и оболочек вращения.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 4.
5. Эплеби Е., Прагер В. Об одной задаче вязкопластичности.— Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикл. мех., 1962, т. 29, № 2.
6. Косоруков С. Н. Вязкопластическая деформация кольца.— ПМ, 1976, т. 12, № 11.

Поступила 9/VII 1984 г.

УДК 539.376

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА О ДЕФОРМИРОВАНИИ МЕМБРАНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. Ю. ЦВЕЛОДУБ

(*Новосибирск*)

1. Обратные задачи о деформировании мембраны в условиях ползучести за заданное время в выпуклую поверхность при минимальных энергетических затратах возникают, например, при расчете технологического оборудования для обработки материалов давлением в режиме ползучести [1].

Рассмотрим мембрану, занимающую в плоскости x_1Ox_2 область S, ограниченную контуром γ, и деформирующуюся под действием внешних сил q, нормальных к ее плоскости, и p_k ($k = 1, 2$), приложенных к γ и лежащих в ее плоскости. Уравнения равновесия имеют вид [2]

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} = 0 \quad (k = 1, 2), \quad h\sigma_{kl}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l} = -q, \tag{1.1}$$

где σ_{kl} (k, $l = 1$, 2) — компоненты тензора напряжений; h — толщина мембраны; w — ее прогиб; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Компоненты тензора деформаций ε_{kl} (k, $l = 1$, 2) связаны с компонентами перемещений u_k ($k = 1$, 2) в плоскости x_1Ox_2 и прогибом w следующими зависимостями [2]:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_k}\frac{\partial w}{\partial x_l} \quad (k, l = 1, 2). \tag{1.2}$$

Считаем, что полные деформации материала мембраны складываются из упругих деформаций, подчиняющихся закону Гука, и деформаций ползучести:

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn} + \varepsilon^c_{kl} \quad (k, l = 1, 2), \tag{1.3}$$

причем скорости деформаций ползучести $\eta_{kl} = \overset{\circ}{\varepsilon}{}^c_{kl}$ (точка означает дифференцирование по времени t) являются потенциальными функциями напряжений

$$\eta_{kl} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} \quad (k, l = 1, 2), \tag{1.4}$$

где $\Phi = \Phi(\sigma_{kl})$ — потенциал ползучести, представляющий собой выпуклую однородную степени $n + 1$ функцию относительно σ_{kl} (k, $l = 1$, 2) [3]. Тогда $\Phi = [1/(n + 1)]W$, где $W = \sigma_{kl}\eta_{kl}$ — удельная мощность рассеиваемой при ползучести энергии, что влечет выпуклость функций $W = W(\sigma_{kl})$ и $W = W(\eta_{kl})$ [3], для любых двух состояний имеет место неравенство [4]

$$W^{(2)} - W^{(1)} \geqslant \frac{n+1}{n}\sigma^{(1)}_{kl}\left(\eta^{(2)}_{kl} - \eta^{(1)}_{kl}\right). \tag{1.5}$$

Сформулируем обратную задачу, исследование которой — цель данной работы: какие внешние силы $q = q(x_1, x_2, t)$, $p_k = p_k(s, t)$ ($k = 1$, 2), где s — длина дуги контура γ, $0 \leqslant t < t_*$, нужно приложить к мембране, находящейся при $t < 0$ в естественном недеформированном состоянии, чтобы при $t = t_*$ после их мгновенного снятия и соответствующей упругой разгрузки получить заданные значения остаточных прогибов $w_* = w_*(x_1, x_2)$ и чтобы работа этих сил, затраченная на деформирование мембраны, была минимальной? Другими словами, среди всех возможных путей нагружения, приводящих за заданное время t_* к заданной остаточной форме поверхности первоначально плоской мембраны, необходимо выбрать оптимальный в смысле энергетических затрат путь.

Считаем, что заданная поверхность выпуклая, т. е.

$$\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 > 0, \tag{1.6}$$

а также, что $w_* = u_k^* = 0$ $(k = 1, 2)$ на γ, где u_k^* — остаточные перемещения в плоскости мембраны.

Можно показать, что компоненты деформаций ползучести при $t = t_*$ являются совместными, т. е. выражающимися через u_k^* $(k = 1, 2)$ и w_* соотношениями типа (1.2). Действительно, после разгрузки при $t = t_*$ поле остаточных напряжений σ_{kl}^* и остаточный прогиб w_* должны удовлетворять системе уравнений вида (1.1), в которой следует положить $q = 0$ [5]. Если обычным образом ввести функцию остаточных напряжений $F_* = F_*(x_1, x_2)$ такую, что первые два уравнения (1.1) выполнятся тождественно, то третье уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 F_*}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 F_*}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 F_*}{\partial x_2^2} = 0. \tag{1.7}$$

Поскольку $p_k^* = 0$ $(k = 1, 2)$ на γ при $t = t_*$, то граничные условия для F_* можно привести к виду [6] $\partial F_*/\partial x_k = 0$ $(k = 1, 2)$ или $F_* = \partial F_*/\partial n = 0$ на γ. В силу (1.6) уравнение (1.7) относительно функции $F_* = F_*(x_1, x_2)$ эллиптическое [7] и на основании указанных граничных условий имеет единственное решение $F_* = 0$, откуда $\sigma_{kl}^* = 0$ $(k, l = 1, 2)$. Тогда из (1.2), (1.3) вытекает

$$\varepsilon_{kl}^c(t_*) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k^*}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^*}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial w_*}{\partial x_k}\frac{\partial w_*}{\partial x_l} \quad (k, l = 1{,}2). \tag{1.8}$$

Вычислим теперь работу A внешних сил q и p_k $(k = 1, 2)$, затраченную на деформирование мембраны, в предположении, что в течение всего процесса, т. е. при $0 \leqslant t \leqslant t_*$, $w = 0$ на γ. Имеем

$$A = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int\limits_S \int\limits_0^{w_*} q\,dw\,dx_1 dx_2, \quad I_2 = \int\limits_\gamma \int\limits_0^{u_k^*} p_k du_k ds.$$

В силу (1.1) и известной формулы Грина, сводящей интегрирование по области S к интегрированию по контуру γ, можно получить

$$I_1 = -h\int\limits_S \int\limits_0^{w_*} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sigma_{kl}\frac{\partial w}{\partial x_k}dw\right)dx_1 dx_2 + I_3 = -h\int\limits_\gamma \int\limits_0^{w_*} \sigma_{kl}\frac{\partial w}{\partial x_k}n_l\,dw\,ds + I_3,$$

$$I_3 = h\int\limits_S \int\limits_0^{w_*} \sigma_{kl}\frac{\partial w}{\partial x_k}d\left(\frac{\partial w}{\partial x_l}\right)dx_1 dx_2,$$

где n_k $(k = 1, 2)$ — компоненты единичного вектора внешней к γ нормали. Ввиду граничного условия для w первый интеграл последнего равенства обращается в нуль, следовательно, $A = I_3 + I_2$.

Легко убедиться, что величина A равна работе напряжений σ_{kl} на деформациях ε_{kl} во всем объеме мембраны, т. е. $A = h\int\limits_S \int\limits_0^{\varepsilon_{kl}^*} \sigma_{kl}d\varepsilon_{kl}dx_1 dx_2$, откуда в силу (1.3) и равенств $\sigma_{kl}^* = 0$ $(k, l = 1, 2)$ получим $A = h\int\limits_S \int\limits_0^{t_*} W\,dt\,dx_1 dx_2$, $W = \sigma_{kl}\eta_{kl}$.

Докажем следующее утверждение: оптимальным (в указанном выше смысле) путем нагружения является такой, при котором компоненты напряжений в каждой точке мембраны не зависят от времени. Такое поле напряжений, если оно существует, определяется единственным образом.

Предположим, что такой путь существует; все величины, относящиеся к нему, будем обозначать с помощью индекса 0. Тогда для любого другого нагружения, обеспечивающего заданный остаточный прогиб $w_* = w_*(x_1, x_2)$ после разгрузки при $t = t_*$, имеем

$$A - A_0 = h\int\limits_S \int\limits_0^{t_*} (W - W_0)\,dt\,dx_1 dx_2 \geqslant h\frac{n+1}{n}\int\limits_S \int\limits_0^{t_*} \sigma_{kl_0}\left(\eta_{kl} - \eta_{kl_0}\right)dt\,dx_1 dx_2 = \tag{1.9}$$

$$= h\frac{n+1}{n}\int\limits_S \sigma_{kl_0}\Delta\varepsilon_{kl}^c(t_*)\,dx_1 dx_2 = h\frac{n+1}{n}\int\limits_S \sigma_{kl_0}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_k^*}{\partial x_l} + \frac{\partial \Delta u_l^*}{\partial x_k}\right)dx_1 dx_2 =$$

$$= h\frac{n+1}{n}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sigma_{kl_0}\Delta u_k^*\right)dx_1dx_2 = \frac{n+1}{n}\int\limits_\gamma p_{k0}\Delta u_k^* ds = 0.$$

В (1.9) использовались: неравенство (1.5); условие независимости σ_{kl_0} от t; соотношения (1.8), в которых $w_* = w_*(x_1, x_2)$ — заданная функция, т. е. $\Delta\left(\frac{\partial w_*}{\partial x_k}\frac{\partial w_*}{\partial x_l}\right) = 0$ ($k, l = 1, 2$); формула Грина и граничные условия для остаточных перемещений u_k^*. Знак Δ обозначает разность соответствующих величин, относящихся к рассматриваемым путям нагружения. Таким образом, $A_0 \leqslant A$, что доказывает первую часть утверждения.

Доказательство второй части аналогично доказательству теоремы единственности для задач установившейся ползучести [8]. Действительно, из (1.4) следует $\varepsilon_{kl}^c(t_*) = \eta_{kl}t_*$ ($k, l = 1, 2$), а из (1.5), меняя ролями первое и второе состояния и складывая получившееся неравенство с (1.5), получим

$$(1.10)\qquad \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl} \geqslant 0,\quad \Delta\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^{(2)} - \sigma_{kl}^{(1)},\quad \Delta\eta_{kl} = \eta_{kl}^{(2)} - \eta_{kl}^{(1)}.$$

Неравенство (1.10) выражает известный постулат Друккера для вязких деформаций [8]. Предполагая существование двух решений, соответствующих одному и тому же остаточному прогибу w_* и удовлетворяющих нулевым граничным условиям для u_k^* ($k = 1, 2$), с не зависящими от времени полями напряжений и проводя выкладки, аналогичные применявшимся в (1.9), найдем

$$h\int\limits_S \Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}^c(t_*)\,dx_1dx_2 = ht_*\int\limits_S \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}dx_1dx_2 = 0,$$

что в силу (1.10) возможно только тогда, когда $\Delta\sigma_{kl} = 0$ ($k, l = 1, 2$) во всем объёме мембраны, поскольку выражение $\Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму относительно $\Delta\sigma_{kl}$ ($k, l = 1, 2$) [8]. Утверждение доказано.

При известном поле напряжений σ_{kl} контурные нагрузки определяются зависимостями $p_k = h\sigma_{kl}n_l$ ($k = 1, 2$) на γ. Из (1.1) видно, что для нахождения поперечных нагрузок $q = q(x_1, x_2, t)$ необходимо определить $w = w(x_1, x_2, t)$ $(0 \leqslant t < t_*)$. Исключая из (1.2) величины u_k ($k = 1, 2$) и учитывая, что скорости деформаций ползучести η_{kl} ($k, l = 1, 2$) не зависят от t, т. е. $\varepsilon_{kl}^c(t) = \frac{t}{t_*}\varepsilon_{kl}^c(t_*)$, с использованием соотношений (1.3) и (1.8) получим на любой момент t $(0 \leqslant t < t_*)$ равенство

$$(1.11)\qquad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \frac{1}{E}\Delta\Delta F + \frac{t}{t_*}\left[\left(\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_2^2}\right],$$

представляющее собой уравнение совместности деформаций [2] для данного случая; При выводе (1.11) для простоты предполагалось, что материал мембраны изотропен. E — модуль Юнга; F — функция напряжений, соответствующая полю σ_{kl}; $\Delta\Delta$ — бигармонический оператор.

Соотношение (1.11) является уравнением Монжа — Ампера относительно неизвестного прогиба w. Задача Дирихле для него с указанным выше граничным условием $w = 0$ на γ имеет единственное решение, по крайней мере, для отрицательной правой части (другое решение отличается только знаком) [7].

Если время t_* достаточно велико, то, очевидно, компоненты напряжений σ_{kl} будут малыми величинами, поэтому упругими (постоянными во времени) деформациями можно пренебречь по сравнению с развитыми деформациями ползучести, т. е. использовать схему установившейся ползучести [3]. Тогда первый член в правой части (1.11) можно опустить, и с учетом (1.6) будет выполнено условие эллиптичности этого уравнения, что влечет единственность (с точностью до знака) его решения [7]. Очевидно, что в этом случае $w = \sqrt{t/t_*}\,w_*$.

2. Рассмотрим прямоугольную мембрану со сторонами $2a$ и $2b$, $a/b = \varepsilon < 1$. Выберем начало координат в центре мембраны, оси будем обозначать через x и y, так что область S определяется неравенствами $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. Определим оптимальное постоянное во времени поле напряжений σ_{kl}, о котором говорилось выше, для данного случая. В качестве потенциала Φ из (1.4) возьмем общепринятый [3]: $\Phi = \frac{B}{n+1}\sigma_i^{n+1}$, где $\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\sigma_{xy}^2}$ — интенсивность напряжений B, n — константы, $n > 1$.

Введем безразмерные координаты $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{y} = y/b$, перемещения в плоскости xOy $\tilde{u} = u/a$, $\tilde{v} = v/a$ и прогиб $\tilde{w} = w/a$, убрав в дальнейшем знак $\sim$ над безразмерными величинами, так что область S будет определяться неравенствами $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

Для решения задачи применим метод возмущений [9], выбрав в качестве малого параметра величину ε. Будем предполагать, что заданный остаточный прогиб $w_* = w_*(x, y)$ зависит только от безразмерных координат и не содержит параметра ε, причем $w_*(\pm 1, y) = w_*(x, \pm 1) = 0$. Для простоты считаем, что w_* — четная по обеим переменным функция, т. е. $w_*(x, y) = w^*(-x, y) = w_*(x, -y)$. Остаточные перемещения u_* и v_* удовлетворяют нулевым граничным условиям, т. е. $u_* = v_* = 0$ при $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$. В дальнейшем индекс $*$ у величин w_*, u_*, и v_* опустим.

При сделанных предположениях для компонент деформации ползучести при $t = t_*$ из (1.4), (1.8) получим

$$\varepsilon_x^c(t_*) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = Bt_*\sigma_i^{n-1}\left(\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y\right), \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_y^c(t_*) = \varepsilon\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = Bt_*\sigma_i^{n-1}\left(\sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_x\right),$$

$$\varepsilon_{xy}^c(t_*) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = Bt_*\sigma_i^{n-1}\frac{3}{2}\sigma_{xy}.$$

Первые два уравнения равновесия (1.1) примут вид

$$\partial\sigma_x/\partial x + \varepsilon\partial\sigma_{xy}/\partial y = 0, \quad \partial\sigma_{xy}/\partial x + \varepsilon\partial\sigma_y/\partial y = 0. \tag{2.2}$$

Используя обычную методику [9], величины перемещений и напряжений представляем в виде рядов по степеням ε, выделяя затем в (2.1), (2.2) члены при одинаковых степенях. Так, для нулевого приближения имеем

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = Bt_*\sigma_{i0}^{n-1}\left(\sigma_{x0} - \frac{1}{2}\sigma_{y0}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \tag{2.3}$$

$$0 = Bt_*\sigma_{i0}^{n-1}\left(\sigma_{y0} - \frac{1}{2}\sigma_{x0}\right),$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} = 3Bt_*\sigma_{i0}^{n-1}\sigma_{xy0}, \quad \frac{\partial\sigma_{x0}}{\partial x} = \frac{\partial\sigma_{xy0}}{\partial x} = 0.$$

Для решения системы (2.3) используем граничные условия относительно переменной x, т. е. $u_0|_{x=\pm 1} = v_0|_{x=\pm 1} = 0$. В результате нетрудно получить

$$\sigma_{x0} = \sigma_0, \quad \sigma_{y0} = \frac{1}{2}\sigma_0, \quad \sigma_{xy0} = 0, \quad \sigma_{i0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0, \tag{2.4}$$

$$\sigma_0 = \left[\frac{1}{2Bt_*}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\int_0^1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{n}},$$

$$u_0 = \frac{x}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx, \quad v_0 = 0.$$

В (2.4) использована четность функции $w = w(x, y)$. В силу того, что $w(x, \pm 1) = 0$, получим $\partial w/\partial x|_{y=\pm 1} = 0$, отсюда и $u_0|_{y=\pm 1} = 0$. Следовательно, решение (2.4) системы уравнений (2.3) для нулевого приближения удовлетворяет всем граничным условиям.

Из (2.1), (2.2) имеем систему уравнений первого приближения:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = Bt_*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0\right)^{n-1}\left(\frac{3n+1}{4}\sigma_{x1} - \frac{1}{2}\sigma_{y1}\right), \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = Bt_*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0\right)^{n-1}\left(\sigma_{y1} - \frac{1}{2}\sigma_{x1}\right),$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} = 3Bt_*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0\right)^{n-1}\sigma_{xy1} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\sigma_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy0}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{xy1}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{y0}}{\partial y} = 0.$$

Решение системы (2.5) с граничными условиями $u_1|_{x=\pm 1} = v_1|_{x=\pm 1} = 0$:

$$\sigma_{x1} = \sigma_{y1} = 0, \quad \sigma_{xy1} = -\frac{x}{2}\frac{\partial\sigma_0}{\partial y}, \quad u_1 = 0, \tag{2.6}$$

$$v_1 = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)(1 - x^2)\int_0^1 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\,dx + \int_x^1 \left(\int_0^x \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx\right)dx.$$

В (2.6) использованы равенства (2.4). Видно, что $v_1|_{y=\pm 1} = 0$, т. е. и для первого приближения выполняются все граничные условия.

Из (2.1), (2.2) получим систему уравнений второго приближения:

$$(2.7)\qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} = Bt_*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\sigma_0^{n-2}\left\{\sigma_0\left(\frac{3n+1}{4}\sigma_{x2} - \frac{1}{2}\sigma_{y2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{n-1}{2}\left[\frac{3(n+1)}{4}\sigma_{x1}^2 + \sigma_{y1}^2 - 2\sigma_{x1}\sigma_{y1} + 3\sigma_{xy1}^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = Bt_*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\sigma_0^{n-2}\left\{\sigma_0\left(\sigma_{y2} - \frac{1}{2}\sigma_{x2}\right) + \right.$$

$$\left. + (n-1)\,\sigma_{x1}\left(\sigma_{y1} - \frac{1}{2}\sigma_{x1}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = 3Bt_*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\sigma_0^{n-2}\{\sigma_0\sigma_{xy2} + (n-1)\,\sigma_{x1}\sigma_{xy1}\},$$

$$\partial\sigma_{x2}/\partial x + \partial\sigma_{xy1}/\partial y = 0, \quad \partial\sigma_{xy2}/\partial x + \partial\sigma_{y1}/\partial y = 0.$$

Решение системы (2.7), удовлетворяющее граничным условиям $u_2|_{x=\pm 1} = v_2|_{x=\pm 1} = 0$, есть

$$(2.8)\qquad \sigma_{x2} = \frac{x^2}{4}\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial y^2} + \frac{1}{n\sigma_0}\left[\frac{1}{2Bt_*}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\frac{1}{\sigma_0^{n-2}}\int_0^1 \Phi_1\,dx - \Phi_2\right],$$

$$\sigma_{y2} = \frac{1}{2}\sigma_{x2} + \frac{1}{Bt_*}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}\frac{\Phi_1}{\sigma_0^{n-1}}, \quad \sigma_{xy2} = 0,$$

$$u_2 = \frac{x}{2}\int_0^1 \Phi_1\,dx - \frac{1}{2}\int_0^x \Phi_1\,dx + Bt_*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\sigma_0^{n-2}\Phi_2\,(x^3 - x), \quad v_2 = 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \quad \Phi_2 = \frac{n\sigma_0}{12}\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial y^2} + \frac{n-1}{6}\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial y}\right)^2.$$

Относительно полученного выше решения для первых приближений необходимо сделать следующее замечание. Как видно из (2.4), $\sigma_0|_{y=\pm 1} = 0$, что может привести к бесконечно большим напряжениям σ_{xy1}, σ_{x2} и σ_{y2} при $y = \pm 1$. Это, в свою очередь, накладывает определенные ограничения на применимость формул (2.6), (2.8).

Пусть, например, $w = \alpha(1 - y^2)^p Q(x)$, где α, p — константы, $Q(\pm 1) = 0$. Для того чтобы величины $\partial^k\sigma_0/\partial y^k$ ($k = 1, 2, \ldots$), которые войдут в выражения для напряжений более высоких приближений, стали конечными, необходимо, чтобы число $2p/n$ было натуральным. Так, из условия ограниченности напряжений σ_{xy1}, σ_{x2} и σ_{y2} при $y = \pm 1$ следует $p \geqslant n$. В этом случае $u_2(x, \pm 1) = 0$, т. е. и для второго приближения выполнятся все граничные условия.

Рассмотрим пример: $n = 3$, $w = \alpha(1 - y^2)^3(1 - x^2)$. Из (2.4), (2.6) и (2.8) найдем

$$\sigma_x = \beta\left\{(1 - y^2)^2 + \varepsilon^2\left[x^2(3y^2 - 1) + \frac{137y^2 + 1}{45}\right]\right\}, \quad \beta = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha^2}{2Bt_*}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\sigma_y = \beta\left\{\frac{(1 - y^2)^2}{2} + \varepsilon^2\left[\frac{9}{8}x^4(7y^2 + 1) - \frac{1}{4}x^2(189y^2 - 1) + \frac{15263y^2 - 671}{360}\right]\right\},$$

$$\sigma_{xy} = 2\beta\varepsilon xy\,(1 - y^2),$$

$$u = \frac{2}{3}\alpha^2(1 - y^2)^4(x - x^3)\left\{(1 - y^2)^2 + \frac{\varepsilon^2}{60}[9x^2(7y^2 + 1) - 1087y^2 + 79]\right\}.$$

$$v = -\alpha^2\varepsilon(1 - x^2)\left(x^2 + \frac{5}{3}\right)y(1 - y^2)^5.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горев Б. В., Клопотов И. Д. и др.** К вопросу обработки материалов давлением в режиме ползучести.— ПМТФ, 1980, № 5.
2. **Вольмир А. С.** Гибкие пластинки и оболочки. М.: ГИТТЛ, 1956.
3. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
4. **Мартин Дж. Б.** К определению верхней границы скорости перемещений в задаче об установившейся ползучести.— Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикл. мех., 1966, № 1.
5. **Лепик Ю. Р.** Определение остаточного прогиба и остаточных усилий при разгружении гибких упругопластических пластинок.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 3.
6. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. **Бакельман И. Я.** Геометрические методы решения эллиптических уравнений. М.: Наука, 1965.
8. **Цвелодуб И. Ю.** О построении определяющих уравнений установившейся ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3.
9. **Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.** Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978.

Поступила 1/VIII 1984 г.