$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65H05, 65B99

Новые модифицированные оптимальные семейства методов Кинга и Трауба–Островского

Р. Бел[1], В. Канвар[2], К.К. Шарма[3]

[1]School of Mathematics & Computer Applications, Thapar University, Patiala-147 004, India,

[2]University Institute of Engineering and Technology, Panjab University, Chandigarh-160 014, India,

[3]Department of Mathematics, South Asian University, Akbar Bhavan, Chayankya Puri, New Delhi, India

E-mails: vmithil@yahoo.co.in, ramanbehl87@yahoo.in (В. Канвар), yamanbehl81@yahoo.in (Р. Бел), kapilks@fu.ac.in (К.К. Шарма)

Бел Р., Канвар В., Шарма К.К. Новые модифицированные оптимальные семейства методов Кинга и Трауба–Островского // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 1. — С. 31–42.

На основе квадратически сходящегося метода Шредера получено много новых интересных семейств многоточечных итеративных методов четвертого порядка без использования памяти для получения простых корней нелинейных уравнений с применением метода весовых функций. Классическое семейство методов Кинга четвертого порядка и метод Трауба–Островского получены как частные случаи. По предположению Кунга–Трауба, эти методы имеют максимальную эффективность, поскольку для каждого шага требуются только три функциональных значения. Поэтому семейство методов Кинга четвертого порядка и Трауба–Островского — основные результаты данной статьи. Эффективность предлагаемых многоточечных методов сравнивается с эффективностью их ближайших "конкурентов", а именно семейства Кинга, метода Трауба–Островского и метода Джарратта в серии численных экспериментов. Все рассматриваемые здесь методы оказались эффективными и сравнимыми с аналогичными надежными методами, описанными в литературе.

Ключевые слова: *нелинейные уравнения, метод Ньютона, семейство Кинга, метод Трауба–Островского, метод Джарратта, оптимальный порядок сходимости, показатель эффективности.*

Ramandeep Behl, V. Kanwar, Kapil K. Sharma New modified optimal families of King's and Traub–Ostrowski's method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 1. — P. 31–42.

Based on quadratically convergent Schröder's method, we derive many new interesting families of fourth-order multipoint iterative methods without memory for obtaining simple roots of nonlinear equations by using the weight function approach. The classical King's family of fourth-order methods and Traub–Ostrowski's method are obtained as special cases. According to the Kung–Traub conjecture, these methods have the maximal efficiency index because only three functional values are needed per step. Therefore, the fourth-order family of King's method and Traub–Ostrowski's method are the main findings of the present work. The performance of proposed multipoint methods is compared with their closest competitors, namely, King's family, Traub–Ostrowski's method, and Jarratt's method in a series of numerical experiments. All the methods considered here are found to be effective and comparable to the similar robust methods available in the literature.

Key words: *nonlinear equations, Newton's method, King's family, Traub–Ostrowski's method, Jarratt's method, optimal order of convergence, efficiency index.*

1. Введение

Решение нелинейных уравнений вида

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

является типичной и важной задачей науки и техники. Аналитических методов для решения таких уравнений почти не существует. Поэтому можно получить только приближенные решения с использованием численных методов на основе итеративных процедур. Одним из наиболее известных одноточечных оптимальных методов второго порядка, основанных на двух функциональных оценках, является классический метод Ньютона, задаваемый посредством

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0. \tag{1.2}$$

Метод Ньютона для нахождения кратных корней, введенный в работе Шредера [7], задается следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}. \tag{1.3}$$

Этот метод имеет сходимость второго порядка, включая случай наличия кратных корней. Его можно получить путем применения метода Ньютона к функции $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, имеющей простые корни в каждом из кратных корней $f(x)$.

Существуют многочисленные модификации метода Ньютона или методов типа Ньютона [1–9], различными способами улучшающие его локальный порядок сходимости за счет дополнительного оценивания функций и/или производных, главным образом, в точке, итерируемой при помощи этого метода. Цель всех этих модификаций — увеличить локальный порядок сходимости для увеличения показателя эффективности [5, 6, 8].

Многоточечные итеративные методы являются наиболее эффективными методами для численного решения нелинейных уравнений. По предположению Кунга–Трауба [4], при помощи оптимального итеративного метода без памяти на основе n оценок функции можно достичь оптимального порядка сходимости 2^{n-1}. Знаменитый метод Трауба–Островского (также известный как метод Островского) [2, 3], метод Джарратта [1] — примеры оптимальных многоточечных итеративных методов четвертого порядка без памяти. Эти методы являются наиболее эффективными многоточечными итеративными методами четвертого порядка, которые известны в настоящее время. Еще один хорошо известный пример многоточечных методов четвертого порядка с таким же числом оценок функции — семейство Кинга [3], задаваемое как

$$x_{n+1} = w_n - \frac{f(w_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + \gamma f(w_n)}{f(x_n) + (\gamma - 2)f(w_n)}, \tag{1.4}$$

где $w_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ — итерация Ньютона и $\gamma \in \mathbb{R}$.

Исследования с целью нахождения итеративных методов с оптимальной сходимостью второго порядка, не требующих вычисления производной второго порядка, очень важны и интересны с практической точки зрения.

В данной статье мы также построим новые оптимальные семейства метода Шредера для простых корней. Мы используем метод, состоящий в применении весовых функций к дискретизованному методу Шредера (1.3) для получения новых семейств, одинаково эффективных с методами Кинга и Трауба–Островского, для численного решения нелинейных уравнений. Предлагаемые нами семейства итеративных методов так же эффективны, как и существующие классические методы, представленные в литературе.

2. Оптимизированные семейства методов Кинга и Трауба–Островского

Для получения новых оптимальных семейств методов Кинга [3] и Трауба–Островского [2, 3], для которых необходимы две оценки функции и одна оценка ее первой производной на каждую полную итерацию, рассмотрим

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.1}$$

в качестве итерации Ньютона.

Разложив функцию $f(y_n) = f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$ в точке $x = x_n$ в ряд Тейлора, мы получим

$$f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) \cong \frac{f^2(x_n)f''(x_n)}{2f'^2(x_n)}. \tag{2.2}$$

Поэтому мы имеем

$$f''(x_n) \cong \frac{2f'^2(x_n)f(y_n)}{f^2(x_n)}, \tag{2.3}$$

где $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Используя это приближенное значение $f''(x_n)$ в методе Шредера (1.3), мы получим

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left[\dfrac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}\right]. \end{cases} \tag{2.4}$$

Этот метод имеет второй порядок сходимости и удовлетворяет следующему уравнению ошибки:

$$e_{n+1} = -c_2 e_n^2 + O(e_n^3),$$

где $c_k = \dfrac{1}{k!}\dfrac{f^{(k)}(r)}{f'(r)}$, $k = 2, 3, \ldots$.

Однако по предположению Кунга–Трауба [4], приведенный выше метод (2.4) не является оптимальным, поскольку он имеет второй порядок сходимости и требует наличия трех оценок функции на каждую полную итерацию. Поэтому для повышения локального порядка сходимости этого метода мы используем метод весовых функций для построения нашего оптимального семейства этого итеративного метода при помощи простого изменения второго шага. Рассмотрим

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left[\dfrac{f(x_n)}{bf(x_n) - 2f(y_n)}\right] Q\left(\dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{f(x_n)}\right), \end{cases} \tag{2.5}$$

где b — рабочий параметр и $Q\left(\frac{f(x_n)-f(y_n)}{f(x_n)}\right) = Q\left(1 - \frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)$ — вещественнозначная весовая функция, такая что порядок сходимости достигает оптимального уровня 4 без использования других функциональных оценок. Теорема 3.1 показывает, при каких условиях, налагаемых на весовую функцию в (2.5), порядок сходимости достигнет оптимального уровня 4.

3. Порядок сходимости

Теорема 3.1. *Пусть достаточно гладкая функция* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *имеет простой нуль* r *в открытом интервале* D. *Тогда семейство итеративных методов, определяемых посредством* (2.5), *имеет сходимость четвертого порядка, когда*

$$Q(1) = b, \qquad Q'(1) = 2 - b, \qquad Q''(1) = 4(b-1), \qquad |Q'''(1)| \le K, \tag{3.1}$$

где K — *любое конечное вещественное число и удовлетворяет следующему уравнению ошибок*:

$$e_{n+1} = \left(\frac{(Q'''(1) + 30b - 24)c_2^3 - 6bc_2c_3}{6b}\right) e_n^4 + O(e_n^5), \tag{3.2}$$

где $b \ne 0 \in \mathbb{R}$, $e_n = x_n - r$, $c_k = \dfrac{1}{k!}\dfrac{f^{(k)}(r)}{f'(r)}$, $k = 2, 3, \ldots$.

Доказательство. Пусть $x = r$ — простой нуль $f(x)$. Разложив $f(x_n)$ и $f'(x_n)$ в $x = r$ в ряд Тейлора, мы получим

$$f(x_n) = f'(r)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4) + O(e_n^5) \tag{3.3}$$

и

$$f'(x_n) = f'(r)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4) + O(e_n^5) \tag{3.4}$$

соответственно.

Из уравнений (3.3) и (3.4) мы имеем

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (7c_2c_3 - 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{3.5}$$

Используя разложение в ряд Тейлора $f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$ в $x = r$, мы получим

$$f(y_n) = f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = f'(r)(c_2e_n^2 - 2(c_2^3 - c_3)e_n^3 + (5c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4) + O(e_n^5). \tag{3.6}$$

Мы также имеем

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)}{bf(x_n) - 2f(y_n)} = \frac{1}{b} + \frac{2c_2}{b^2}e_n + \left(\frac{(4-6b)c_2^2 + 4bc_3}{b^3}\right)e_n^2 + \\ \left(\frac{8(2b^2 - 3b + 1)c_2^3 + 4(4-5b)bc_2c_3 + 6b^2c_4}{b^4}\right)e_n^3 + O(e_n^4)\end{aligned} \tag{3.7}$$

и

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{f(x_n)} = 1 - c_2e_n + (3c_2^2 - 2c_3)e_n^2 + (10c_2c_3 - 8c_2^2 - 3c_4)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{3.8}$$

Из (3.8) ясно, что $\left(\frac{f(x_n) - f(y_n)}{f(x_n)}\right) - 1$ имеет порядок e_n. Следовательно, мы можем рассмотреть разложение весовой функции Q в ряд Тейлора в окрестности 1. Поэтому мы имеем

$$Q\left(\frac{f(x_n)-f(y_n)}{f(x_n)}\right) = Q\left(1-\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right) = Q(1) + \left(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)Q'(1) + \frac{1}{2!}\left(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)^2 Q''(1) + \frac{1}{3!}\left(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)^3 Q'''(1) + O(e_n^4). \tag{3.9}$$

Используя (3.7), (3.8) и (3.9) в схеме (2.5), мы получим следующее уравнение ошибки:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{f(x_n)}{bf(x_n)-2f(y_n)} Q\left(\frac{f(x_n)-f(y_n)}{f(x_n)}\right) \\ &= \left(1-\frac{Q(1)}{b}\right)e_n - \left(\frac{(b-2)Q(1)+bQ'(1)}{b^2}\right)c_2e_n^2 + \\ &\left(\frac{4b((b-2)Q(1)+bQ'(1))c_3-(4(b^2-4b+2)Q'(1)+b(bQ''(1)+4(2b-1)Q'(1))c_2^2)}{2b^3}\right)e_n^3 + \\ &\left(\frac{Ac_2^3+Bc_2c_3+18b^2((b-2)Q(1)+bQ'(1))c_4}{6b^4}\right)e_n^4 + O(e_n^5), \end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned} A &= 12(2b-1)(b^2-6b+4)Q(1) + 3b((26b^2-28b+8)Q'(1) + b(7b-2)Q''(1) + b^3Q'''(1)), \\ B &= -6b((7b^2-28b+16)Q(1) + 2b(bQ''(1) + (7b-4)Q'(1))). \end{aligned}$$

Для получения итеративного метода четвертого порядка коэффициенты e_n, e_n^2 и e_n^3 в уравнении ошибки (3.10) должны одновременно быть равными нулю. Упростив уравнения (3.10), мы получим следующие уравнения, включающие $Q(1)$, $Q'(1)$, $Q''(1)$, $Q'''(1)$:

$$\begin{cases} Q(1) = b,\ b \neq 0, \\ (b-2)Q(1) = -bQ'(1), \\ 4(b^2-4b+2)Q'(1) = -b(bQ''(1) + 4(2b-1)Q'(1)) \end{cases} \tag{3.11}$$

соответственно.

Решив эти уравнения для $Q(1)$, $Q'(1)$ и $Q''(1)$, мы получим

$$Q(1) = b, \qquad Q'(1) = 2-b, \qquad Q''(1) = 4(b-1), \qquad |Q'''(1)| \leq K, \tag{3.12}$$

где K — любое конечное вещественное число.

С использованием вышеприведенных условий схема (2.5) будет удовлетворять следующему уравнению ошибки:

$$e_{n+1} = \left(\frac{(Q'''(1)+30b-24)c_2^3 - 6bc_2c_3}{6b}\right)e_n^4 + O(e_n^5), \tag{3.13}$$

где $b \neq 0$.

Это показывает, что схема (2.5) достигает оптимального порядка сходимости 4 при использовании только трех функциональных оценок на каждую полную итерацию. Это завершает доказательство теоремы 3.1. □

4. Особые формы

Теорема 3.1 показывает, что при использовании некоторых конкретных значений b и $Q'''(1)$ можно получить модифицированные семейства итеративных методов, а именно методы Кинга и Трауба–Островского. В данном разделе мы рассмотрим особую форму предлагаемой схемы (2.5), зависящую от весовой функции $Q(x)$.

Форма 1. Рассмотрим следующую весовую функцию:

$$Q(x) = \frac{1}{6}(x-1)(K(x-1)^2 - 12(x-2)) + b(2x^2 - 5x + 4), \tag{4.1}$$

где $Q'''(1) = K$ и K — любое конечное вещественное число.

Видно, что вышеупомянутая весовая функция $Q(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1. Поэтому мы получим новый оптимальный общий класс методов четвертого порядка, задаваемый посредством

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \\ \qquad \dfrac{12f(x_n)f(y_n)(f(x_n)+f(y_n)) - 6bf(x_n)(f^2(x_n)+f(x_n)f(y_n)+2f^2(y_n)) + Kf^3(y_n)}{6f(x_n)f'(x_n)(2f(y_n)-bf(x_n))}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Теперь мы имеем два свободных рабочих параметра, а именно b и K в вышеприведенном общем классе методов (4.2). Поэтому легко получить несколько оптимальных семейств методов четвертого порядка. Ниже мы приводим некоторые важные примеры предлагаемых нами методов, а именно модифицированного семейства метода Кинга и модифицированного семейства метода Трауба–Островского:

Модифицированное семейство метода Кинга (МКМ). Для получения модифицированного семейства метода Кинга, пусть $b = \frac{2}{2-\beta}$, где $\beta \neq 2 \in \mathbb{R}$, формула (4.2) дает

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{12f^3(x_n) + 12f(x_n)f(y_n)[(\beta-1)f(x_n) + \beta f(y_n)] + (\beta-2)Kf^3(y_n)}{12f(x_n)f'(x_n)[f(x_n) + (\beta-2)f(y_n)]}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Это новое оптимальное модифицированное семейство метода Кинга четвертого порядка.

Особые случаи модифицированного семейства Кинга (4.3).
(i) Для $K = 0$ формула (4.3) имеет вид

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f^2(x_n) + (\beta-1)f(x_n)f(y_n) + \beta f^2(y_n)}{f'(x_n)[f(x_n) + (\beta-2)f(y_n)]}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Это хорошо известное семейство Кинга четвертого порядка [3].

(ii) Для $\beta = 1$ и $K = 12$ формула (4.3):

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f^3(x_n) + f(x_n)f^2(y_n) - f^3(y_n)}{f(x_n)f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Это новый оптимальный метод четвертого порядка.
(iii) Для $\beta = 1$ и $K = 1$ формула (4.3):

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{24f^3(x_n) + 24f(x_n)f^2(y_n) - f^3(y_n)}{24f(x_n)f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Это новый оптимальный метод четвертого порядка.
(iv) Для $\beta = 1$ и $K = \frac{1}{2}$ формула (4.3):

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{12f^3(x_n) + 12f(x_n)f^2(y_n) - f^3(y_n)}{12f(x_n)f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Это новый оптимальный метод четвертого порядка.
(v) Для $\beta = 0$ формула (4.3):

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{6f^3(x_n) - 6f^2(x_n)f(y_n) - f^3(y_n)K}{6f(x_n)f'(x_n)(f(x_n) - 2f(y_n))}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Это новое семейство метода Трауба–Островского.

Полуособые случаи семейства Трауба–Островского (4.8). Для различных конкретных значений параметра K из (4.8) могут быть получены следующие многоточечные итеративные методы, например.
(i) Для $K = 0$ формула (4.8) принимает вид

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[\dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} \right]. \end{cases} \tag{4.9}$$

Это хорошо известный метод Трауба–Островского (МТО). Видно, что, когда весовая функция $Q'''(1) = K \to 0$ в (4.8), мы получим несколько многоточечных методов, которые являются сильными “конкурентами” метода Трауба–Островского.

Приведем некоторые важные случаи семейства (4.8).

(ii) Для $K = \frac{1}{100}$ формула (4.8):

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{600f^2(x_n)(f(x_n) - f(y_n)) - f^3(y_n)}{600f(x_n)f'(x_n)[f(x_n) - 2f(y_n)]}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Это новый оптимальный метод четвертого порядка.

(iii) Для $K = \frac{1}{2}$ формула (4.8):

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{12f^2(x_n)(f(x_n) - f(y_n)) - f^3(y_n)}{12f(x_n)f'(x_n)(f(x_n) - 2f(y_n))}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Это еще один новый оптимальный метод четвертого порядка.

(iv) Для $K = 6$ формула (4.8):

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f^3(x_n) - f^2(x_n)f(y_n) - f^3(y_n)}{f(x_n)f'(x_n)(f(x_n) - 2f(y_n))}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Это еще один новый оптимальный метод четвертого порядка.

Форма 2. Рассмотрим следующую весовую функцию:

$$Q(x) = \frac{(b^2 + 2b - 4)x + 4(1 - b)}{2x(b - 1) - b}, \tag{4.13}$$

где $Q'''(1) = \frac{24(b-1)^2}{2-b}$ и $b \neq \{0, 2\}$ — любое конечное вещественное число.

Легко убедиться в том, что вышеупомянутая весовая функция $Q(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1. Поэтому мы получим новое оптимальное семейство методов четвертого порядка, задаваемое как

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = y_n - \dfrac{f(x_n)f(y_n)(b^2 f(x_n) + 4f(y_n) - 2b(f(x_n) + 2f(y_n)))}{f'(x_n)(bf(x_n) - 2f(y_n))((-2 + b)f(x_n) - 2(-1 + b)f(y_n))}. \end{cases} \tag{4.14}$$

Теперь мы имеем один свободный рабочий параметр, а именно b в вышеприведенном общем классе методов (4.14). Поэтому легко получить несколько новых оптимальных методов четвертого порядка. Ниже мы приводим некоторые важные примеры предлагаемых нами методов.

(i) Для $b = \pm\sqrt{2}$ формула (4.14) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} y_n = & x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = & y_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[\dfrac{f(y_n)(f(x_n)+2f(y_n))}{f^2(x_n)-2f^2(y_n)}\right]. \end{cases} \tag{4.15}$$

Это новый оптимальный метод четвертого порядка.
(ii) Для $b = 1$ формула (4.14) дает известный метод Трауба–Островского, который уже обсуждался в (4.9).
(iii) Для $b = \frac{3}{4}$ формула (4.14):

$$\begin{cases} y_n = & x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = & y_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[\dfrac{f(y_n)(3f(x_n)+8f(y_n))}{(3f(x_n)-4f(y_n))(f(x_n)+2f(y_n))}\right]. \end{cases} \tag{4.16}$$

Это еще один новый оптимальный метод четвертого порядка.
(iv) Для $b = -1$ формула (4.14):

$$\begin{cases} y_n = & x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = & y_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[\dfrac{f(y_n)(15f(x_n)-16f(y_n))}{(3f(x_n)-8f(y_n))(5f(x_n)-2f(y_n))}\right]. \end{cases} \tag{4.17}$$

Это еще один новый оптимальный метод четвертого порядка.
(v) Для $b = -2$ формула (4.14):

$$\begin{cases} y_n = & x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = & y_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[\dfrac{f(y_n)(2f(x_n)+3f(y_n))}{(2f(x_n)-3f(y_n))(f(x_n)+f(y_n))}\right]. \end{cases} \tag{4.18}$$

Это еще один новый оптимальный метод четвертого порядка.

Замечание 4.1. Общий класс (4.2) может дать несколько новых оптимальных многоточечных методов четвертого порядка для простых корней путем выбора различных значений параметров, а именно $b \neq 0$ и K.

Замечание 4.2. Общий класс (4.14) может дать несколько новых оптимальных многоточечных методов четвертого порядка для простых корней путем выбора различных значений параметров, а именно $b \neq 0, 2$.

Замечание 4.3. Основной вывод данного раздела следующий: семейство метода Кинга и метод Трауба–Островского — особые случаи предлагаемой нами схемы (2.5).

Замечание 4.4. Здесь следует отметить, что, когда наша весовая функция $Q'''(1) = K \to 0$ в (4.8), мы имеем несколько многоточечных методов, которые являются сильными "конкурентами" известного метода Трауба–Островского.

Замечание 4.5. Здесь следует отметить, что из схемы (2.5) легко можно получить несколько оптимальных семейств методов четвертого порядка путем выбора различных типов весовых функций.

5. Численные эксперименты

В данном пункте мы проверим эффективность новых оптимальных методов. Мы используем методы (4.5), (4.6), (4.7), (4.10), (4.12), (4.16), (4.17), обозначенные МКМ1, МКМ2, МКМ3, МТО1, МТО2, МТО3 и МТО4 соответственно, для решения нелинейных уравнений, данных в табл. 5.1. Сравним их с методом Кинга для $\beta = 1$ (КМ), методом Трауба–Островского (МТО) и методом Джарратта. Сравнение всех вышеупомянутых методов приведено в табл. 5.2 и табл. 5.3. Вычисления были выполнены с использованием C++ в арифметике двойной точности. Используем $\varepsilon = 10^{-15}$ в качестве допустимой ошибки. Для компьютерных программ используются следующие критерии остановки: (i) $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, (ii) $|f(x_{n+1})| < \epsilon$.

Таблица 5.1. Тестовые задачи

№	Задача	$[a, b]$	Корень (r)
1	$\sin x - \frac{x}{2} = 0$	$[1.5, 2]$	1.895494341850281
2	$\cos x - x = 0$	$[0, 2]$	0.739085137844086
3	$e^{x^2+7x-30} - 1 = 0$	$[2.9, 3.5]$	3.0
4	$x^3 - 10 = 0$	$[2, 3]$	2.154434680938721
5	$10xe^{-x^2} - 1 = 0$	$[1, 2]$	1.67963063768884
6	$(x-1)^3 - 1 = 0$	$[1.5, 3.5]$	2.0
7	$\tan^{-1} x - x + 1 = 0$	$[1.5, 3]$	2.132267713546753
8	$\sin^2 x + x = 0$	$[-0.1, 0.5]$	0.0
9	$xe^{-x} - 0.1 = 0$	$[-0.5, 0.5]$	0.111832559108734
10	$x^3 - \cos x + 2 = 0$	$[-2, -1]$	−1.172577977180481
11	$x^4 - x^3 + 11x - 7 = 0$	$[0, 1]$	0.645023941993713

Таблица 5.2. Общее число итераций для аппроксимации нуля функции, общее число оценок функции для различных многоточечных итеративных методов (D — расходящийся, CUR сходится к нежелательному корню)

№	Начальное приближение	КМ $\beta = 1$	МКМ1 $\beta = 1, Q'''(1) = 12$	МКМ2 $\beta = 1, Q'''(1) = 1$	МКМ3 $\beta = 1, Q'''(1) = \frac{1}{2}$
1	1.5	(5, 15)	(4, 12)	(4, 12)	(4, 12)
	2.0	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)
2	0.0	(5, 15)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)
	2.0	(3, 9)	(3, 9)	(2, 6)	(2, 6)
3	2.9	D	D	(10, 30)	(9, 27)
	3.5	(7, 21)	(6, 18)	(6, 18)	(6, 18)
4	2.0	(3, 9)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)
	3.0	(4, 12)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)
5	1.0	(4, 12)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)
	2.0	(6, 18)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)
6	1.5	(8, 24)	(8, 24)	(6, 18)	(6, 18)
	3.5	(4, 12)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)
7	1.5	(3, 9)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)
	3.0	(3, 9)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)
8	−0.1	(5, 15)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)
	0.5	(5, 15)	(4, 12)	(4, 12)	(3, 9)
9	−0.5	(4, 12)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)
	0.5	CUR	(5, 15)	(4, 12)	(4, 12)
10	−2.0	(4, 12)	(3, 9)	(4, 12)	(3, 9)
	−1.0	(4, 12)	(3, 9)	(2, 6)	(2, 6)
11	0.0	(3, 9)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)
	1.0	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(2, 6)

Таблица 5.3. Общее число итераций для аппроксимации нуля функции, общее число оценок функции для различных многоточечных итеративных методов

№	Начальное приближение	MTO	MTO1 $Q'''(1) = \frac{1}{100}$	MTO2 $Q'''(1) = 6$	MTO3 $b = \frac{3}{4}$	MTO4 $b = -1$	JM
1	1.5	(2, 6)	(2, 6)	(3, 9)	(2, 6)	(4, 12)	(4, 12)
	2.0	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(3, 9)
2	0.0	(2, 6)	(2, 6)	(3, 9)	(2, 6)	(3, 9)	(4, 12)
	2.0	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(3, 9)
3	2.9	(3, 9)	(3, 9)	(5, 15)	(3, 9)	(4, 12)	(6, 18)
	3.5	(5, 15)	(5, 15)	(5, 15)	(5, 15)	(6, 18)	(11, 33)
4	2.0	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(3, 9)
	3.0	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(3, 9)	(4, 12)
5	1.0	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(2, 6)	(3, 9)	(4, 12)
	2.0	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(2, 6)	(4, 12)	(5, 15)
6	1.5	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(6, 18)
	3.5	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(6, 18)
7	1.5	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(3, 9)
	3.0	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(3, 9)
8	−0.1	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(2, 6)	(3, 9)	(4, 12)
	0.5	(3, 9)	(4, 12)	(4, 12)	(3, 9)	(3, 9)	(5, 15)
9	−0.5	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(5, 15)
	0.5	(3,9)	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(4, 12)	(5, 15)
10	−2.0	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(2, 6)	(3, 9)	(5, 15)
	−1.0	(2, 6)	(2, 6)	(3, 9)	(2, 6)	(3, 9)	(4, 12)
11	0.0	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(2, 6)	(3, 9)
	1.0	(3, 9)	(3, 9)	(3, 9)	(2, 6)	(2, 6)	(3, 9)

6. Выводы

В данной статье мы вносим дополнительный вклад в разработку теории итерационных процессов и предлагаем некоторые усовершенствования метода Шредера второго порядка с использованием метода весовых функций. Мы получили два широких общих класса итеративных методов без памяти. Можно легко получить несколько новых оптимальных семейств методов четвертого порядка из схемы (2.5) путем выбора различных весовых функций. Кроме того, существующие классические методы четвертого порядка, а именно методы Кинга и Трауба–Островского, являются особыми случаями предлагаемых нами схем. Предлагаемые методы были протестированы на ряде примеров с использованием различных начальных приближений. Результаты, представленные в табл. 5.2 и табл. 5.3, подтверждают, что члены семейства так же конкурентны, как и наиболее эффективные методы, описанные в литературе. Для каждой итерации этих методов требуется одна оценка функции и две оценки ее первой производной или две оценки функции и одна оценка производной первого порядка, так что значение их индекса эффективности составляет 1.587. Кроме того, мы определили, что для меньших значений $Q'''(1)$ (весовой функции), для модифицированного семейства метода Кинга необходимо меньшее число итераций по сравнению с классическим семейством Кинга. И, наконец, мы можем заключить, что методы, представленные в данной статье, так же конкурентноспособны, как и другие общепризнанные эффективные методы, а именно методы Кинга, Трауба–Островского и Джарратта. В настоящее время мы занимаемся расширением этих методов для случая наличия кратных корней и системы нелинейных уравнений.

Благодарности. Рамандин Бел благодарит за финансовую поддержку CSIR (Нью-Дели, Индия).

Литература

1. **Jarratt P.** Some efficient fourth-order multipoint methods for solving equations // BIT. — 1969. — № 9. — P. 119–124.
2. **Kanwar V., Behl Ramandeep, Sharma K.K.** Simply constructed family of an Ostrowski's method with optimal order of convergence // Comput. Math. Appl. — 2011. — № 62. — P. 4021–4027.
3. **King R.F.** A family of fourth order methods for nonlinear equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — № 10. — P. 876–879.
4. **Kung H.T., Traub J.F.** Optimal order of one-point and multipoint iteration // J. Assoc. Comput. Mach. — 1974. — № 21. — P. 643–651.
5. **Ostrowski A.M.** Solutions of Equations and System of Equations. — New York: Academic Press, 1960.
6. **Ostrowski A.M.** Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces. — New York: Academic Press, 1973.
7. **Schröder E.** Über unendlich viele algorithmen zur auflösung der gleichungen // Math. Ann. — 1870. — № 2. — P. 317–365.
8. **Traub J.F.** Iterative Methods for the Solution of Equations. — Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1964.
9. **Werner W.** Some improvement of classical methods for the numerical solution of nonlinear equations // Lect. Notes Math. — 1981. — № 878. — P. 426–440.

Поступила в редакцию 31 января 2013 г.