УДК 539.3

ГЛАДКИЙ КОНТАКТ УПРУГОГО ШТАМПА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

К. Жианг[*,**], Г. Шао[*], Л. Зу[*]

[*] Сианьский университет Цзяотуна, Сиань, Китай
[**] Сианьский электротехнологический университет, Сиань, Китай
E-mails: xjjiang@xidian.edu.cn, shaoguoqiang@sxqc.com, chdyuhan@stu.xjtu.edu.cn

Рассмотрена двумерная контактная задача о вдавливании трапециевидного штампа в гладкую упругую полуплоскость при последовательном воздействии нормального и изгибающего моментов. С использованием модели с наклонным плоским штампом проанализировано распределение давления и контактной деформации в зоне контакта. Проведено сравнение результатов, полученных аналитически и вычисленных с помощью метода конечных элементов, и показано, что высокий уровень точности достигается в обоих случаях. Исследовано влияние нормальной силы, изгибающего момента и величины внутренних углов штампа на контактные напряжения.

Ключевые слова: асимптотическое решение, полный контакт, контакт с отставанием, наклонный штамп.

DOI: 10.15372/PMTF20160220

Введение. Исследование явления усталости при фреттинге, т. е. образования трещины вследствие относительных движений контактирующих тел, имеет большое практическое значение. В настоящее время широко используются такие виды плоских оснований штампа, как форма с плоским основанием и закругленными краями [1], наклонная с плоскими краями [2] или с плоским основанием и небольшой поверхностной фаской [3]. Контактная задача для бруска, вдавленного нормально в полуплоскость, также изучалась независимо в работах [3–5]. Напряженное состояние вблизи границы полного контакта с фреттингом изучено с использованием асимптотического анализа в [6]. Указанные формы оснований штампа могут отличаться от стандартного вида контактов, рассматриваемых при решении задачи Герца. Решение контактной задачи получено для случая, когда основанием является полуплоскость. В настоящее время существует лишь несколько решений, которые могут быть использованы для исследования деформирования штампов в задачах с плоским контактом, поскольку в случае упругого штампа основание нельзя считать полуплоскостью, поэтому сложно получить аналитическое решение [7]. Простое выражение для контактного напряжения используется при моделировании поверхностных сил при плоском упругом контакте двух упругих тел для выявления фреттинг-конфигураций [8, 9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (NSFC) (гранты № 51405371, 51405385), Фонда научных исследований Государственной лаборатории производства инженерных систем (грант № sklms2016007) и Фонда фундаментальных научных исследований центральных университетов (грант № JB160403).

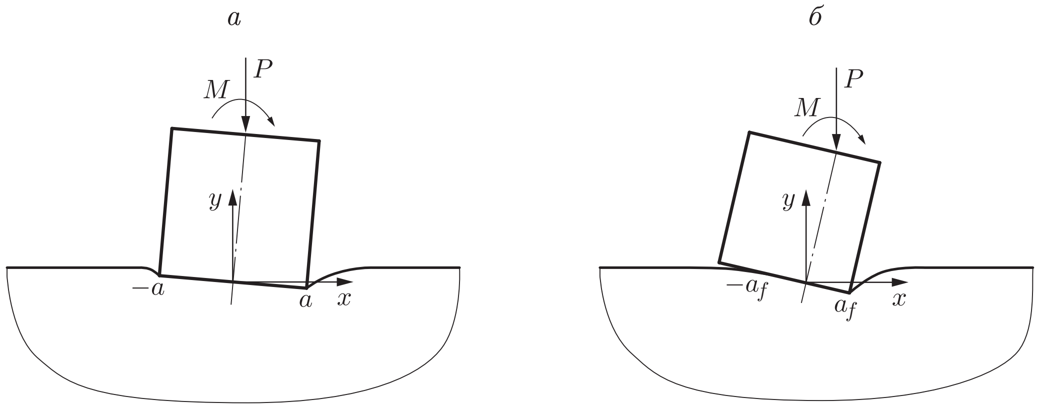

Рис. 1. Схема воздействия нормальной силы и изгибающего момента на штампы с полным (*а*) и неполным (*б*) контактом

Простые аппроксимации поверхностных напряжений нельзя использовать, когда на штамп действует изгибающий момент.

Целью настоящего исследования является разработка расчетной модели для гладкого упругого штампа, вдавленного в упругую полуплоскость, под действием нормальной силы и изгибающего момента. Напряженное состояние вблизи края штампа с полным или неполным контактом при фреттинге исследовано с помощью асимптотического метода. Распределение давления на крае жесткого штампа, вдавленного в гладкую полуплоскость, имеет степень особенности 1/2. В данной работе рассматриваются характеристики локального напряженного состояния для случая, когда штамп и контактирующее тело являются упругими.

1. Постановка задачи. Схема рассматриваемой контактной задачи приведена на рис. 1. Нормальная сила P и изгибающий момент M приложены в центре контактирующего тела. В случае когда изгибающий момент M мал, упругий штамп с левой стороны приподнимается, и имеет место полный контакт штампа с основанием (см. рис. 1,*а*). При увеличении изгибающего момента M левая сторона упругого штампа отрывается от основания и контакт становится неполным (см. рис. 1,*б*). В этом случае ширина области контакта меньше ширины упругого штампа.

Относительное нормальное перемещение поверхности описывается выражением

$$u(x) = kx + d_0,$$

где k — деформация, возникающая в зоне контакта; d_0 — глубина вдавливания в центральной точке контакта.

Выражение для распределения давления под жестким штампом, вдавленным в упругую полуплоскость, имеет вид [10]

$$p(x) = (P/\pi)(a^2 - x^2)^{-1/2}$$

(a — половина длины зоны контакта). Нормальное поверхностное давление и перемещение связаны соотношением

$$u(x) = -\frac{2}{\pi E_1} \int\limits_{-a}^{a} \ln|x - \xi|\, p(\xi)\, d\xi = kx + d_0, \tag{1}$$

где $E_1 = E/(1-\nu)^2$. Согласно [11] выражение для $p(x)$ имеет вид

$$p(x) = \frac{E_1 a}{2}\, (a^2 - x^2)^{-1/2}[a_1(x/a) + a_0], \tag{2}$$

где a_1, a_0 — неопределенные коэффициенты. Выражения для нормальной силы и изгибающего момента запишем в виде

$$P = \int\limits_{-a}^{a} p(\xi)\, d\xi; \tag{3}$$

$$M = \int\limits_{-a}^{a} \xi p(\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

Далее необходимо рассмотреть два случая: полного и неполного контакта штампа с основанием.

1.1. *Полный контакт.* В случае полного контакта (см. рис. 1,a) давление имеет особенность на обоих краях основания штампа. Тогда, используя уравнение (2), уравнения (3), (4) можно записать в виде

$$P = \int\limits_{-a}^{a} \frac{E_1 a}{2}\,(a^2-\xi^2)^{-1/2}[a_1(\xi/a)+a_0]\,d\xi = \\ = \frac{E_1 a_1}{2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-\xi^2)^{-1/2}\xi\,d\xi + \frac{E_1 a a_0}{2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-\xi^2)^{-1/2}\,d\xi; \tag{5}$$

$$M = \int\limits_{-a}^{a} \frac{E_1 a}{2}\,(a^2-\xi^2)^{-1/2}[a_1(\xi/a)+a_0]\xi\,d\xi = \\ = \frac{E_1 a_1}{2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-\xi^2)^{-1/2}\xi^2\,d\xi + \frac{E_1 a a_0}{2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-\xi^2)^{-1/2}\,\xi\,d\xi. \tag{6}$$

С использованием соотношений

$$\int\limits_{-a}^{a}(a^2-\xi^2)^{-1/2}\,d\xi = \pi; \tag{7}$$

$$\int\limits_{-a}^{a}(a^2-\xi^2)^{-1/2}\,\xi\,d\xi = 0, \qquad \int\limits_{-a}^{a}(a^2-\xi^2)^{-1/2}\,\xi^2\,d\xi = \frac{\pi a^2}{2}$$

уравнения (5), (6) представим в виде

$$P = E_1\pi a a_0/2, \qquad M = E_1\pi a^2 a_1/4.$$

Тогда

$$a_0 = 2P/(\pi E_1 a); \tag{8}$$

$$a_1 = 4M/(\pi E_1 a^2). \tag{9}$$

Таким образом, распределение давления $p(x)$ задается выражением

$$p(x) = \frac{2Mx + Pa^2}{\pi a^2}\,(a^2-x^2)^{-1/2}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в уравнение (1), получаем следующее выражение для перемещений:

$$u(x) = -\frac{a_1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} \ln|x-\xi|\,(a^2-\xi^2)^{-1/2}\xi\,d\xi - \frac{aa_0}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} \ln|x-\xi|\,(a^2-\xi^2)^{-1/2}\,d\xi = kx + d_0. \quad (11)$$

Используя соотношения

$$\int\limits_{-a}^{a} \ln|x-\xi|\,(a^2-\xi^2)^{-1/2}\xi\,d\xi = -\pi x; \quad (12)$$

$$\int\limits_{-a}^{a} \ln|x-\xi|\,(a^2-\xi^2)^{-1/2}\,d\xi = -\pi(\ln 2 - \ln a), \quad (13)$$

из (11) получаем

$$k = \frac{4M}{\pi E_1 a^2}, \qquad d_0 = \frac{2P(\ln 2 - \ln a)}{\pi E_1}. \quad (14)$$

Следовательно,

$$u(x) = \frac{4M}{\pi E_1 a^2}\,x + \frac{2P(\ln 2 - \ln a)}{\pi E_1}.$$

1.2. *Неполный контакт.* В случае неполного контакта распределение давления имеет особенность на одном крае основания штампа и ограничено на другом. На рис. 1 видно, что зона контакта находится в интервале $[-a_f, a_f]$, где $a_f < a$. В предположении, что контакт полный, $a_f = a$. Тогда

$$\Delta a = a - a_f. \quad (15)$$

Критический изгибающий момент M_c можно определить из условия равенства нулю давления в точке контакта $x = -a$:

$$p(-a) = 0.$$

Из уравнения (10) получаем

$$a_0 = a_1. \quad (16)$$

С учетом уравнений (8), (9), (16) имеем

$$M_c = Pa/2.$$

Из (4) находим

$$M = M_c + P\,\Delta a/2.$$

Следовательно,

$$\Delta a = 2(M - M_c)/P; \quad (17)$$

$$P = \frac{E_1 a_f a_0}{2}\int\limits_{-a_f}^{a_f} (a_f^2 - \xi^2)^{-1/2}\,d\xi, \quad (18)$$

где a_f можно вычислить из уравнений (15), (17):

$$a_f = a - 2(M - M_c)/P.$$

Подставляя выражение (9) в уравнение (18), получаем

$$a_1 = a_0 = P/(\pi E_1 a_f).$$

Таким образом, выражение для распределения контактного давления $p(x)$ принимает вид

$$p(x) = \frac{P(x + a_f)}{2\pi a_f}\,(a_f^2 - x^2)^{-1/2}. \qquad (19)$$

Подставляя (19) в уравнение (1), получаем

$$u(x) = -\frac{a_1}{\pi}\int\limits_{-a_f}^{a_f} \ln|x-\xi|\,(a_f^2 - \xi^2)^{-1/2}\xi\,d\xi - \frac{a_f a_0}{\pi}\int\limits_{-a_f}^{a_f} \ln|x-\xi|\,(a_f^2 - \xi^2)^{-1/2}\,d\xi = \\ = kx + d_0. \qquad (20)$$

Используя соотношения

$$\int\limits_{-a_f}^{a_f} \ln|x-\xi|\,(a_f^2 - \xi^2)^{-1/2}\xi\,d\xi = -\pi x,$$

$$\int\limits_{-a_f}^{a_f} \ln|x-\xi|\,(a_f^2 - \xi^2)^{-1/2}\,d\xi = -\pi(\ln 2 - \ln a_f),$$

уравнение (20) можно представить в виде

$$k = \frac{P}{\pi E_1 a_f}, \qquad d_0 = \frac{P(\ln 2 - \ln a_f)}{\pi E_1}.$$

Следовательно,

$$u(x) = \frac{P}{\pi E_1 a_f}\,x + \frac{P(\ln 2 - \ln a_f)}{\pi E_1}.$$

2. Асимптотическое решение контактной задачи для упругого штампа. Рассмотрим задачу, в которой жесткость штампа конечна. Уравнение (2) справедливо для абсолютно жесткого штампа со степенью особенности 1/2 [13]. Для штампа с конечной жесткостью заменим степень особенности 1/2 в выражении для распределения давления на $0 < \lambda < 0{,}5$. Тогда уравнение (2) можно записать в виде

$$p(\xi) = \frac{E_1 a}{2}\,(a^2 - \xi^2)^{-\lambda}[a_1(\xi/a) + a_0].$$

Согласно [12] параметр λ можно найти из решения следующих уравнений с учетом внутреннего контактного угла ψ:

$$\operatorname{tg}[(1-\lambda)\pi]\{(1-\lambda)\sin(2\psi) + \sin[2(1-\lambda)\psi]\} + e\{1 - \cos[2(1-\lambda)\psi] - (1-\lambda)^2[1 - \cos(2\psi)]\} = 0,$$

где e — отношение модулей Юнга штампа и основания.

2.1. *Полный контакт.* Рассмотрим случай полного контакта (см. рис. 1,a). С учетом степени особенности уравнения (5), (6) запишем в виде

$$P = \frac{E_1 a_1}{2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2 - \xi^2)^{-\lambda}\xi\,d\xi + \frac{E_1 a a_0}{2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2 - \xi^2)^{-\lambda}\,d\xi; \qquad (21)$$

$$M = \frac{E_1 a_1}{2} \int\limits_{-a}^{a} (a^2 - \xi^2)^{-\lambda} \xi^2 \, d\xi + \frac{E_1 a a_0}{2} \int\limits_{-a}^{a} (a^2 - \xi^2)^{-\lambda} \xi \, d\xi, \tag{22}$$

где

$$\int\limits_{-a}^{a} (a^2 - \xi^2)^{-\lambda} \xi \, d\xi = 0; \tag{23}$$

$$\int\limits_{-a}^{a} (a^2 - \xi^2)^{-\lambda} \, d\xi = a^{1-2\lambda} a_{\lambda 0}; \tag{24}$$

$$\int\limits_{-a}^{a} (a^2 - \xi^2)^{-\lambda} \xi^2 d\xi = a^{3-2\lambda} a_{\lambda 1}. \tag{25}$$

Вычислим интегралы

$$\bar{v}(\xi) = \int\limits_{-a}^{a} (a^2 - \xi^2)^{-\lambda} \, d\xi, \qquad \bar{\bar{v}}(\xi) = \int\limits_{-a}^{a} (a^2 - \xi^2)^{-\lambda} \xi^2 \, d\xi.$$

В предположении, что $\xi = a \sin\theta$, имеем

$$\bar{v}(\xi) = 2 \int\limits_{0}^{\pi/2} [a^2 - a^2 \sin^2\theta]^{-\lambda} \, d(a \sin\theta) = 2a^{1-2\lambda} \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^{1-2\lambda}\theta \, d\theta,$$

$$\bar{\bar{v}}(\xi) = 2 \int\limits_{0}^{\pi/2} [a^2 - a^2 \sin^2\theta]^{-\lambda} a^2 \sin^2\theta \, d(a \sin\theta) =$$

$$= 2a^{3-2\lambda} \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^{1-2\lambda}\theta [1 - \cos^2\theta] \, d\theta = 2a^{3-2\lambda} \int\limits_{0}^{\pi/2} (\cos^{1-2\lambda}\theta - \cos^{3-2\lambda}\theta) \, d\theta.$$

С использованием разложения Тейлора получаем

$$\cos^{1-2\lambda}\theta \approx 1 + (-1/2 + \lambda)x^2 + (1/24 - \lambda/3 + \lambda^2/2)x^4 + (-1/720 + \lambda/360 - \lambda^2/12 + \lambda^3/6)x^6,$$

$$\cos^{3-2\lambda}\theta \approx 1 + (-3/2 + \lambda)x^2 + (1/8 - \lambda/12 - (2 - 2\lambda)/(-1/2 + \lambda)/4)x^4.$$

Тогда

$$\bar{v}(\xi) = a^{1-2\lambda}\Big(\pi + \frac{(-1/2 + \lambda)\pi^3}{12} + \frac{(1/24 - \lambda/3 + \lambda^2/2)\pi^5}{80} +$$

$$+ \frac{(-1/720 + \lambda/360 - \lambda^2/12 + \lambda^3/6)\pi^7}{448} + \frac{(1/40\,320 - \lambda/315 - \lambda^2/240 + \lambda^4/24)\pi^9}{2304}\Big) =$$

$$= a^{1-2\lambda} a_{\lambda 0},$$

$$\bar{\bar{v}}(\xi) = a^{3-2\lambda}\Big(\frac{\pi^3}{12} + \frac{(-5/6+\lambda)\pi^5}{80} + \frac{(91/360 - 2\lambda/3 + \lambda^2/2)\pi^7}{448} + \\ + \frac{(-41/1008 + 19\lambda/120 - \lambda^2/4 + \lambda^3/6)\pi^9}{2304}\Big) = a^{3-2\lambda} a_{\lambda 1}.$$

Следовательно,

$$a_{\lambda 0} = \pi + \frac{(-1/2+\lambda)\pi^3}{12} + \frac{(1/24 - \lambda/3 + \lambda^2/2)\pi^5}{80} + \\ + \frac{(-1/720 + \lambda/360 - \lambda^2/12 + \lambda^3/6)\pi^7}{448} + \frac{(1/40\,320 - \lambda/315 - \lambda^2/240 + \lambda^4/24)\pi^9}{2304},$$

$$a_{\lambda 1} = \frac{\pi^3}{12} + \frac{(-5/6+\lambda)\pi^5}{80} + \frac{(91/360 - 2\lambda/3 + \lambda^2/2)\pi^7}{448} + \\ + \frac{(-41/1008 + 19\lambda/120 - \lambda^2/4 + \lambda^3/6)\pi^9}{2304}.$$

Таким образом, имеем

$$a_0 = \frac{P}{E_1 a^{2-2\lambda} a_{\lambda 0}}, \qquad a_1 = \frac{M}{E_1 a^{3-2\lambda} a_{\lambda 1}}.$$

В данном случае уравнение (11) можно записать в виде

$$u(x) = -\frac{a_1}{\pi}\int_{-a}^{a} \ln|x-\xi|\,(a^2-\xi^2)^{-\lambda}\xi\,d\xi - \frac{a a_0}{\pi}\int_{-a}^{a} \ln|x-\xi|\,(a^2-\xi^2)^{-\lambda}\,d\xi = k_\lambda x + d_\lambda. \quad (26)$$

При $x = 0$ это уравнение принимает вид

$$u(0) = -\frac{a a_0}{\pi}\int_{-a}^{a} \ln|\xi|\,(a^2-\xi^2)^{-1/2}\,d\xi = d_0.$$

Используя теорему о среднем значении, находим

$$u(0) = -\frac{2a^2 a_0 (a^2-\xi_0^2)^{-1/2}}{\pi}\int_{-a}^{a} \ln|\xi|\,d\xi = d_0. \quad (27)$$

Подставляя выражение

$$\int_{-a}^{a} \ln|\xi|\,d\xi = 2a\ln a - 2a$$

в (27), получаем

$$f_0(\xi_0) = a^2 - \xi_0^2 = \Big(\frac{\pi d_0}{2a^2 a_0(2a - 2a\ln a)}\Big)^{-2},$$

где $-a < \xi_0 < a$. Тогда выражение для перемещения d_λ принимает вид

$$d_\lambda = -\frac{2a^2 a_0}{\pi} f_0(\xi_0)^{-\lambda}\int_{-a}^{a} \ln|\xi|\,d\xi = \frac{2a^2 a_0(2a - 2a\ln a)}{\pi}\Big(\frac{\pi d_0}{2a^2 a_0(2a - 2a\ln a)}\Big)^{2\lambda},$$

при этом a_0, d_0 определяются соотношениями (8), (14).

Для того чтобы найти k_λ, уравнение (26) запишем в виде

$$u(x) = f_1(\xi_1)\Big(-\frac{2aa_1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\ln|x-\xi|\,(a^2-\xi^2)^{-1/2}\xi\,d\xi - \frac{2a^2a_0}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\ln|x-\xi|\,(a^2-\xi^2)^{-1/2}\,d\xi\Big) = \\ = k_\lambda x + d_\lambda, \qquad (28)$$

где

$$f_1(\xi_1) = \frac{(a^2-\xi_1^2)^{-\lambda}}{(a^2-\xi_1^2)^{-1/2}} = (a^2-\xi_1^2)^{-\lambda+1/2},$$

$-a < \xi_1 < a$. С использованием (2), (3) коэффициенты с переменной x в интегральных слагаемых в (28) можно сократить:

$$u(x) = 2aa_1 f_1(\xi_1)x + f_1(\xi_1)\bar{\varphi} = k_\lambda x + d_\lambda.$$

Здесь

$$\bar{\varphi} = 2a^2a_0\ln 2 - \frac{2a^2a_0\ln a}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-\xi^2)^{-1/2}\,d\xi - \frac{2aa_1\ln a}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-\xi^2)^{-1/2}\xi\,d\xi = \\ = 2a^2a_0\ln 2 - 2a^2a_0\ln a.$$

Таким образом, получаем

$$f_1(\xi_1) = \frac{d_\lambda}{2a^2a_0\ln 2 - 2a^2a_0\ln a}, \qquad k_\lambda = \frac{a_1d_\lambda}{aa_0\ln 2 - aa_0\ln a}.$$

Следовательно, в случае штампа конечной жесткости выражение для контактной деформации можно представить в виде

$$u(x) = \frac{8a^2a_1(1-\ln a)}{\pi(\ln 2-\ln a)}\Big(\frac{\pi d_0}{2a^2a_0(2a-2a\ln a)}\Big)^{2\lambda}x + \\ + \frac{aa_0(2a-2a\ln a)}{\pi}\Big(\frac{\pi d_0}{2a^2a_0(2a\ln a-2a)}\Big)^{2\lambda}. \qquad (29)$$

2.2. *Неполный контакт.* В случае неполного контакта распределение давления определяется выражением

$$p(x) = \frac{P(x+a_f)}{2\pi a_f}(a_f^2-x^2)^{-\lambda}.$$

Критический изгибающий момент находится по формуле

$$M_c = Paa_{\lambda 1}/a_{\lambda 0}.$$

Интегральные уравнения (23)–(25) запишем в виде

$$\int\limits_{-a_f}^{a_f}(a_f^2-\xi^2)^{-\lambda}\xi\,d\xi = 0, \qquad \int\limits_{-a_f}^{a_f}(a_f^2-\xi^2)^{-\lambda}\,d\xi = a_f^{1-2\lambda}a_{\lambda 0},$$

$$\int\limits_{-a_f}^{a_f}(a_f^2-\xi^2)^{-\lambda}\xi^2\,d\xi = a_f^{3-2\lambda}a_{\lambda 1}, \qquad P = \frac{E_1a_fa_0}{2}\int\limits_{-a_f}^{a_f}(a_f^2-\xi^2)^{-\lambda}\,d\xi.$$

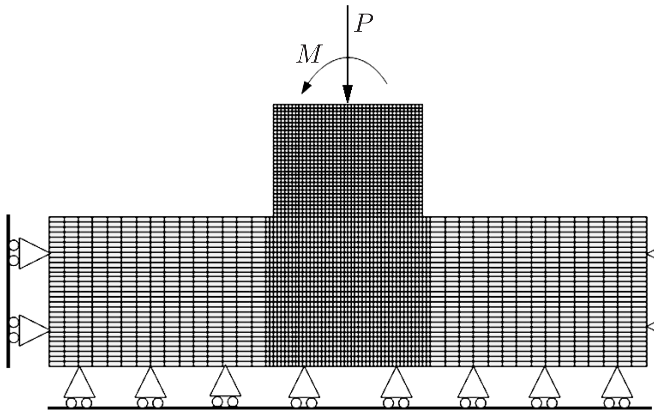

Рис. 2. Конечно-элементная модель контакта упругого штампа

Таким образом, имеем

$$a_1 = a_0 = \frac{P}{E_1 a_f^{2-2\lambda} a_{\lambda 0}}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в уравнение (29), получаем выражение для смещений

$$u(x) = \frac{8a_f^2 a_1(1 - \ln a_f)}{\pi(\ln 2 - \ln a_f)} \Big(\frac{\pi d_0}{2a_f^2 a_0(2a_f \ln a_f - 2a_f)}\Big)^{2\lambda} x + \\ + \frac{aa_0(2a_f - 2a_f \ln a_f)}{\pi} \Big(\frac{\pi d_0}{2a_f^2 a_0(2a_f \ln a_f - 2a_f)}\Big)^{2\lambda}.$$

3. Конечно-элементная модель. Для исследования поведения поверхности упругого штампа использовалась конечно-элементная модель, выполненная в пакете Ansys. Схема конечно-элементной модели упругого штампа с прямыми углами, вдавливаемого в основание, показана на рис. 2. На индентор последовательно действуют нормальная сила и изгибающий момент. В пакете Ansys контактная задача решается с использованием метода множителей Лагранжа и изотропных четырехсторонних элементов PLANE42. Модуль Юнга $e = 195$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. При определении пар контактных точек линия соприкосновения штампа с основанием полагается главной контактной линией с элементами CONTA173, контактная линия основания служит целевой поверхностью с целевыми элементами CONTA170.

4. Результаты численных расчетов. Рассмотрим задачу о контакте упругого штампа с основанием при величине внутреннего угла (угла между основанием штампа и его боковой стороной), равной $90°$, $\lambda = 0{,}226$. На рис. 3–6 показаны распределения напряжения $p(x)$ под действием изгибающего момента M и нормальной силы P ($\eta = M/P$ — коэффициент изгибающего момента). Видно, что максимальное контактное напряжение повышается с увеличением нормальной силы и практически не зависит от значения изгибающего момента M. Когда коэффициент изгибающего момента достигает критического значения $\eta_c = M_c/P$, контакт становится неполным. Однако при неполном контакте в точке отрыва штампа от основания имеется незначительное различие результатов, полученных двумя методами. Это обусловлено использованием конечного числа членов ряда Тейлора. Данную погрешность можно уменьшить путем увеличения количества членов ряда Тейлора.

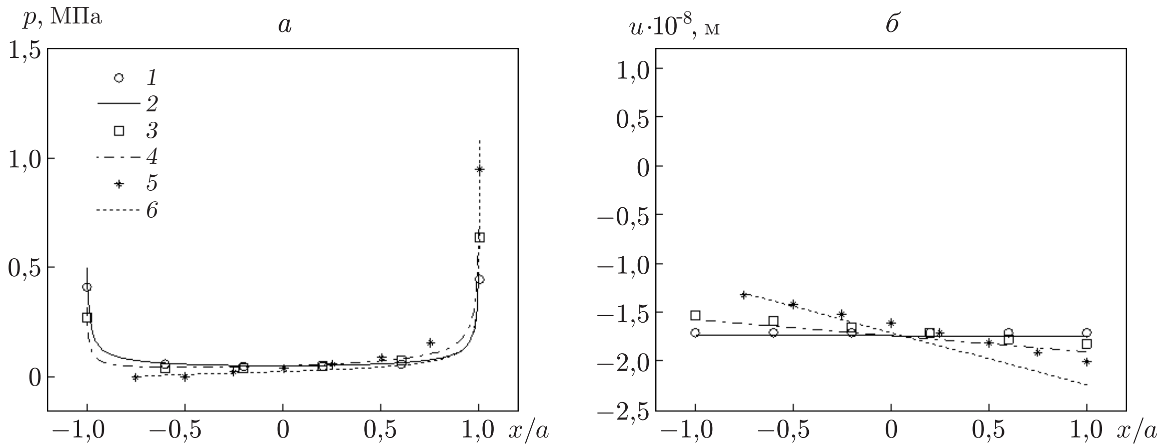

Рис. 3. Распределение контактного напряжения (*а*) и контактного перемещения (*б*) для жесткого штампа при $P = 1000$ Н и различных значениях η:
точки — конечно-элементная модель, линии — аналитическое решение; *1, 2* — $\eta = 0$, *3, 4* — $\eta = 0{,}0016$, *5, 6* — $\eta = 0{,}0039$

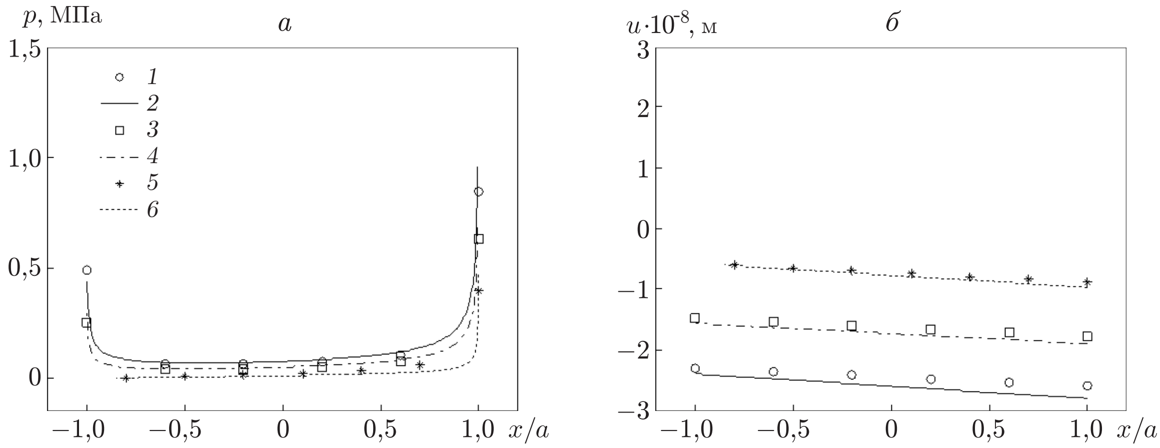

Рис. 4. Распределение контактного напряжения (*а*) и контактного перемещения (*б*) для жесткого штампа при $M = 2$ Н·м и различных значениях η:
точки — конечно-элементная модель, линии — аналитическое решение; *1, 2* — $\eta = 0{,}0013$, *3, 4* — $\eta = 0{,}0016$, *5, 6* — $\eta = 0{,}0036$

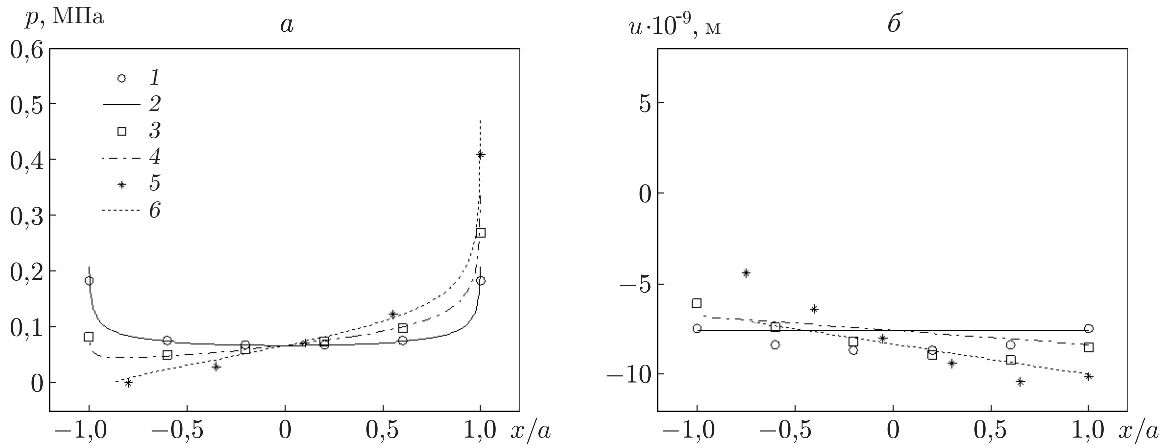

Рис. 5. Распределение контактного напряжения (*а*) и контактного перемещения (*б*) для упругого штампа при $P = 1000$ Н и различных значениях η:
точки — конечно-элементная модель, линии — аналитическое решение; *1, 2* — $\eta = 0$, *3, 4* — $\eta = 0{,}0014$, *5, 6* — $\eta = 0{,}0035$

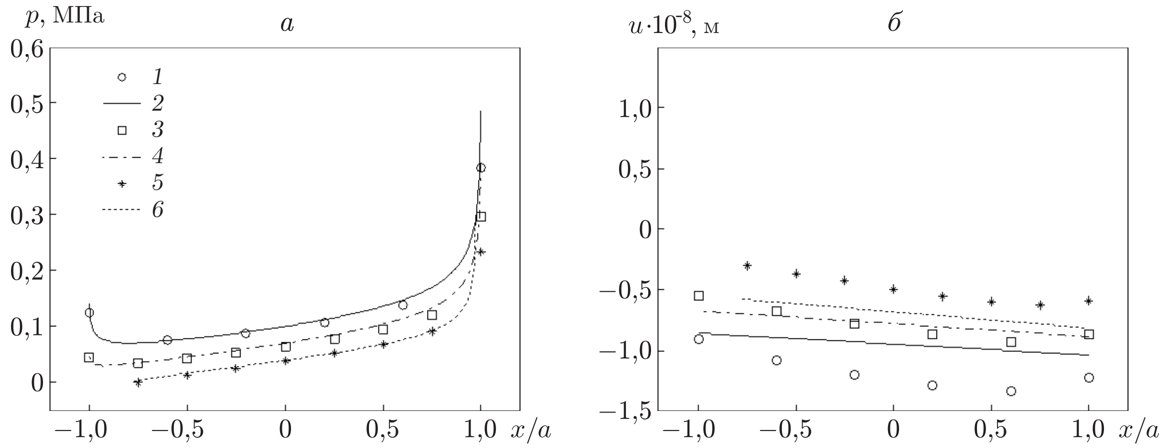

Рис. 6. Распределение контактного напряжения (*а*) и контактного перемещения (*б*) для упругого штампа при $M = 2$ Н · м и различных значениях η:
точки — конечно-элементная модель, линии — аналитическое решение; *1, 2* — $\eta = 0{,}0013$, *3, 4* — $\eta = 0{,}0020$, *5, 6* — $\eta = 0{,}0035$

Заключение. Решена двумерная контактная задача для гладкого упругого штампа, вдавленного в упругую полуплоскость, при последовательном воздействии нормальной силы и изгибающего момента, определено распределение контактного давления и исследована его зависимость от нормальной силы и изгибающих моментов.

Установлено, что если значение коэффициента изгибающего момента меньше критического ($\eta < \eta_c$), то контакт штампа с основанием является полным, если $\eta > \eta_c$, контакт становится неполным.

Получено асимптотическое решение, которое достаточно точно описывает распределение контактного давления.

Результаты, представленные в работе, могут быть использованы при исследовании образования и роста трещин вследствие фреттинг-усталости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sackfield A., Dini D., Hills D. A.** The finite and semi-infinite tilted, flat but rounded punch // Intern. J. Solids Structures. 2005. V. 42. P. 4988–5009.
2. **Sackfield A., Truman C. E., Hills D. A.** The tilted punch under normal and shear load (with application to fretting fatigue) // Intern. J. Mech. Sci. 2001. V. 43. P. 1881–1892.
3. **Churchman C. M., Sackfield A., Hills D. A.** A semi-infinite chamfered contact solution and its application to almost complete contacts // Intern. J. Solids Structures. 2006. V. 43. P. 7048–7060.
4. **Bohorquez L., Dominguez J.** Analysis of the elastic punch-substrate contact under fretting: monotonic and cyclic loading of the punch // Intern. J. Mech. Sci. 2005. V. 47. P. 388–417.
5. **Bohorquez L., Dominguez J.** Characterization of the contact between a punch and a half-infinite substrate in a fretting situation // Intern. J. Mech. Sci. 2007. V. 49. P. 608–621.
6. **Mugadu A., Hills D. A., Limmer L.** An asymptotic approach to crack initiation in fretting fatigue of complete contacts // J. Mech. Phys. Solids. 2002. V. 50. P. 531–547.
7. **Karuppanan S., Hills D. A.** Frictional complete contacts between elastically similar bodies subject to normal and shear load // Intern. J. Solids Structures. 2008. V. 45. P. 4662–4675.
8. **Urban M. R.** Approximate stresses in 2D-flat elastic contact fretting problems // Intern. J. Fatigue. 1999. V. 21. P. S167–S172.
9. **Urban M. R., Jordan E. H.** An approximate expression for elastic stresses in flat punch problems // Wear. 1999. V. 236, N 1. P. 134–143.
10. **Johnson K. L.** Contact mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
11. **Gladwell G. M. L.** Contact problems in the classical theory of elasticity. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff Intern. Publ. B. V., 1980.
12. **Rao A. K.** Stress concentration and singularities at interface corners // J. Appl. Math. Mech. 1971. V. 51, iss. 5. P. 395–406.
13. **Shao G. Q., Hong J., Jiang X. J., et al.** A flat asymptotic frictionless contact subject to normal load and bending moment // J. Mech. 2014. V. 31, N 2. P. 131–138.

Поступила в редакцию 3/II 2014 г.