

УДК 532.511+517.9

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Е. Ю. Мещерякова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается частично инвариантное решение уравнений Эйлера, в котором вертикальная компонента скорости является функцией вертикальной координаты и времени, в то время как остальные компоненты скорости и давление не зависят от полярного угла в цилиндрической системе координат. С использованием классификации уравнений, полученных путем анализа переопределенной системы, рассмотрены две системы гиперболического типа, первая из которых описывает движение цилиндрического слоя идеальной несжимаемой жидкости под штампом, а вторая позволяет получить решения в полуцилиндре с особенностями на оси симметрии. Получен класс новых точных решений, описывающих вихревые движения идеальной несжимаемой жидкости, в том числе движения с особенностями (вихреисточниками), расположенными вдоль оси симметрии.

**1. Новый класс точных решений.** Рассмотрим систему уравнений Эйлера, описывающую движение идеальной несжимаемой жидкости:

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p = 0, \quad \nabla \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости;  $p$  — давление;  $t$  — время;  $\nabla$  — градиент по пространственным переменным  $x_1, x_2, x_3$ . Без потери общности плотность жидкости считаем равной единице.

Групповые свойства системы (1.1) изучены в [1]. Эта система уравнений допускает бесконечномерную псевдогруппу Ли  $PG$ , порожденную операторами

$$\begin{aligned} Z_1 &= t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, & Z_2 &= -t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial v_i} + 2p \frac{\partial}{\partial p}, \\ X_{kl} &= x_l \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_l} + v_l \frac{\partial}{\partial v_k} - v_k \frac{\partial}{\partial v_l} \quad (k = 1, 2, 3; l = 1, 2; l < k), & X_0 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \Phi &= \varphi(t) \frac{\partial}{\partial p}, & \Psi_k &= \psi_k(t) \frac{\partial}{\partial x_k} + \dot{\psi}_k(t) \frac{\partial}{\partial v_k} - x_k \ddot{\psi}_k(t) \frac{\partial}{\partial p} \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.2)$$

В настоящее время изучено много инвариантных решений, отвечающих группе  $PG$ . Частично инвариантное решение для (1.1) получено в [2]. Другой пример частично инвариантного решения приведен в [3]. В основе данной работы лежит работа [3], поэтому ниже кратко изложены ее результаты.

В [3] рассмотрено частично инвариантное решение уравнений Эйлера, порожденное шестипараметрической группой Ли  $G_6 \subset PG$ , допускаемой системой (1.1). Группа  $G_6$  выбиралась следующим образом. Для  $\psi_k = 1$  и  $\psi_k = t$  в (1.2) получены операторы

$X_k = \partial/\partial x_k$ ,  $Y_k = t\partial/\partial x_k + \partial/\partial v_k$  соответственно. Выбранная группа  $G_6 \subset PG$  порождена операторами  $X_1, X_2, Y_1, Y_2, X_{12}, P = \partial/\partial p$ . Инвариантами этой группы являются  $x_3, t, v_3$ . В этом случае инвариантное решение построить невозможно, так как не выполняются необходимые условия его существования. Для построения частично инвариантного решения система (1.1) записана в цилиндрических координатах  $\{r, \theta, z\}$ . Проекция вектора скорости  $\mathbf{v}$  на соответствующие оси обозначены  $u, v, w$ . Согласно универсальному алгоритму построения частично инвариантных решений (см. [4]) вертикальная компонента скорости  $w$  является функцией двух переменных — вертикальной координаты  $z$  и времени  $t$ , в то время как две другие компоненты скорости  $u, v$  и давление  $p$  не зависят от полярного угла  $\theta$ :

$$w = w(z, t), \quad u = u(r, z, t), \quad v = v(r, z, t), \quad p = p(r, z, t). \quad (1.3)$$

Любое частично инвариантное решение характеризуется рангом и дефектом. В данном случае ранг (число инвариантных независимых переменных) равен 2, а дефект (число искомых функций, не имеющих представления через инварианты) равен 3.

Подставляя (1.3) в систему (1.1), записанную в цилиндрических координатах, получим систему

$$\begin{aligned} u_t + uu_r + wu_z - r^{-1}v^2 + p_r &= 0, & v_t + uv_r + wv_z + r^{-1}uv &= 0, \\ w_t + ww_z + p_z &= 0, & u_r + r^{-1}u + w_z &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

из последнего уравнения которой путем интегрирования ( $w_z = 0$ ) легко получить функцию

$$u = -rw_z/2 + q/r, \quad (1.5)$$

где  $q(z, t)$  — новая неизвестная функция.

Из анализа переопределенной системы получено также уравнение

$$r^2(a_t + wa_z - 2w_za) + r^2s_t - r^2w_z(rs_r + 4s)/2 + b_t + wb_z - w_zb + 4qa + q(rs_r + 4s) = 0. \quad (1.6)$$

Здесь

$$a = -w_{zt}/2 - ww_{zz}/2 + w_z^2/4, \quad b = q_t + wq_z, \quad (1.7)$$

функция  $s(r, t)$  подлежит определению. Если функции  $w, q, s$  найдены, то давление  $p$  вычисляется по формуле

$$p = -\frac{1}{2}w^2 - \int_0^z w_t(\zeta, t) d\zeta + \int_{r_0}^r \rho s(\rho, t) d\rho + \varkappa(t),$$

где  $r_0$  — константа;  $\varkappa(t)$  — произвольная функция времени. Из полученной переопределенной системы можно найти также компоненту скорости  $v$ :

$$v = r^{-1}[r^4(a + s) + r^2b - q^2]^{1/2}. \quad (1.8)$$

При анализе соотношения (1.6) следует различать случаи  $w_{zz} \neq 0$  и  $w_{zz} = 0$ . В случае  $w_{zz} = 0$  можно считать, что  $w = \lambda(t)z$  (без потери общности считаем аддитивную функцию времени равной нулю в силу инвариантности системы относительно оператора  $\Psi_3$ ). В случае  $w = \lambda(t)z$  функция  $a$  зависит только от времени:  $a = -\lambda/2 + \lambda^2/4$ , и уравнение (1.6) принимает вид

$$r^2(\dot{a} - 2\lambda a) + r^2s_t - r^2\lambda(rs_r + 4s)/2 + b_t + \lambda zb_z - \lambda b + q(rs_r + 4s + 4a) = 0. \quad (1.9)$$

Далее вновь необходимо исследовать два случая:  $q_z = 0$  и  $q_z \neq 0$ . В случае  $q_z = 0$  имеем уравнение, из которого следуют достаточно простые уравнения для функций  $u$  и  $w$  и уравнение для функции  $s(r, t)$

$$r^2s_t + (q - r^2\lambda/2)(rs_r + 4s) + r^2(\dot{a} - 2\lambda a) + \ddot{q} - \lambda\dot{q} + 4aq = 0.$$

Здесь  $\lambda(t)$ ,  $q(t)$  — произвольные функции времени;  $a(t)$  определяется по формуле (1.7). Однако для случая

$$\lambda = k/(1 + kt), \quad (1.10)$$

где  $k = \text{const}$ , выполняются условия на свободной поверхности, поэтому этот случай рассмотрен отдельно в п. 4, в котором получены решения задачи о движении жидкости под штампом.

Если  $q_z \neq 0$ , то из (1.9) следует простое выражение

$$s = \chi(t) + Kr^{-4}, \quad (1.11)$$

где  $\chi(t)$  — произвольная функция времени;  $K = \text{const}$ . Однако в этом случае точные решения имеют более сложный вид. С точностью до сохраняющего систему (1.4) преобразования Андреева — Родионова (см. [5])  $u' = u$ ,  $v'^2 = v^2 - 2c/r^2$ ,  $w' = w$ ,  $p' = p + c/r^2$  при  $c = K/2$  можно считать  $K = 0$ .

Наиболее сложное поле скоростей получается в общем случае  $w_{zz} \neq 0$ . Для исследования этого случая нелинейная фактор-система

$$a_t + wa_z - 2aw_z - 2\chi w_z + \dot{\chi} = 0, \quad b_t + wb_z - w_z b + 4q(a + \chi) = 0,$$

где  $a$ ,  $b$  определяются по формулам (1.7);  $\dot{\chi} = d\chi/dt$ , сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям путем перехода к лагранжевым координатам  $\zeta$ ,  $t$ . Для заданной функции  $w$  связь между  $\zeta$  и  $z$  устанавливается из решения задачи Коши

$$\frac{dz}{dt} = w(z, t), \quad z = \zeta \quad \text{при } t = 0. \quad (1.12)$$

Новые неизвестные функции определяются по формулам

$$F(\zeta, t) = -w_z/2, \quad A(\zeta, t) = a, \quad Q(\zeta, t) = q, \quad B(\zeta, t) = b,$$

где аргумент  $z(\zeta, t)$  функций  $w_z$ ,  $a$ ,  $q$ ,  $b$  является решением задачи (1.12). В результате получается две системы, причем вторая система решается, если известно решение первой:

$$F_t + F^2 - A = 0, \quad A_t + 4F(A + \chi) + \dot{\chi} = 0; \quad (1.13)$$

$$Q_t - B = 0, \quad B_t + 2FB + 4(A + \chi)Q = 0. \quad (1.14)$$

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1.13), (1.14) поставлена задача Коши

$$F = F_0(\zeta), \quad A = A_0(\zeta) \quad \text{при } t = 0; \quad (1.15)$$

$$Q = Q_0(\zeta), \quad B = B_0(\zeta) \quad \text{при } t = 0. \quad (1.16)$$

Решив (1.13)–(1.16), получим широкий класс новых точных решений уравнений Эйлера, который описывает вихревое движение идеальной несжимаемой жидкости, в том числе движения с особенностями.

Следует также рассмотреть частный случай  $v = 0$ . В этом случае вместо уравнения (1.6) получим уравнение

$$r^2 a + r^2 s + b - q^2/r^2 = 0. \quad (1.17)$$

Поскольку функция  $s$  не зависит от  $z$ , из (1.17) следует, что  $q = q(t)$ ,  $a = -\chi(t)$ , откуда получается выражение  $s = \chi - \dot{q}/r^2 + q^2/r^4$ . В этом случае уравнение (1.17) сводится к уравнению Риккати. Заметим, что хотя этот случай описывает движение без закрутки ( $v = 0$ ), с помощью преобразования Андреева — Родионова (см. [5]) можно добавить закрутку:  $v' = c/r$ , где  $c$  — константа.

**2. Линеаризация.** Кратко изложим результаты, полученные в [6]. Рассмотрим систему (1.13) и покажем, что она может быть линеаризована. Прежде всего заметим, что функция  $A + \chi$  для любого значения  $\zeta$  знакоопределена. Полагая  $A + \chi \leq 0$ , введем новую функцию  $A + \chi = -G^2$  и запишем (1.13) в виде

$$F_t + F^2 + G^2 + \chi = 0, \quad G_t + 2FG = 0.$$

Ясно, что функции  $F + G = C$ ,  $F - G = D$  удовлетворяют уравнениям Риккати

$$C_t + C^2 + \chi = 0, \quad D_t + D^2 + \chi = 0. \quad (2.1)$$

После подстановки  $C = \rho_t/\rho$ ,  $D = \sigma_t/\sigma$  уравнения (2.1) сводятся к следующим линейным уравнениям:

$$\rho_{tt} + \chi\rho = 0, \quad \sigma_{tt} + \chi\sigma = 0. \quad (2.2)$$

Если положить

$$\rho = 1, \quad \rho_t = F_0(\zeta) + G_0(\zeta), \quad \sigma = 1, \quad \sigma_t = F_0(\zeta) - G_0(\zeta) \quad \text{при } t = 0, \quad (2.3)$$

то начальные данные (1.15) будут выполнены (здесь  $G_0 = [-(A_0 + \chi_0)]^{1/2}$ ,  $\chi_0 = \chi(0)$ ).

Положим  $A + \chi \geq 0$ . В этом случае после подстановки  $A + \chi = G^2$  система (1.13) приводится к виду

$$F_t + F^2 - G^2 + \chi = 0, \quad G_t + 2FG = 0. \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что комплекснозначная функция  $F + iG = H$  удовлетворяет уравнению Риккати  $H_t + H^2 + \chi = 0$ , которое после подстановки

$$H = \mu_t/\mu \quad (2.5)$$

сводится к линейному уравнению

$$\mu_{tt} + \chi\mu = 0. \quad (2.6)$$

Начальные данные для (2.6) в силу (1.15) имеют вид

$$\mu = 1, \quad \mu_t = F_0(\zeta) + iG_0(\zeta) \quad \text{при } t = 0, \quad (2.7)$$

где  $G_0 = (A_0 + \chi_0)^{1/2}$ .

Если функция  $F(\zeta, t)$  найдена, то функция  $w(z, t)$  определяется соотношениями (см. [3, 6])

$$z = \int_0^\zeta \exp\left(-2 \int_0^t F(\eta, \tau) d\tau\right) d\eta + z_0(t), \quad (2.8)$$

$$w = -2 \int_0^\zeta F(\eta, t) \exp\left(-2 \int_0^t F(\eta, \tau) d\tau\right) d\eta + \dot{z}_0(t).$$

Здесь  $z_0 = z(0, t)$  — произвольная функция, которая может быть найдена из дополнительного условия. Например,  $z_0 = 0$ , если течение жидкости симметрично относительно  $z = 0$ . Заметим также, что  $z_\zeta$  выражается через решения задач (2.2), (2.3) и (2.6), (2.7):

$$z_\zeta = 1/|\rho\sigma| \quad \text{при } A + \chi < 0, \quad z_\zeta = 1/|\mu|^2 \quad \text{при } A + \chi > 0. \quad (2.9)$$

**3. Движение в полубесконечном цилиндре с особенностями на оси симметрии.** Задача о вращательно-симметричном движении идеальной несжимаемой жидкости

в полуцилиндре рассмотрена в [6]. Приведем основные результаты, полученные в [6] для задачи в полубесконечном цилиндре с особенностями на оси симметрии.

Положим  $\chi = \text{const}$ . В этом случае система (1.14) имеет семейство решений  $Q = -R^2 F$ ,  $B = R^2(F^2 - A)$ , где  $R = \text{const} > 0$ ; функции  $F$ ,  $A$  удовлетворяют системе (1.13). Согласно (1.5) для этих решений  $u = -(r - R^2 r^{-1})w_z/2$ , так что

$$u = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad t > 0. \quad (3.1)$$

Это означает, что цилиндрическая поверхность  $r = R$  является твердой стенкой.

Пусть  $F_0(\zeta)$ ,  $A_0(\zeta)$  — четные функции. Тогда функции  $F(\zeta, t)$ ,  $A(\zeta, t)$ , являющиеся решением задачи (1.13), (1.15), также четные по  $\zeta$ . Полагая в формулах (2.8)  $z_0 \equiv 0$ , получим нечетную по  $z$  функцию  $w(z, t)$ . Отсюда

$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad t > 0. \quad (3.2)$$

Таким образом, рассматриваемое решение удовлетворяет условию непротекания на основании полуцилиндра  $S_R = \{(r, z): 0 < r < R, z > 0\}$ .

В силу (1.5), (1.8), (1.15), (1.16), (2.8) и принятых предположений относительно функций  $Q$  и  $B$  начальные данные для функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$  имеют вид

$$u = (r - R^2 r^{-1})F_0(z), \quad w = -2 \int_0^z F_0(\zeta) d\zeta, \quad (3.3)$$

$$v = r^{-1} \{r^4(A_0(z) + \chi) - R^2 r^2(A_0(z) - F_0^2(z)) + K - R^4 F_0^2(z)\}^{1/2}.$$

Требование неотрицательности выражения в фигурных скобках для  $(r, z) \in S_R$  накладывает ограничения на функции  $F_0$ ,  $A_0$  и параметры  $R$ ,  $\chi$ ,  $K$ . В частности, необходимыми условиями неотрицательности являются  $K \geq R^4 F_0^2(z)$ ,  $K \geq -R^4 \chi$ ; добавляя к ним условие  $A_0(z) + \chi < 0$ , получим достаточные условия.

Решение задачи (3.3) для системы (1.4) с начальными и граничными условиями (3.1), (3.2) описывает вихревое движение идеальной несжимаемой жидкости в полуцилиндре, ограниченном твердыми стенками. Это решение зависит от двух произвольных функций  $F_0(z)$ ,  $A_0(z)$  и трех констант  $K$ ,  $\chi$ ,  $R$ . Как следует из результатов п. 2, если  $\chi = \text{const}$ , то решение задачи (1.13), (1.15) может быть выражено в элементарных функциях. Из (2.8) следует параметрическое представление функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в квадратурах. В результате получен широкий класс точных решений уравнений Эйлера, описывающих нелинейное взаимодействие между вихреисточниками, распределенными на оси симметрии, при нестационарном вращательно-симметричном движении идеальной несжимаемой жидкости в полуцилиндре.

В работе [6] рассмотрен пример решения задачи (1.13), (1.15), когда  $\chi = 1$ , начальные данные  $F_0$  и  $A_0$  — конечные функции  $\zeta$  с носителем  $[-1, 1]$ . В данной работе построено решение для случая  $\chi = 1$  с другими начальными данными.

Итак, рассмотрим случай  $\chi = 1$ . Функции  $F_0$  и  $A_0$  — конечные функции  $\zeta$  с носителем  $[-\delta, \delta]$  — задаются формулой

$$F_0(\zeta) = A_0(\zeta) = \begin{cases} 1 - |\zeta|/\delta, & 0 \leq |\zeta| \leq \delta, \\ 0, & |\zeta| \geq \delta. \end{cases} \quad (3.4)$$

Рассмотрим случай  $A_0 + \chi > 0$ , т. е.  $A_0 > -1$ . В силу (2.5) и определений  $H = F + iG$ ,  $A + \chi = G^2$  получим

$$F = \text{Re}(\ln \mu)_t, \quad A = [\text{Im}(\ln \mu)_t]^2 - 1. \quad (3.5)$$

Согласно (2.6), (2.7) функция  $\mu(t, \zeta)$  имеет вид

$$\mu = \cos t + [F_0(\zeta) + i(A_0(\zeta) + 1)^{1/2}] \sin t. \tag{3.6}$$

Функция  $z(\zeta, t)$  получается интегрированием (2.9) при условии  $z(0, t) = 0$ :

$$z(\zeta, t) = \begin{cases} \int_0^\zeta \frac{d\eta}{|\mu(t, \eta)|^2} \equiv Z(\zeta, t), & 0 \leq \zeta \leq \delta, \\ \zeta - \delta + h(t), & \zeta \geq \delta, \end{cases} \tag{3.7}$$

где  $h(t) = Z(\delta, t)$  —  $2\pi$ -периодическая функция времени. При получении (3.7) полагалось  $|\mu| = 1$  при  $\zeta \geq \delta$ , что следует из (3.6) и равенств  $F_0 = A_0 = 0$ ,  $\zeta \geq \delta$ .

Из (3.5)–(3.7) легко найти третью компоненту скорости и выражение для  $z$  в параметрической форме. В частности,  $w = Z_t$ , если  $0 \leq \zeta \leq \delta$ , и  $w = \dot{h}(t)$ , если  $\zeta \geq \delta$ . Это означает, что условие непротекания выполнено на любой поверхности  $z = h(t) + N$ , где  $N = \text{const} > 0$ . Кроме того,  $u = 0$ ,  $v = r^{-1}(K + r^4)^{1/2}$  при  $z \geq h(t)$ , так как  $F = A = 0$  при  $\zeta > \delta$ . Заметим, что константа  $K$  должна удовлетворять неравенству  $K > R^4 F_0^2 + R^4 (A_0 - F_0^2)^2 / (4(A_0 + 1))$ , которое обеспечивает положительность подкоренного выражения в (1.8).

Таким образом, жидкость, заключенная между поверхностями  $z = h(t)$  и  $z = h(t) + N$ , движется как вращающийся поршень. Нетривиальное движение, периодическое по времени, находится в области  $0 < r < R$ ,  $0 < z < h(t)$ . Это движение порождается взаимодействием вихреисточников, распределенных на сегменте  $[0, h(t)]$  оси симметрии. Циркуляция вихря  $2\pi K^{1/2} = \text{const}$ , мощность источника  $M = -2\pi R^2 F$  — периодическая по времени функция.

Итак, в случае, когда начальные данные имеют вид (3.4), получим

$$h(t) = 2 \frac{\delta \operatorname{arctg} [(2\zeta \sin t - 3\delta \sin t - 2\delta \cos t) / (\delta \sqrt{3 \sin^2 t - 4 \sin t \cos t})]}{\sin t \sqrt{3 \sin^2 t - 4 \sin t \cos t}} \Big|_{\zeta=0}^{\zeta=\delta}.$$

В данном случае мощность источника  $M$  — функция двух переменных:

$$M(\zeta, t) = -2\pi R^2 \frac{F_0(\zeta)(\cos^2 t - \sin^2 t) + (F_0^2(\zeta) + A_0(\zeta)) \sin t \cos t}{(\cos t + F_0(\zeta) \sin t)^2 + (A_0(\zeta) + 1) \sin^2 t}.$$

Графики зависимостей  $h(t)$  и  $M(\zeta, t)$  для значений  $\delta = 0,005$  и  $R = (2\pi)^{-1/2}$  приведены на рис. 1, 2.

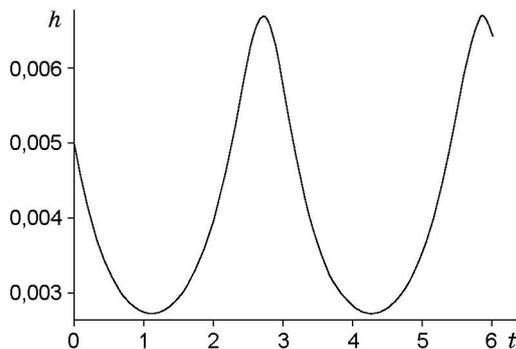


Рис. 1

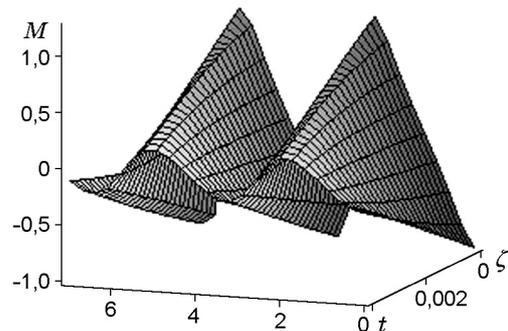


Рис. 2

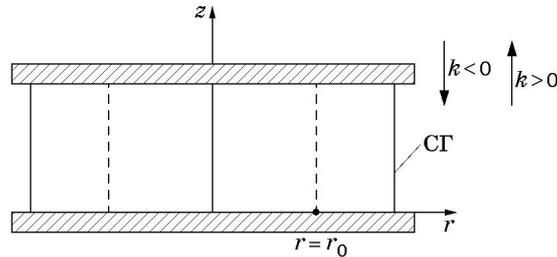


Рис. 3

**4. Задача о движении жидкости под штампом.** Рассмотрим случай  $w = \lambda(t)z$  (функция  $\lambda$  задана формулой (1.10);  $q(t)$  — произвольная функция времени). Функция  $q$  — интенсивность источников (стоков). Согласно (1.5) и с учетом  $w = \lambda(t)z$  компоненты скорости  $u$  и  $w$  определяются по формулам

$$u = -kr/[2(1+kt)] + q(t)/r, \quad w = kz/(1+kt). \quad (4.1)$$

Выражение для давления имеет вид

$$p = -\frac{3}{8} \frac{k^2(r-r_0)^2}{(1+kt)^2} - 3 \frac{q^2}{(r-r_0)^4} - \dot{q} \ln(r-r_0) + \int_{r_0}^r \frac{v^2(\eta, t)}{\eta} d\eta + \varkappa(t), \quad (4.2)$$

где  $\varkappa(t)$  — произвольная функция времени. Вместо компоненты скорости  $v$  введем циркуляцию  $\Gamma = 2\pi r v$ . В силу (4.1) и второго уравнения (1.4) функция  $\Gamma$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \left( -\frac{kr}{2(1+kt)} + \frac{q(t)}{r} \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = 0. \quad (4.3)$$

Для уравнения (4.3) может быть рассмотрена начально-краевая задача с начальными данными  $\Gamma(r, 0) = \delta(r)$  при  $0 \leq r \leq r_*$  и краевыми условиями  $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$  при  $t > 0$ .

В силу масштабной инвариантности системы (1.4) без потери общности отличную от нуля константу  $k$  можно считать равной 1 или  $-1$ .

Для уравнения (4.3) можно рассмотреть задачу о движении цилиндрического слоя под штампом (рис. 3) (СГ — свободная граница). Нижняя стенка штампа неподвижна, верхняя может двигаться вверх или вниз в зависимости от знака постоянной скорости  $k$ . Отметим, что при  $k > 0$  верхняя стенка движется вверх, при  $k < 0$  — вниз.

Ранее Л. В. Овсянниковым [7] рассматривалась задача о потенциальном движении цилиндрического слоя под штампом; особенности поля скоростей отсутствовали, поле скоростей по пространственным координатам было линейным. В задаче, рассмотренной в данной работе, движение непотенциальное и имеется вихреисточник на оси симметрии. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что  $q$  — произвольная функция времени и для определяющего уравнения (4.3) может быть поставлена начально-краевая задача. Кроме того, поле скоростей по пространственным координатам нелинейно.

Задача рассматривается без учета капиллярности, поскольку при ее учете в выражении для давления появится только аддитивный член:  $p' = p + \sigma/R(t)$ , где  $\sigma > 0$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $r = R(t)$  — уравнение свободной поверхности;  $p$  задается формулой (4.2). На компоненты скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$  учет капиллярности не влияет.

Введем лагранжевы координаты. Для этого рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{kr}{2(1+kt)} + \frac{q}{r}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{kz}{1+kt}, \quad (4.4)$$

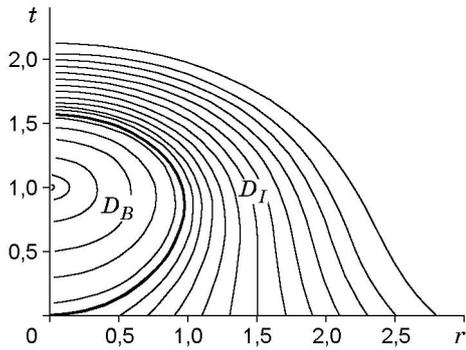


Рис. 4

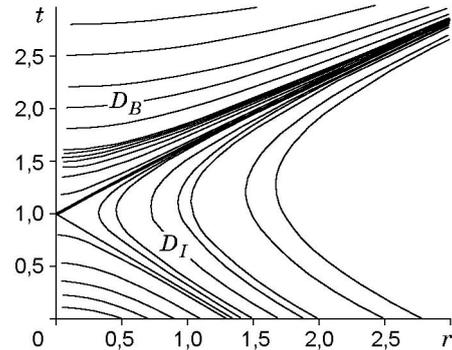


Рис. 5

где  $r = \eta$  и  $z = \zeta$  при  $t = 0$ . Интегрируя систему (4.4), получим

$$z = \zeta(1 + kt), \quad r^2 = \frac{1}{1 + kt} \left( \eta^2 + 2 \int_0^t (1 + k\tau)q(\tau) d\tau \right). \quad (4.5)$$

Полагая  $\zeta, \eta$  константами, получим уравнения материальных поверхностей. Условия непротекания при  $z = 0$  и  $z = z_0(1 + kt)$  выполняются автоматически. Полагая  $\eta = r_0$ , получим материальную цилиндрическую поверхность, определяемую вторым уравнением в (4.5). Таким образом, характеристики уравнения (4.3) имеют вид

$$r^2(\tau, \eta, t) = \frac{1}{1 + kt} \left( \eta^2 + 2 \int_{\tau}^t (1 + k\zeta)q(\zeta) d\zeta \right). \quad (4.6)$$

Рассмотрим задачу, когда функция  $q$  знакопеременна, т. е. сначала имеет место источник, а затем сток, и наоборот. В (4.6) сначала положим  $q(t) = 1 - t^2$ , а затем  $q(t) = t^2 - 1$ . Тогда уравнения характеристик примут вид

$$r^2(\tau, \eta, t) = [6\eta^2 - 3k(t^4 - \tau^4) - 4t^3 + 4\tau^3 + 6k(t^2 - \tau^2) + 12(t - \tau)]/[6(1 + kt)] \quad (4.7)$$

при  $q(t) = 1 - t^2$  (в дальнейшем этот случай движения называется источник — сток) и

$$r^2(\tau, \eta, t) = [6\eta^2 + 3k(t^4 - \tau^4) + 4t^3 - 4\tau^3 - 6k(t^2 - \tau^2) - 12(t - \tau)]/[6(1 + kt)] \quad (4.8)$$

при  $q(t) = t^2 - 1$  (сток — источник).

Очевидно, что при  $k < 0$  решение может существовать лишь некоторое ограниченное время, по прошествии которого стенки схлопнутся. Поэтому далее будем рассматривать случай  $k > 0$ .

Полагая в (4.7), (4.8)  $k = 1$ , получим характеристики  $r = r_0(\tau, \eta, t)$  сначала для случая источник — сток, а затем для случая сток — источник.

На рис. 4 показаны характеристики (4.7) для случая источник — сток, на рис. 5 — характеристики (4.8) для случая сток — источник. Характеристики, выделенные жирной линией, разделяют область влияния начальных данных  $D_I$  и область влияния краевых условий  $D_B$ .

Следует отметить различие характера особых точек для случаев источник — сток и сток — источник. В случае источник — сток, продолжая характеристики в “нефизическую” полуплоскость  $r < 0$ , легко убедиться, что особой является точка  $r = 0, t = 1$  — особенность типа центра (см. рис. 4). Начальная циркуляция задается при  $0 \leq t \leq 1$ . В случае сток — источник эта точка является особенностью типа седла (см. рис. 5). В этом случае при  $t > 1$  можно задать начальную циркуляцию.

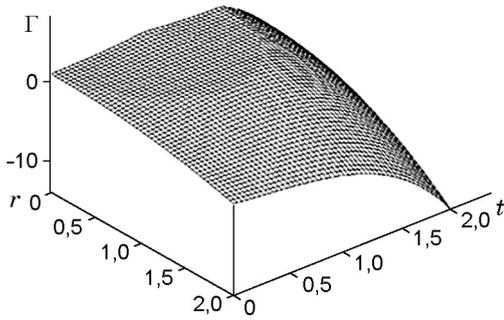


Рис. 6

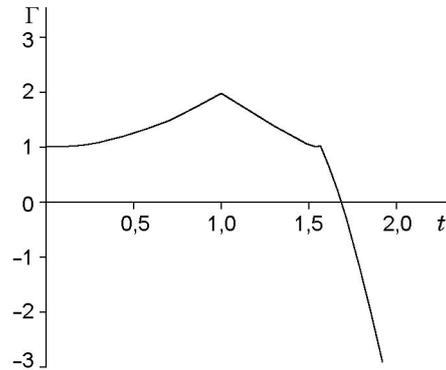


Рис. 7

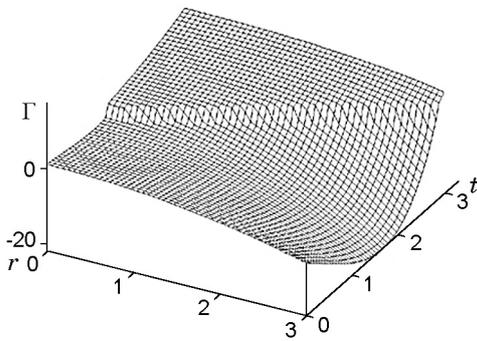


Рис. 8

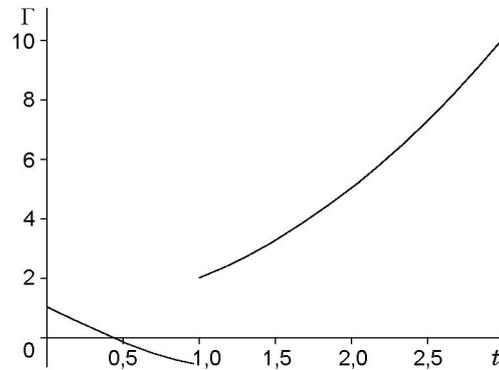


Рис. 9

Рассмотрим случай источник — сток. Возвращаясь к начально-краевой задаче (4.3) и выбирая в качестве начальных данных  $\delta(r) = 1 - r^2$ , а в качестве краевых условий  $\gamma(t) = 1 + t^2$ , находим, что в области  $D_I$  функция  $\Gamma$  имеет вид

$$\Gamma(r, t) = 1 - r^2(1 + t) - t^4/2 - 2t^3/3 + t^2 + 2t,$$

в области  $D_B$  функция  $\Gamma$  задается неявной формулой

$$r^2 - [-3(t^4 - (\Gamma - 1)^2) - 4t^3 + 4(\Gamma - 1)^{3/2} + 6(t^2 - \Gamma + 1) + 12(t - (\Gamma - 1)^{1/2})]/[6(1 + t)] = 0.$$

На рис. 6 приведен график функции  $\Gamma$  в области  $S_1 = \{(r, t): 0 \leq r \leq 2, 0 \leq t \leq 2\}$ , на рис. 7 — график функции  $\Gamma(0, t)$ .

Рассмотрим случай сток — источник с теми же начально-краевыми условиями  $\delta(r) = 1 - r^2$ ,  $\gamma(t) = 1 + t^2$ . Аналогично предыдущему случаю в области  $D_I$  получим явное выражение

$$\Gamma(r, t) = 1 - r^2(1 + t) + t^4/2 + 2t^3/3 - t^2 - 2t,$$

в области  $D_B$  — неявное

$$r^2 - [3(t^4 - (\Gamma - 1)^2) + 4t^3 - 4(\Gamma - 1)^{3/2} - 6(t^2 - \Gamma + 1) - 12(t - (\Gamma - 1)^{1/2})]/[6(1 + t)] = 0.$$

На рис. 8 приведен график функции  $\Gamma$  в области  $S_2 = \{(r, t): 0 \leq r \leq 3, 0 \leq t \leq 3\}$ , на рис. 9 — график функции  $\Gamma(0, t)$ . Следует отметить наличие слабых и сильных разрывов функции  $\Gamma$ . Легко заметить, что для случая источник — сток выполнено локальное условие согласования начальных данных и краевых условий  $\delta(0) = \gamma(0)$ , а наличие слабого разрыва на рис. 6 вполне естественно. Для случая сток — источник имеет место сильный разрыв (см. рис. 8), что объясняется невыполнением условия согласования, в данном случае имеющего нелокальный характер.

Вернемся к физической постановке задачи. На рис. 3 прямая  $r = r_0$  является границей областей влияния начальных данных и краевых условий. На плоскости переменных  $(r, t)$  (см. рис. 4, 5) кривые  $r = r_0(t)$  соответствуют случаям  $q = 1 - t^2$ ,  $q = t^2 - 1$ . Следует отметить, что в случае источник — сток при  $q > 0$  (т. е. когда действует источник) и  $r = 0$  можно задать циркуляцию  $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$ , а при  $q < 0$  (что соответствует стоку) характеристика поворачивает, а затем выходит из области  $S_1$ . В этом случае начальная циркуляция уже не задается, ее значение получается в процессе решения дифференциального уравнения (4.3).

Итак, в работе получено новое точное решение с нелинейным полем скоростей задачи о движении цилиндрического слоя идеальной несжимаемой жидкости под штампом.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за постановку задач и полезное обсуждение, а также С. В. Головину за ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Бучнев А. А.** Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1971. Вып. 7. С. 212–214.
2. **Овсянников Л. В.** Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
3. **Pukhnachov V. V.** An integrable model of nonstationary rotationally symmetrical motion of ideal incompressible liquid // Nonlinear Dynamics. 2000. N 22. P. 101–109.
4. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. **Андреев В. К., Родионов А. А.** Групповая классификация и точные решения уравнений плоского и вращательно-симметричного течения идеальной жидкости в лагранжевых координатах // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. С. 1577–1586.
6. **Пухначев В. В.** Новый класс точных решений уравнений Эйлера // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 6. С. 777–780.
7. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. С. 5–75.

*Поступила в редакцию 24/XII 2001 г.*