Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.41
DOI:
10.15372/PS20200204

В.В. Целищев, А.В. Хлебалин

ФОРМАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА В МАТЕМАТИКЕ И КОНЦЕПЦИЯ ПОНИМАНИЯ[1]

Рассматривается популярное в философии математики направление, согласно которому семантические и когнитивные характеристики математического знания могут быть адекватно объяснены посредством анализа математической практики, в частности естественного языка, в рамках которого изначально совершается математическое мышление. На примере анализа концепции Т. Хофвебера, противопоставляющей семантические и синтаксические характеристики естественного и формализованного языков и отводящей последнему исключительно репрезентирующую роль, показана ограниченность такого подхода элементарными разделами арифметики и несостоятельность преуменьшения роли формализованного языка в развитии математического знания.

Ключевые слова: формализованный язык; естественный язык; понимание; семантика; передоказательства теорем

V.V. Tselishchev, A.V. Khlebalin

FORMAL TOOLS IN MATHEMATICS AND THE CONCEPT OF UNDERSTANDING

The article considers a popular trend in the philosophy of mathematics, according to which the semantic and cognitive features of mathematical knowledge can be adequately explained by analyzing mathematical practice, particularly natural language, within which mathematical thinking initially occurs. On the example of the analysis of T. Hofweber's concept, which contrasts the semantic and syntactic characteristics of natural languages and formalized ones and claims an

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-011-00723 А).

exclusively representative role to the latter, we show that this approach is limited by the elementary sections of arithmetic, as well as that underestimation of the role of formalized language in the development of mathematical knowledge is groundless.

Keywords: formalized language; natural language; understanding; semantics; reproving of theorems

Современная философия переживает паузу: былые авторитеты утратили влияние, великие программы потеряли привлекательность, и ощущается дефицит интересных идей. Ричард Рорти констатировал полтора десятка лет назад, что сейчас уже ни Хайдеггер, ни Витгенштейн «не захватывают воображения», а сама философия находится «в ожидании Годо». Это относится не только к континентальной философии, но и к специализированным разделам аналитического направления, в частности, к философии математики. После взлета и падения интереса к «основаниям» – логицизму, интуиционизму и формализму, а также реакции на них, прошло много лет, но исследования в этой области все еще находятся в тени этих великих программ. Все это заставляет новое поколение исследователей искать новые проблемы и новые методы; характерным примером таких поисков могут служить статьи сборника под названием «Новые волны в философии математики», в которых авторы предлагают весьма нестандартные подходы к традиционным проблемам философии математики. Данная статья мотивирована соображениями о том, в какой степени новые идеи оказываются по-настоящему новыми, и представляют ли они настоящий прогресс в понимании математического дискурса. В частности, предметом рассмотрения являются довольно радикальные идеи, представленные в упомянутом выше сборнике статьей Т. Хофвебера о соотношении формального и содержательного в математическом доказательстве [5].

Математический дискурс, связанный с понятием доказательства, имеет две крайние формы – интуитивные рассуждения на естественном языке и формальные доказательства на искусственном языке. Взаимоотношение этих форм в истории математики имеет тенденцию ко все более строгому представлению доказательства, согласующегося на каждом этапе этого процесса с принятыми нормами «строгости». Парадоксальность сосуществования двух таких форм состоит в том, что они почти антагонистичны: интуитивно изложенные доказательства взывают к эффекту «ага», непосредственному постижению сути доказательства, а формальные доказательства основаны на логике, и в идеале должны представлять собой механически устроенный процесс.

Я. Хакинг отмечает две идеальных концепций доказательства, одна из которых принадлежит Декарту, а другая – Лейбницу: «Существуют такие доказательства, что после их изучения и некоторого размышления над ними доказательство полностью принято и приходит на ум «внезапно». Это декартовское понимание. Существуют доказательства, в которых каждый шаг тщательно установлен и может быть проверен, строка за строкой, механическим способом. Это Лейбниц» [2, с. 38].

Представление доказательства в стиле Лейбница является в сущности системой инструкций в отношении того, что делать на каждом шаге. Оно не взывает к озарению, но все-таки будучи доказательством, требует «понимания». Отсюда постановка проблемы взаимоотношений формальных доказательств и их понимания. Поскольку само слово «понимание» является весьма расплывчатым, каждое уточнение упомянутого взаимоотношения имеет дело с разными аспектами математического мышления. В частности, важным аспектом подобного рода является понимание того, в каком смысле компьютерные доказательства вообще являются доказательствами. В других контекстах интересным, хотя и мало обсуждаемым, является вопрос о соотношении естественного языка в математическом дискурсе с формальным языком в представлении доказательств.

В попытках обсуждения таких вопросов обычна такая стратегия. Мы должны понять, каким образом нам становится понятным формальное представление, или другими словами, что позволяет нам считать формальное представление вообще доказательством. «Понимание» призвано сделать формальное доказательство интеллигибельным. Проблема состоит в том, является ли такое понимание чем-то дополнительным, или же в самом формализме заложена возможность усмотрения в доказательстве когнитивной сущности.

Однако существует и другая стратегия, которая состоит в следующем. Формальное доказательство не считается равным интуитивному доказательству, потому что математический дискурс осуществляется на естественном языке. Поскольку синтаксис и семантика естественного языка математики отличается от синтаксиса и семантики формального языка, последний не является адекватным в «схватывании» сущности математического доказательства. Такой подход в определенном смысле является еретическим в контексте распространенной философии математики. Пропагандист такого подхода, Т. Хофвебер, часто говорит о том, что большая часть философов математики привержены такому видению соотношения формального и содержательного в математическом дискурсе, при котором экспликация содержательных концепций математики формальными средствами является не только плодотворной, но попросту необходимой. В этом смысле Хофвебер претендует на серьезное изменение в практике современной философии математики. Такая ревизия в некотором смысле ретроградна в стремлении избавиться от наследия Г. Фреге в трактовке математического дискурса. Еще большее возражение в данной статье связано с попыткой Хофвебера «обосновать» математику в естественном языке, заменив логический анализ апелляцией к исследованиям сознания и языка.

Особенностью подхода Хофвебера является замах на новую философию математики, исходным пунктом которой он считает переоценку важности формальных методов, которые должны занять гораздо меньшее место в рамках философии математики. Мотивация подобного рода подхода обусловлена несколькими факторами разной степени значимости, от предположения об эмпирической природе традиционных концептуальных вопросов в философии математики до практически полной ревизии этой самой дисциплины. При этом сам автор признает иконоборческий характер своих усилий, говоря, что с ними не согласится б*о*льшая часть философов математики. Это вполне понятная ситуация, потому что Хофвебер отрицает значимость усилий Г. Фреге уже в анализе понятия числа.

Основой столь значимого шага является анализ математической практики, или математической активности. Хофвебер предполагает, что эта активность протекает в среде естественного языка, синтаксис и семантика которого радикально отличается от синтаксиса и семантики формальных языков. В частности, самый распространенный формальный язык, используемый в математике, это логика первого порядка. Различие естественного языка и формального языка (синтаксиса и семантики) иллюстрируется на примерах синтаксиса, употребления числовых слов и кванторов. Деталей этого различия мы здесь не касаемся.

В чем плох, с точки зрения Хофвебера, синтаксис логики первого порядка? Оказывается, он не схватывает настоящего синтаксиса языка математики. Ясно, что в основе такого представления лежит весьма важная посылка, от которой зависит очень многое. Поскольку реальная математическая практика протекает в среде естественного языка, или по крайней мере, части его, вся концептуальная часть математики зиждется именно в этой среде. Но эта среда изучается лингвистикой, и многие ее аспекты имеют эмпирический характер. Это означает полное обращение стратегии философии математики, по крайней мере, усилий Фреге: он изобретает формальный язык для уточнения концептуальных черт математического мышления, в то время как Хофвебер утверждает, что не следует предпринимать попытки понять синтаксис обыденного языка, исходя из синтаксиса языка первого порядка.

Язык логики первого порядка не может быть адекватным средством обсуждения природы натуральных чисел по причине несовершенного синтаксиса и семантики. Несовершенство заключается в сильном отклонении от естественного языка, в среде которого и совершается собственно математическое мышление. В этом смысле вся традиция философии математики начиная с Фреге и Рассела и кончая Геделем, по мысли Хофвебера, идет в неверном направлении. Таким образом, его обсуждение касается не только частностей несовпадения синтаксиса и семантики естественного и формального языков, а представляет собой более глобальную программу.

В рамках этой предполагаемой программы Хофвебер перекраивает карту философии математики. Он различает исследования, мотивированные поиском оснований математики, и т.н. масштабные проекты в философии математики. В этой с первого взгляда странной классификации отражаются давно идущие разговоры о том, что грандиозные программы поиска оснований исчерпали себя, и для продолжения философии математики требуются новые темы, то, что называется Хофвебером масштабными проектами. Свой проект он как раз причисляет к масштабным. Стратегия, основанная на приоритете естественного языка над формальным, состоит в анализе того, какую роль могут играть формальные средства в масштабных проектах. Как и можно было ожидать, конечная цель заключается в принижении этой роли.

До сих пор считалось, что значимость программ в философии математики зависит от важных технических результатов. Такой программой, например, является программа Гильберта доказательства непротиворечивости арифметики финитными средствами. Хофвебер замечает, что если бы такая программа осуществилась, тогда она была бы по-настоящему масштабной. Это довольно спорное заключение ничем особо не подтверждается, и мотивировано разве что с целью отличения существенных результатов от несущественных. Последние характерны тем, что служат лишь репрезентацией уже достигнутых результатов в математике. Почти в том же духе математиком Ж.-К. Рота было язвительно замечено, что использование в философии математических символов равносильно оплате реальных покупок деньгами из игры «Монополия» [7]. Но Хофвебер признает, что иногда мы имеем дело с существенным использованием формальных средств, когда без них просто не обойтись. Проблема, конечно, состоит в том, как различить существенное от несущественного на практике.

Для этой цели Хофвебером различаются два проекта использования формальных средств – ревизионный и дескриптивный. В первом формальным средствам отдается приоритет в философии математики, и в предельном случае, математика должна быть заменена дисциплиной, полностью опирающейся на формальные языки. В противоположность этому, дескриптивный проект направлен на понимание природы математики и математической активности с философской точки зрения. Далее, в отличие от ревизионного проекта, который требует ревизии того, как «делать» математику (например, в случае конструктивной математики), дескриптивный проект опирается на т.н. «понимание», которое отсутствует при использовании формальных средств. Точнее, понимание является частью масштабного философского проекта.

Таким образом, происходит формирование каркаса понятий, нужных Хофвеберу для того, чтобы направить философию математики от проблем, связанных с формальными средствами, к проблемам самой математической активности, осуществляемой в среде естественного языка. Важным обстоятельством в этом случае является то, что математическая активность взывает к эмпирическому подходу в своем изучении. Очень интересным с этой точки зрения является иллюстрация с фикционализмом, например в версии С. Ябло [9]. Фикционализм, конечно же, является чисто спекулятивным философским подходом, уподобляя математику вымыслу, «как будто правдивой истории». Философия тут проявляется в том, что это номиналистическая программа, и как всякий хороший вымысел, он «пытается» быть непротиворечивым. И то, и другое являются добродетелями в философии математики. Но как отмечает Хофвебер, вымысел требует определенного притворства со стороны нарратора, а такая установка требует изучения уже эмпирическими средствами. И тогда мы приходим к требуемому заключению: подлинная философия математики должна быть близкой к эмпиризму, и все вопросы о понимании не являются концептуальными. Понимание есть часть математической активности, в которой формальные методы занимают весьма скромное место, если не сопровождаются «пониманием».

Понимание, с точки зрения Хофвебера, является неотъемлемой частью естественного языка. В этом контексте употребление «числовых слов» (что является важнейшей частью математической активности) является предметом лингвистического анализа семантической структуры арифметических предложений, сформулированных на естественном языке. Но контексты с употреблением «числовых слов» могут относиться только к самым простым разделам арифметики. Трудно представить себе, что анализ математического дискурса, основанный на лингвистике, может быть перенесен на теорию множеств или дифференциальное и интегральное исчисления. Фактически, элементарная арифметика имеет дело с конечными совокупностями, в то время как «высшая» математика имеет дело с бесконечностью.

Хофвебер на такое возражение мог бы ответить следующим образом. Он полагает, что числовые слова не являются указательными, и поэтому могут употребляться независимо от размера области математических сущностей. В этом смысле его аргументация напоминает защиту С. Крипке подстановочной квантификации [6]. Но признание за числовыми словами статуса полностью лингвистических сущностей означает гораздо большее, чем то, на что готов сам Хофвебер. У него совсем другая программа: он полагает, что содержащейся в ней анализ числовых утверждений может быть защищен исключительно на основе лингвистических соображений. Другими словами, Хофвебер предлагает исследовательскую программу, направленную на создание лингвистически обоснованной философии арифметики. Если проект увенчается успехом, он претендует на четкие ответы на давние философские вопросы. Но стоит иметь в виду, что методология Хофвебера может обойтись дорого ввиду трудностей объединения философии математики и семантики естественного языка [8, p. 7].

Противопоставление формального языка и естественного языка в философии математики требует большего, чем убеждение, что вся математическая активность сводится к размышлению в естественном языке. Эта точка зрения никак не объясняет непрерывного в ходе истории математики процесса передоказательства теорем и все большего усиления строгости доказательства с помощью формальных языков. Другими словами, требуется большее обоснование «ущербности» формальных средств по сравнению с естественным языком, и для этого одного лишь желания обойтись в анализе математического мышления только лингвистикой недостаточно.

Хофвебер выходит из этого затруднительного положения, объявляя формальные средства все-таки полезными за счет того, что структура выводов взаимосвязанных утверждений в обоих языках является изоморфной. Точнее, структуры следствия в естественном языке достаточно точно схватываются аналогичными структурами в формальном языке. И это несмотря на то, что синтаксис и семантика математического дискурса формальном языке неадекватны «реальным» синтаксису и семантике формального языка. Реальным в том смысле, что реальное математическое мышление осуществляется в естественном языке. Такой изоморфизм выглядит в проекте Хофвебера просто удачей, контингентным обстоятельством, которое не следует переоценивать как важное эпистемологическое обстоятельство.

Проект Хофвебера задуман как манифестация «новой волны» в философии математики, отличия которой от традиционных исследований состоит в радикальных предположениях о природе математического мышления. Действительно, объявление философии математики предметом лингвистических теорий, и к тому же эмпирических по своему характеру, является по-настоящему радикальным шагом. Однако такая стратегия выглядит не очень убедительной, поскольку она включает трактовку лишь самых элементарных частей математического размышления, а именно, употребления числовых слов. Если же речь идет о важнейшей особенности современной математики, то нельзя избежать разговора об аксиоматическом методе, который более всего близок к формальным средствам. Так что попытка считать естественный язык «естественной» средой математического мышления в противопоставлении его формальным средствам является недостаточной, если не принять во внимание статус аксиом. Сам Хофвебер чувствует это, переходя, достаточно непоследовательно, к объяснению того, почему аксиоматический метод никоим образом не усиливает важности формальных средств.

Он начинает с довольно известного различения двух типов аксиом, один из которых призван «схватывать» объективную математическую реальность, как это имеет место в теории множеств, а другой призван задавать эту самую «реальность», как это имеет место в алгебре. Заметим, что употребление слова «реальность» никоим образом не подразумевает онтологических или даже эпистемологических вопросов. Речь идет о способе порождения математических истин, независимо философских концепций математики – платонизма или номинализма. Два типа аксиом именуются у Хофвебера дескриптивными и конститутативными. Предполагается, что первые могут потерпеть неудачу в схватывании законов области математических объектов, в то время как вторые полностью определяют эту самую область. Аксиомы обоих типов полагаются истинными, но по разным причинам: дескриптивные имеют дело с открытием математических истин, а конститутативные – с их изобретением. Или, как предпочитает сам Хофвебер, для случая дескриптивных аксиом математические факты предшествуют аксиомам, а для конституирующих – аксиомы предшествуют фактам [5, p. 211]. Для большего понимания приведенного различения упомянем, что, скажем, аксиомы Пеано являются дескриптивными, а аксиомы в стили «Начал» Н. Бурбаки – конститутативными.

После такого различения возможно возвращение к вопросу о статусе формальных средств в математическом мышлении, поскольку именно конститутативная аксиоматика играет большую роль в масштабном философском проекте. Это исследование следствий аксиом безотносительно к фактам. Наличие фактов обнаруживается в установлении таких утверждений, которые не зависят от аксиом. В случае дескриптивных аксиом истины о математической реальности не имеют прямой связи с аксиомами. Такое положение дел подразумевает, хотя Хофвебер не говорит об этом прямо, что факты есть часть математического мышления на естественном языке, в то время как аксиомы предполагают формальный уровень.

Различию в типах аксиоматики, которое в общем-то является общим местом в философии математики, Хофвебер придает новый уклон, полагая это самое различие причиной разделения всей математики на различные части. В качестве примера он приводит финитизм Гильберта, согласно которому есть реальная математика и идеальная математика. Другим примером является разделение С. Феферманом математики предикативной и непредикативной. Эти разделения являются если не следствием различения типов аксиоматики, то по крайней мере тесно связанными с ним. И поскольку конститутативная аксиоматика ассоциируется с формальными средствами, она приобретает, наконец-то, у Хофвебера важную роль.

Важным пунктом решения проблемы в данном случае является возможная противоречивость системы аксиом. Для дескриптивной аксиоматики такая противоречивость будет означать просто то, что аксиомы не сумели «схватить» факты из соответствующей области математики. Для конститутативной аксиоматики противоречивость означает более радикальную вещь – отсутствие самой области. Почти афористически, Хофвебер утверждает, что «противоречивость аксиом в дескриптивном случае интересна, но в случае конститутативных аксиом – это дело выживания области». Поскольку установление непротиворечивости является делом формальной техники, скажем, в логике первого порядка с ее точным понятием логического следования, утверждение о непротиворечивости, установленное с математической точностью, само становится математическим утверждением. Для философии математики это известное, почти банальное обстоятельство в рамках метаматематики, сопровождаемое известной второй теоремой Геделя о неполноте арифметики. Поначалу не очень понятно, зачем Хофвебер вообще останавливается на нем. Однако он приберегает его для более радикального вывода. Этот вывод состоит в неадекватности формальных средств в математическом мышлении по сравнению с естественным языком. То есть, Хофвебер приводит еще один, в дополнение к изложенному выше, аргумент о том, что реальное математическое мышление происходит в естественном языке, которому стоит отдать приоритет на «новой волне философии математики».

Суть аргумента, который вообще-то фундаментально ошибочен, состоит в следующем. Непротиворечивость конститутативной системы аксиом некоторой области математики доказывается математическими средствами. Но сами эти математические средства представлены другой аксиоматической системой, и встает вопрос, если эта система конститутативна, является ли она непротиворечивой. Таким образом, непротиворечивость первой системы зависит от непротиворечивости второй системы, и т.д. Это лишает нас твердого основания, на котором зиждется в конечном счете предположение о непротиворечивости всей математики. Действительно, утверждение непротиворечивости самих аксиом будет утверждением в области, не собственно установленной, и таким образом, сама непротиворечивость будет сомнительной. Она будет сомнительной не просто в отношении истинностного значения, но также в отношении того, можно ли вообще делать непротиворечивые утверждения. Такая история происходит в случае конститутативной аксиоматики, ассоциированной с формальными средствами. Очевидно, что ситуация с дескриптивной аксиоматикой, ассоциированной в свою очередь с математическим мышлением в естественном языке, более понятна. Другими словами, глобальное заключение Хофвебера состоит в том, что невозможно говорить о непротиворечивости определенной области математики, используя формальные средства.

Ошибочность вышеизложенного аргумента связана с полным игнорированием собственно метаматематики. Верно, что метаматематика является областью математики, но методы метаматематики весьма специфичны для того, чтобы говорить о «дурной» последовательности аксиоматических систем, каждая из которых служит основанием для другой. На самом деле, при разговоре о возможности доказательства непротиворечивости используется сложная процедура кодирования синтаксических структур арифметическими средствами, или же геделевская нумерация, а также самореферентность математических утверждений, которая обрывает предполагаемую Хофвебером «дурную» цепь аксиоматических систем. Он пытается избежать этого заключения, предполагая, что цепь может быть оборвана наличием дескриптивной аксиоматической системы элементарной арифметики. Если же эта часть математики имеет конститутативную аксиоматику, тогда дело с непротиворечивостью вновь плохо. А поскольку элементарная арифметика по Хофвеберу есть понимание синтаксиса и семантики естественного языка, сам разговор о вполне-определенной математической области объектов возможен только с использованием естественного языка.

В этом смысле элементарная арифметика является выделенной в качестве основания для всех остальных математических дисциплин, которые имеют конститутативную аксиоматику. Арифметика в этом смысле является наукой об области математических фактов, не имеющая конститутативных аксиом. Сам Хофвебер признает, что не знает, сколько философов принимают эту картину. К тому же он не знает, какая часть остальной математики имеет конститутативную аксиоматику. Для уверенности в непротиворечивости всей математики можно надеяться лишь на непротиворечивость формальной системы Арифметика Пеано. Но она, согласно теореме Геделя, не может быть доказана средствами самой этой системы. Остается надежда получения такого доказательства при использовании более мощных разделов математики, в которых интуитивные соображения играют значительную роль.

Как видно, несколько «заходов» Хофвебера в демонстрации приоритета, имеют определенную цель, а именно, показать, что формальные средства являются источником ошибок в «новой философии математики»: «Когда наступает очередь понимания математической активности и математического языка, формальные средства имеют второстепенное значение, репрезентационную роль. Они в лучшем случае используются для репрезентации результатов, установленных другими средствами. Это становится особенно ясным при попытке понять семантическую функцию числовых слов, которые традиционно понимаются как указательные, в соответствии с их трактовкой в формальных теориях арифметики. И это несмотря на то, что в обыденном математическом дискурсе они имеют другую семантическую функцию. И эта функция устанавливается эмпирическими средствами, при изучении ума и языка. Формальные средства могут репрезентировать эти результаты, но не инспирировать их» [5, p. 217].

Это заключение Хофвебера, наконец, выдает его полный замысел: трактовать философию математики как раздел философии ума и языка. В определенном смысле это близко к тем фрагментарным замечаниям, которые можно найти у Витгенштейна в его «Замечаниях» [1]. Однако усилия Хофвебера направлены на то, чтобы присоединиться к традиции в философии математики, согласно которой арифметические утверждения являются нейтральными в отношении онтологии, когда арифметические термины не лишены указательных функций. Такой трактовки арифметики придерживаются ныне ряд философов [см. 3 и 4]. Однако, по сравнению с аргументами этих авторов, аргументация Хофвебера весьма бедна техническими деталями. Полагаясь на различие синтаксиса и семантики «числовых слов» в естественном языке, а также синтаксиса и семантики числовых терминов в формальных языках, он пытается аппроксимировать эти различия слишком далеко. Понимание математического дискурса, с его точки зрения, возможно только в естественном языке. Но это никак не приближает нас к тому, какую роль играет понимание в математических доказательствах. Дело заключается не в том, что математическая логика задала свои стандарты доказательства (скажем, с использованием языка первого порядка), а в объяснение того, что приобретается в лучшем понимании передоказательств уже доказанных теорем.

Литература

1. *Витгенштейн Л.* Замечания по основаниям математики // Витгенштейн Л. Философские работы. – М.: Гнозис, 1994. – Ч. II.

2. *Хакинг Я.* Почему вообще существует философия математики? – М.: Канон+, 2020.

3. *Hodes H.T.* Logicism and the ontological commitments of arithmetic // Journal of Philosophy. – 1984. – No. 81 (3). – P. 123–149.

4. *Hellman G.* Mathematics Without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation. – Oxford University Press, 1989.

5. *Hofweber T.* Formal tools and the philosophy of mathematics // New Ways in the Philosophy of Mathematics / Ed. by O. Bueno & O.L. Linnebo. – Palgrave MacMillan, 2009. – P. 197–219.

6. *Kripke S.* Is there a problem about substitutional quantification? // Truth and Meaning / Ed. by G. Evans & J. McDowell. – Oxford: Clarendon Press, 1976. – P. 325–419.

7. *Rota G.K.* The pernicious influence of mathematics upon philosophy // Synthese. – 1991. – Vol. 88. – P. 165–178.

8. *Rayo A.* Hofweber's Philosophy of Mathematics. – URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/phpr.12388 (дата обращения: 05.04.2020).

9. *Yablo S.* The myth of the seven // Fictionalism in Metaphysics / Ed. by M. Kalderon. – Oxford: Oxford Unoversity Press, 2005. – P. 88–115.

References

1. *Wittgenstein, L.* (1994). Zamechaniya po osnovaniyam matematiki [Remarks on the Foundations of Mathematics], part II. Moscow, Gnozis Publ. (In Russ.).

2. *Hacking, I.* (2020). Pochemu voobshche sushchestvuet filosofiya matematiki? [Why Is There Philosophy of Mathematics At All?]. Moscow, Kanon+ Publ. (In Russ.).

3. *Hellman, G.* (1989). Mathematics Without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation. Oxford University Press.

4. *Hodes, H.T.* (1984). Logicism and the ontological commitments of arithmetic. Journal of Philosophy, 81 (3), 123–149.

5. *Hofweber, T.* (2009). Formal tools and the philosophy of mathematics. In: Bueno, O. & O.L. Linnebo (Eds.). New Ways in the Philosophy of Mathematics. Palgrave MacMillan, 197–219.

6. *Kripke, S.* (1976). Is there a problem about substitutional quantification? In: Evans, G. & J. McDowell (Eds.). Truth and Meaning. Oxford, Clarendon Press, 325–419.

7. *Rota, G.K.* (1991). The pernicious influence of mathematics upon philosophy. Synthese, 88, 165–178.

8. *Rayo, A.* Hofweber's Philosophy of Mathematics. – Available at: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/phpr.12388 (date of access: 05.04.2020).

9. *Yablo, S.* (2005). The myth of the seven. In: Kalderon, M. (Ed.). Fictionalism in Metaphysics. Oxford, Oxford University Press, 88–115.

Информация об авторах

Целищев Виталий Валентинович – доктор философских наук, профессор, кафедра гносеологии и истории философии Новосибирского национального исследовательского государственного университета (630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2); научный руководитель Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).

leitval@gmail.com.

Хлебалин Александр Валерьевич – кандидат философских наук, старший научный сотрудник Институт философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8)

sasha_khl@mail.ru.

Information about the authors

Tselishchev Vitaliy Valentinovich – Doctor of Sciences (Philosophy), Professor, the Department of Gnoseology and History of Philosophy at Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia); Scientific Director at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia),
leitval@gmail.com.

Khlebalin Aleksandr Valerievich – Candidate of Sciences (Philosophy), Researcher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Akademy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090 Russia),
sasha_khl@mail.ru

Дата поступления 05.03.2020