

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛАЗМЫ
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ
В СОПЛЕ С ВАКУУМНЫМ ЗАЗОРОМ У СТЕНОК

УДК 533.9

В. В. Никулин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

В проблеме управляемого термоядерного синтеза большое место занимают исследования сильных нелинейных волн и течений плазмы [1]. В [2, 3] для нагрева плазмы предложено использовать ударную волну, возникающую при квазистационарном истечении замагниченной плазмы через сопло. В связи с этим изучение стационарных течений плазмы в соплах при наличии магнитного поля весьма актуально [1].

В данной работе рассматривается стационарное осесимметричное течение замагниченной плазмы в сопле. В отличие от ранее опубликованных работ предполагается, что между стенками сопла и плазмой существует вакуумный зазор, в котором имеется магнитное поле. Чтобы выяснить, какое влияние оказывает наличие зазора на движение плазмы, отвлекаясь от других факторов, рассматриваем наиболее простую одножидкостную МГД-модель идеально проводящей несжимаемой плазмы. Стенки сопла также считаются идеально проводящими. Кроме того, используется длинноволновое вдоль оси симметрии приближение. Оказывается, что уже в такой модели появляются качественно новые эффекты, обусловленные наличием зазора и магнитного поля в нем.

1. Постановка задачи. Рассматривается идеальная (невязкая, нетеплопроводная и обладающая бесконечной проводимостью) несжимаемая плазма. Течение считается стационарным и осесимметричным. Вводится цилиндрическая система координат (r, φ, z) с осью z , направленной вдоль оси симметрии. Плазма занимает область $z \geq 0, r \leq r_1(z)$ (r_1 — радиус свободной поверхности плазмы). Задаются параметры течения при $z = 0$. Исследуется его эволюция в зависимости от координаты z .

С целью перехода к безразмерным величинам вводятся масштабы длины, скорости и плотности. За единицу длины принимается характерный масштаб изменений по оси z , за единицу скорости — характерная величина осевой компоненты скорости при $z = 0$, плотность плазмы полагается равной единице. Магнитное поле обезразмеривается по плотности и характерной скорости. Далее все величины, если не указано особо, берутся в безразмерном виде.

Введем обозначения: $(u, v, w), (H_1, H_2, H_3)$ — компоненты скорости и магнитного поля, соответствующие (r, φ, z) , A — азимутальная компонента векторного потенциала, p — давление, δ — безразмерное значение r_0 при $z = 0$ (r_0 — радиус сопла (известная функция z)). Считается, что $\delta \ll 1$. В силу осевой симметрии внутри плазменного шнура полагается $v = 0, H_2 = 0$. В зазоре в общем случае $H_2 \neq 0$.

С целью перехода к длинноволновому приближению совершаются растяжения координат и функций по соотношениям $r^2 \rightarrow \delta^2 \eta, z \rightarrow z, 2ur \rightarrow \delta^2 q, w \rightarrow w, p \rightarrow p, 2H_1 r \rightarrow \sqrt{4\pi} \delta^2 h, H_3 \rightarrow \sqrt{4\pi} H, 2rA \rightarrow \sqrt{4\pi} \delta^2 a$. Границы $r_1(z)$ и $r_0(z)$ переходят в $\eta_1(z)$ и $\eta_0(z)$, причем, согласно определению $\delta, \eta_0(0) = 1$.

Тогда в рамках одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики с учетом осевой симметрии движение плазмы опишем уравнениями

$$\delta^2(qq_\eta - q^2/(2\eta) + wq_z) = -4\eta r_\eta + \delta^2(hh_\eta - h^2/(2\eta) + Hh_z),$$

$$q\omega_\eta + w\omega_z = -P_z + hH_\eta + HH_z, \quad \omega_z + q\eta = 0, \quad \omega a_z + qa_\eta = 0, \quad (1.1)$$

$$h = -a_z, \quad H = a_\eta, \quad P = p + H^2/2 + \delta^2 h^2/(8\eta)$$

(нижние индексы означают частное дифференцирование по соответствующим независимым переменным).

В качестве краевых условий принимаем следующие: при $\eta = 0$

$$q = h = 0; \quad (1.2)$$

на свободной поверхности ($\eta = \eta_1$) нормальная компонента магнитного поля равна нулю, величина P непрерывна, и выполнено кинематическое условие:

$$a_z + a_\eta \eta_{1z} = 0; \quad (1.3)$$

$$q = w\eta_{1z}; \quad (1.4)$$

на стенках трубы нормальная компонента магнитного поля также полагается равной нулю.

Уравнения для магнитного поля в вакуумном зазоре имеют вид

$$4(\eta H_{*\eta})_\eta + \delta^2 H_{*zz} = 0, \quad 4\eta h_{*\eta\eta} + \delta^2 h_{*zz} = 0, \quad \varkappa = \text{const}, \quad (1.5)$$

где H_* , h_* — величины H и h в зазоре; $\sqrt{4\pi\delta\varkappa} = H_{*2r}$; H_{*2} — азимутальная компонента магнитного поля в зазоре.

При переходе к длинноволновому приближению слагаемые в (1.1), (1.5), пропорциональные δ^2 , опускаются. В результате из (1.5) получим $H_* = H_*(z)$. Тогда, используя условия на магнитное поле на стенках трубы и свободной поверхности, находим $H_* = \Phi/(\eta_0 - \eta_1)$, $\Phi = \text{const}$. Отсюда с учетом малости δ^2 условие непрерывности P при $\eta = \eta_1$ примет вид

$$P = \Phi^2/[2(\eta_0 - \eta_1)^2] + \varkappa^2/(2\eta_1). \quad (1.6)$$

Уравнения, полученные из (1.1), после пренебрежения слагаемыми с δ^2 преобразуются аналогично [4]. Вводятся новые независимые переменные z' , ν ($\nu \in [0, 1]$) по соотношениям $z = z'$, $\eta = R(z', \nu)$, где R удовлетворяет уравнению и краевым условиям:

$$wR_{z'} = q; \quad R(z', 0) = 0, \quad R(z', 1) = \eta_1, \quad R(0, \nu) = \eta_{10\nu}$$

(η_{10} — значение η_1 при $z' = 0$). При этом неизвестная граница $\eta_1(z)$ переходит в известную $\nu = 1$.

Для операторов дифференцирования запишем

$$\frac{\partial R}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{\partial R}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial R}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \nu}.$$

Тогда система (1.1) в переменных z' , ν после пренебрежения слагаемыми с δ^2 и исключения q принимает вид (далее штрих при z' опускается)

$$P_\nu = 0, \quad w\omega_z = -P_z + HH_z, \quad (wR_\nu)_z = 0, \quad \omega a_z = 0, \quad hR_\nu = R_z a_\nu, \quad HR_\nu = a_\nu. \quad (1.7)$$

Здесь учтено, что $P_\nu = 0$, $a_z = 0$. Полагаем, что $w \neq 0$. Тогда из уравнения $\omega a_z = 0$ следует $a = a(\nu)$. Далее считается, что $a = a(\nu)$. С учетом $a = a(\nu)$, $\eta_1(z) = R(z, 1)$ и определения R краевые условия (1.2)–(1.4) выполняются автоматически. С помощью (1.6) из (1.7) исключается P . Уравнения интегрируются по z от 0 до z и разрешаются относительно η_0 . В результате получим

$$\eta_0 = R_1 + \Phi \left[\frac{\Phi^2}{(1 - R_{10})^2} - \psi - \frac{\varkappa^2}{R_1} + \frac{\varkappa^2}{R_{10}} + \left(\frac{a_\nu}{R_1} \right)^2 - \left(\frac{a_\nu}{R_{10}} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (1.8)$$

$$R(\nu, z) = \int_0^\nu w_0 R_{10} (w_0^2 + \psi)^{-1/2} d\nu, \quad R_1 = R(1, z), \quad R_{10} = R(1, 0)$$

($\psi = w^2 - w_0^2$, $w_0(\nu)$ — значение w при $z = 0$). Уравнения (1.8) выражают неявную зависимость $\psi(z, \nu)$, которую и требуется найти.

Для того чтобы в чистом виде выделить эффект влияния вакуумного зазора с магнитным полем на течение плазмы, первоначально исследуем (1.8) в случае, когда $\alpha = 0$, $a_\nu = 0$. Это означает, что в зазоре равна нулю азимутальная компонента поля, а внутри плазменного шнура магнитное поле отсутствует. Затем проанализируем случай $\alpha \neq 0$, $a_\nu \neq 0$.

Утверждение. Пусть $\alpha = 0$, $a_\nu = 0$, функция $w_0(\nu)$ ограничена ($w_0(\nu) \geq \gamma > 0$), γ — постоянная,

$$2\lambda = \frac{(1 - R_{10})^3}{\Phi^2} - R_{10} \int_0^1 w_0^{-2} d\nu,$$

$$2\lambda_1 = \Phi \left[\frac{\Phi^2}{(1 - R_{10})^2} + \gamma^2 \right]^{-3/2} - \int_0^1 w_0 R_{10} (w_0^2 - \gamma^2)^{-3/2} d\nu.$$

Считается, что $\lambda_1 < 0$. Величина ψ рассматривается на интервале

$$-\gamma^2 < \psi < \Phi^2 / (1 - R_{10})^2.$$

Разделяются случаи:

1. $\lambda > 0$. Тогда решение существует при всех $\eta_0 > \eta_{0*}$, $\eta_{0*} < 1$, где η_{0*} — решение некоторого интегрального уравнения, причем при возрастании η_0 от η_{0*} до ∞ увеличиваются ψ , w , а R_1 убывает до конечных значений при $\eta_0 \rightarrow \infty$.

2. $\lambda < 0$. Решение существует при $\eta_{0*} < \eta_0 < \eta_0(l)$, $\eta_{0*} < 1$, $\eta_0(l) > 1$:

$$\eta_0(l) = \Phi \left[\frac{\Phi^2}{(1 - R_{10})^2} + \gamma^2 \right]^{-1/2} + \int_0^1 w_0 R_{10} (w_0^2 - \gamma^2)^{-1/2} d\nu, \quad (1.9)$$

причем при возрастании η_0 от η_{0*} до $\eta_0(l)$ убывают ψ , w , а R_1 увеличивается.

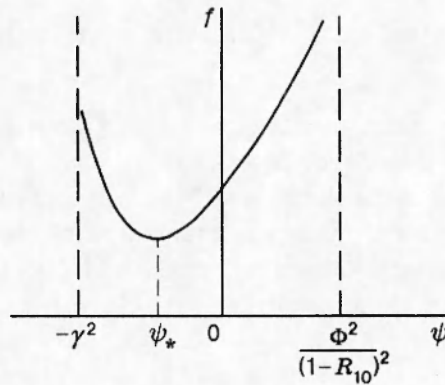
В обоих случаях при $\eta \rightarrow \eta_{0*}$ производные ψ и R_1 по η_0 по модулю стремятся к бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (1.8) $\alpha = 0$, $a_\nu = 0$. Тогда, как следует из (1.8), ψ не зависит от ν . Рассмотрим правую часть (1.8) как функцию ψ и обозначим ее через $f(\psi)$ (R_1 также рассматривается как функция ψ). Тогда из (1.8) вытекает, что $\psi = \psi(\eta_0)$. Исследуем эту зависимость.

На указанном выше интервале $f(\psi) > 0$. Легко убедиться, что $f''(\psi) > 0$. Отсюда вытекает, что $f'(\psi)$ — монотонно возрастающая функция. Из выражения для $f'(\psi)$ имеем $f'(-\gamma^2) = \lambda_1 < 0$, $f'(0) = \lambda$.

1. Пусть $\lambda > 0$. В силу монотонного возрастания $f'(\psi)$ и неравенства $f'(-\gamma^2) < 0$ график функции $f(\psi)$ имеет вид, качественно изображенный на рисунке, откуда видно, что если η_0 увеличивается (сопло расширяется), то $f(\psi)$, ψ , а следовательно, и w возрастают и решение существует при всех $\eta_0 > 1$, если η_0 уменьшается (сопло сужается), то $f(\psi)$, ψ , а значит, и w убывают и решение существует лишь для $\eta_0 \geq \eta_{0*}$, $\psi \geq \psi_*$, где ψ_* находится из уравнения $f'(\psi_*) = 0$, а $\eta_{0*} = f(\psi_*)$.

2. Пусть $\lambda < 0$. В этом случае $f'(0) < 0$ и функция $f(\psi)$ имеет минимум правее начала координат. Отсюда следует, что если η_0 увеличивается, то $f(\psi)$ возрастает, а ψ и w убывают, причем решение существует до тех пор, пока ψ не достигнет значения $-\gamma^2$.



Таким образом, решение существует для $\eta_0 \leq \eta_0(l)$, где $\eta_0(l)$ выражается согласно (1.9). Из определения w вытекает, что при $\eta_0 = \eta_0(l)$ имеем $w = 0$ для ν , задаваемых уравнением $w_0(\nu) = \gamma$. Если η_0 уменьшается, то $f(\psi)$ убывает, а ψ и w возрастают, причем решение существует для $\eta_0 \geq \eta_{0*}$, $\psi \leq \psi_*$, где ψ_* есть решение уравнения $f'(\psi_*) = 0$.

Очевидно, что в обоих случаях производные от ψ по η_0 по модулю стремятся к ∞ при $\eta_0 \rightarrow \eta_{0*}$, $\psi \rightarrow \psi_*$. Зависимость \bar{n}_1 от η_0 следует из монотонного убывания R_1 как функции ψ .

Для математической общности рассмотрим случай $\lambda_1 > 0$. Физически такое течение мало реально, поскольку при этом условии функция $(w_0^2 - \gamma^2)^{-3/2}$ должна быть интегрируема на $[0, 1]$. Пусть выполнены условия утверждения, за исключением неравенства $\lambda_1 < 0$. Полагаем $\lambda_1 \geq 0$. Тогда решение существует при всех $\eta_0 \geq \eta_0(l)$, причем ψ растет с увеличением η_0 .

Доказательство вытекает из того, что функция $f(\psi)$ при $\lambda_1 \geq 0$ на отрезке $[-\gamma^2, \Phi^2(1 - R_{10})^{-2}]$ монотонна.

Таким образом, из утверждения следует, что зависимость ψ , w , R_1 от η_0 качественно различна в зависимости от знака λ . По аналогии с течениями мелкой воды или газа будем называть течения с $\lambda < 0$ докритическими, а с $\lambda > 0$ — сверхкритическими. В докритическом режиме в расширяющемся сопле осевая скорость убывает, в сужающемся возрастает, в сверхкритическом режиме — наоборот.

2. Учет азимутальной компоненты магнитного поля в зазоре и поля внутри плазмы. Проанализируем, как указанные параметры влияют на характер течения. Первоначально положим в (1.8) $a_\nu = 0$, $\varkappa \neq 0$. В этом случае ψ опять не зависит от ν и можно рассматривать R_1 как функцию ψ . Введем обозначения:

$$g(\psi) = \Phi^2(1 - R_{10})^{-2} - \psi - \varkappa^2/R_1 + \varkappa^2/R_{10}, \quad g_1(\psi) = \Phi^2(1 - R_{10})^{-2} - \alpha_1\psi,$$

$$G_1(\psi) = \Phi^2(1 - R_{10})^{-2} - \alpha_2\psi, \quad G_2(\psi) = \Phi^2(1 - R_{10})^{-2} - \alpha_3\psi,$$

$g_2(\psi) = G_1$, если $\psi \geq 0$, $g_2(\psi) = G_2$, если $\psi < 0$, $f = R_1 + \Phi/g^{1/2}$, $f_1 = R_1 + \Phi/g_1^{1/2}$, $f_2 = R_1 + \Phi/g_2^{1/2}$, $F_1 = R_1 + \Phi/G_1^{1/2}$, $F_2 = R_1 + \Phi/G_2^{1/2}$, α_1 определяется условием $g'_1(0) = g'(0)$, α_2 — условием $G_1(\psi_0) = g(\psi_0) = 0$ (такое ψ_0 существует в силу непрерывности и монотонности $g(\psi)$), α_3 — условием $G_2(-\gamma^2) = g(-\gamma^2)$.

Исследуем свойства функции $g(\psi)$ на отрезке $-\gamma^2 \leq \psi \leq \psi_0$, дифференцируя ее дважды, найдем

$$g'(\psi) < -1,$$

$$4g''(\psi) = -2\varkappa^2 R_1^{-3} \left(\int_0^1 w_0 R_{10} (w_0^2 + \psi)^{-3/2} d\nu \right)^2 + 3\varkappa^2 R_1^{-2} \int_0^1 w_0 R_{10} (w_0^2 + \psi)^{-5/2} d\nu.$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, легко получить, что $g''(\psi) > 0$. Таким образом, $g(\psi)$ — выпуклая вниз, монотонно убывающая положительная функция. Отсюда и из определения g_1, g_2 следуют соотношения $g_1 \leq g \leq g_2$, $\alpha_1 = g'(0)$, $\alpha_3 < g'(0) < \alpha_2 < -1$. Тогда

$$f_2(\psi) \leq f(\psi) \leq f_1(\psi); \quad (2.1)$$

$$f'(\pm 0) = f'_1(\pm 0), \quad f'(\pm 0) > f'_2(\pm 0), \quad f'(\pm 0) < f'_2(\mp 0)$$

($f'(\pm 0)$ — производная f_2 в нуле справа или слева).

Видно, что результаты утверждения напрямую переносятся на функции f_1, F_1, F_2 с заменой λ на производную в нуле от соответствующей функции. Отсюда следует, что качественный вид f_1, F_1, F_2 подобен $f(\psi)$ (см. рисунок). В силу того что f ограничена неравенствами (2.1), качественные закономерности поведения течения сохраняются и в рассматриваемом случае, т. е. при $\varkappa \neq 0$. При этом условия до- и сверхкритичности течения соответственно примут вид $f'_2(-0) < 0$ и $f'_2(+0) > 0$. При выполнении этих условий гарантируется качественное подобие поведения решений с $\varkappa = 0$ и $\varkappa \neq 0$. Для физических оценок достаточно сохранить критерий $f'(0) > 0$ или $f'(0) < 0$, поскольку в этом случае локально вблизи нуля сохраняется одинаковое поведение $f(\psi)$ как при $\varkappa = 0$, так и при $\varkappa \neq 0$.

Оценку влияния магнитного поля внутри плазмы на характер течения сделаем для частного случая, когда поле внутри плазмы и осевая компонента скорости при $z = 0$ не зависят от радиуса. Таким образом, полагаем $w_0 = \text{const}$, $a = H_0 R_{10} \nu$ (H_0 — безразмерная осевая компонента магнитного поля в плазме при $z = 0$). Тогда из (1.8) получим

$$R = R_1(\psi)\nu, \quad R_1 = w_0 R_{10} (w_0^2 + \psi)^{-1/2};$$

$$f(\psi) = R_1 + \Phi [\Phi^2 (1 - R_{10})^{-2} - \psi (1 - H_0^2/w_0^2) - \varkappa^2/R_1 + \varkappa^2/R_{10}]^{-1/2}. \quad (2.2)$$

Отсюда видно, что возможны два случая.

1. $1 - H_0^2/w_0^2 > 0$. Вводя $\Phi_* = \Phi(1 - H_0^2/w_0^2)^{-1/2}$, $\varkappa_* = \varkappa(1 - H_0^2/w_0^2)^{-1/2}$, сводим задачу к предыдущей, где вместо Φ будет Φ_* , вместо \varkappa — \varkappa_* . Таким образом, достаточно малое внутреннее поле не оказывает влияния на качественное поведение течения.

2. $1 - H_0^2/w_0^2 < 0$. При таком условии с целью качественного понимания ограничимся исследованием случая $\varkappa = 0$. При этом $f'(\psi) < 0$. Тогда с ростом η_0 увеличивается $f(\psi)$, следовательно, ψ и w_0 убывают. Если η_0 уменьшается, то все наоборот. Таким образом, в данном случае течение всегда докритическое. Отсюда вытекает, что достаточно большое поле внутри плазмы сильно влияет на характер течения.

3. Обсуждение результатов. Отметим наиболее существенное качественное отличие течений в соплах с вакуумным зазором и без него. Рассмотрим условия, когда реализуется докритический режим течения.

Условие докритичности есть $f'(0) < 0$. Выражая f согласно (2.2) и считая, что поле внутри плазмы достаточно мало, т. е. реализуется случай $1 - H_0^2/w_0^2 > 0$, найдем, что неравенство $f'(0) < 0$ выполняется, если

$$\frac{(1 - R_{10})^3}{\Phi_*^2} + \frac{\varkappa_*^2 (1 - R_{10})^3}{2R_{10} \Phi_*^2} \int_0^1 w_0^{-2} d\nu - R_{10} \int_0^1 w_0^{-2} d\nu < 0.$$

Переходя к размерным переменным, считая $w_0 = \text{const}$, получим

$$\frac{H_{*30}^2}{4\pi\rho w_0^2} > \left[\left(1 - \frac{H_{30}^2}{4\pi\rho w_0^2} \right) + \frac{H_{*20}^2}{8\pi\rho w_0^2} \right] \left(\frac{r_{00}^2}{r_{10}^2} - 1 \right), \quad (3.1)$$

где H_{*30}, H_{*20} — осевая и азимутальная компоненты магнитного поля в зазоре при $z = 0$,

$r = r_{10}$; H_{30} — осевая компонента магнитного поля при $z = 0$ внутри плазмы; r_{10} , r_{00} — радиусы свободной поверхности плазменного шнура и сопла при $z = 0$ соответственно; w_0 — размерная осевая компонента скорости течения плазмы при $z = 0$; ρ — плотность плазмы. Аналогично находятся условия и для сверхкритического режима.

Из (3.1) следует, что режим течения определяется не только соотношением между величиной магнитного поля и аксиальной скоростью, но и геометрией течения (отношением r_{00} к r_{10}). В этом состоит существенное отличие течений с вакуумным зазором у стенок от течений, вплотную прилегающих к ним. Так, при одном и том же соотношении между магнитным полем и осевой компонентой скорости, изменяя отношение r_{00} к r_{10} , течение из докритического можно перевести в сверхкритическое и наоборот.

Отметим, что движения плазмы в до- или сверхкритическом режиме, согласно утверждению, качественно подобны течениям идеального газа в соплах. Так, при дозвуковом течении газ в сужающемся сопле ускоряется, в расширяющемся замедляется, а при сверхзвуковом — наоборот. Таким образом, течение газа зависит от отношения его скорости к скорости звука. В рассматриваемом случае характер течения зависит от соотношения между скоростью потока и скоростью длинных волн, распространяющихся по поверхности плазмы.

Обсудим применимость и значение рассматриваемой модели. Выбор модели несжимаемой плазмы обусловлен следующими причинами:

1) возможно построение строгой достаточно наглядной теории, на ее основе корректно в чистом виде исследуются эффекты, присущие несжимаемым течениям, которые в том или ином виде будут проявляться и в более сложных случаях;

2) на основе полученных результатов можно усложнить анализ (например, учесть сжимаемость). Таким образом, настоящие результаты могут служить основой для дальнейшего развития теории.

Кроме того, модель несжимаемой плазмы сама по себе представляет интерес. Она применима не только для медленных течений, но и для быстрых в том случае, если давление внутри плазмы меняется не очень сильно при ее движении в сопле. Поскольку давление внутри плазмы определяется давлением магнитного поля в зазоре, то давление изменится мало, если вакуумный зазор будет меняться не слишком сильно на протяжении всего движения плазмы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01771).

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле. Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 3–87.
2. Буйко А. М., Гаранин С. Ф., Губков Е. В. и др. Магнитогидродинамический расчет нагрева замагниченной плазмы ударной волной при сверхзвуковом истечении из сопла // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Вып. 3(14). С. 30–32.
3. Буйко А. М., Волков Г. И., Гаранин С. Ф. и др. Исследование возможности получения термоядерной замагниченной плазмы в системе с магнитным обжатием — МАГО // Докл. РАН. 1995. Т. 344, № 3. С. 323–327.
4. Никулин В. В. Полный вихрь с осевой скоростью в трубе переменного радиуса // ПММ. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 49–53.

Поступила в редакцию 6/II 1996 г.,
в окончательном варианте — 25/III 1996 г.