]^{-1} \tag{9}$$

а также по аппроксимационной формуле работы [2] (кривая *3*), имеющей, очевидно, вид

$$f = \frac{U^2}{2\lambda B}\left[-1 + \sqrt{1 + 4\lambda B U^{-2}}\right] \qquad \left(B = \left(\frac{\mu}{(1+\mu)^2} + \frac{U^2}{\lambda}\right)\left(1 + \frac{6U^2}{\lambda}\right)^{-1}\right) \tag{10}$$

(имея в виду опечатку в формуле (24) работы [2]). Из фиг. 2 видно, что по крайней мере при $\mu = 0.65$, $\lambda = 4.33$ вольт-амперная характеристика Боуга (9) проходит выше расчетной кривой, при этом максимальное относительное отклонение (по отношению к расчетной кривой) для интервала $0.181 < f < 1$ составляет $\sim 30\%$. В противоположность этому формула (10) дает заниженный результат, однако она несколько лучше повторяет форму расчетной кривой в указанном диапазоне для f (максимальное отклонение по отношению к расчетной кривой $\sim 24\%$).

В случае электрон-ионной проводимости численное интегрирование с использованием программы с удвоенной точностью практически не дает возможности получить решение для величины f, заметно отличающейся от единицы.

Поступила 26 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. П о л и к а н о в В. С. Вольт-амперная характеристика ионизированного газа при произвольной геометрии электрического поля. Ж. техн. физ., 1968, т. 38, вып. 12.
2. В о л ь ф Е. М., П о л и к а н о в В. С. К теории электропроводности ионизированного внешним источником газа. Ж. техн. фих., 1969, т. 39, вып. 1.
3. N a T. Y. An initial value method for the solution of a class of nonlinear equations in fluid mechanics. Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engng., 1970, vol. 92, No. 3. (Рус. перев.: Метод преобразования краевой задачи к задаче Коши для некоторого класса нелинейных уравнений гидродинамики. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Д, Теор. основы инж. расчетов, 1970, т. 92, № 3, стр. 99—105).
4. B o a g I. W., W i l s o n T. The saturation curve at high ionization intensity, Brit. J. Appl. Phys., 1952, vol. 3, p. 222.