УДК 539.374

Э. И. Блинов, К. Н. Русинко

ТЕОРИЯ НЕУПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ, ОСНОВАННАЯ НА НЕРАВНОВЕСНОСТИ СОСТОЯНИЯ

Неупругая деформация твердого тела, как и всякий процесс, протекающий с конечной скоростью, всегда термодинамически неравновесна, а переход из данного состояния в равновесное совершается путем релаксации напряжений, в результате которой упругая деформация преобразуется в неупругую. Построена теория деформации твердого тела в рамках этой концепции.

Утверждение об образовании неупругой деформации при термодинамически равновесном состоянии протекающего процесса, положенное в основу классической теории пластичности, является лишь удобной гипотезой [1, 2]. Она приводит к результатам, согласующимся только с такими экспериментами, при которых скорость изменения внешних параметров не превышает скорости перехода системы (образца) из неравновесного в термодинамически равновесное состояние. В теории пластичности такие процессы называются квазистатическими. Действительно, при этих процессах фиксирование внешних параметров означает одновременно фиксирование и всего состояния системы в целом. На самом деле в процессе пластической деформации также имеет место неравновесность состояния, но переход из нее в равновесное состояние происходит только при изменении внешних параметров, никак не обнаруживая себя после их фиксирования. Если же скорость изменения внешних параметров больше скорости перехода системы из неравновесного в термодинамически равновесное состояние, то неравновесность остается и после прекращения изменения этих параметров, так что если их зафиксировать и в дальнейшем поддерживать неизменными, то переход из данного неравновесного состояния в равновесное, а вместе с ним и образование, например, необратимой деформации будут продолжаться до установления термодинамического равновесия. Исследование этого явления предпринято в [3, 4].

Если же вообще не учитывать неравновесность состояния в процессе пластической деформации, полагая его равновесным, то, согласно принципу существования основного состояния, такая деформация является, как это отмечено в [5—7], обратимым процессом, т. е. противоречит законам термодинамики и, значит, существовать в природе не может. Отсюда вытекает, что теория пластичности — всего лишь модельное представление явления неупругой деформации, описывающее его при протекании в определенных условиях и не очень высоких требованиях к точности измерений (и теории), при которых неравновесностью состояния можно пренебречь. На самом деле всякая неупругая деформация, в том числе и пластическая,— неравновесный процесс. На этом основании и строится ее теория.

1. Равновесные и неравновесные напряжения. Положив в основу создаваемой теории, как это принято в неравновесной термодинамике твердого тела, основные законы сохранения и принципы объективности, непрерывности, локальности и существования основного состояния, переходим от реального твердого тела к сплошной среде, а в ней от глобальных параметров объема и давления к локальным — тензорам напряжений и деформаций в точке среды. При этом состояние в точке сплошной среды определяется состоянием «закрытой» термодинамической системы, являющейся окрестностью данной точки, достаточно малой для того, чтобы характеризовать состояние в точке, но достаточно большой, чтобы отражать свойства сплошной среды. Такую «закрытую» систему, т. е. систему, обменивающуюся с внешней средой энергией, но не обменивающуюся массой, принято называть феноменологическим элементом [2].

Согласно принципу существования основного состояния, в каждый момент деформации феноменологического элемента с конечной скоростью элемент находится в термодинамически неравновесном состоянии. Такое представление, как показано в [3, 4], подразумевает, что тензор напряжений σ_{ij} в каждый момент необратимой деформации есть сумма двух составляющих тензоров:

$$\sigma_{ij} = \varphi_{ij} + \psi_{ij},\ i, j = 1, 2, 3. \tag{1.1}$$

Здесь φ_{ij} — компоненты тензора напряжений в равновесном состоянии, соответствующем данному; ψ_{ij} — компоненты тензора напряжений, характеризующих разницу между данным и соответствующим ему равновесным состоянием, так что $\psi_{ij} = \sigma_{ij} - \varphi_{ij}$. Следуя [3, 4], компоненты тензора φ_{ij} будем называть равновесными, а ψ_{ij} — неравновесными напряжениями.

Для выяснения физической природы и свойств неравновесных напряжений воспользуемся сведениями, изложенными в [8]. Согласно приведенным там сведениям, деформация поликристаллического элемента определяется не только значением и характером усредненных межатомных сил связи, но и свойствами и состоянием субмикроскопической структуры кристаллов элемента, которая при нагружении упруго искажается. Из всех возможных искажений структуры выделим те, которые находятся в неравновесном состоянии и самопроизвольно релаксируются при температуре, меньшей температуры рекристаллизации. Напряжения, обуславливающие местные упругие искажения решетки, как и в [8], назовем локальными пиковыми напряжениями. Являясь микронапряжениями по области своей локализации, они могут достигать больших значений. Локальные пиковые напряжения, с одной стороны, увеличиваются с ростом скорости нагружения, создавая «неравновесность состояния» элемента. С другой стороны, релаксируя в это же время, они обуславливают переход элемента в равновесное состояние. Разность между уровнями локальных пиковых напряжений и равновесными напряжениями есть движущая сила релаксации как процесса перехода упругих искажений решетки в остаточную (необратимую) деформацию.

Здесь необходимо отметить следующее. В [8] под локальными искажениями структурной кристаллической решетки и возникающими при этом локальными пиковыми напряжениями понимаются только искажения, в результате релаксации которых образуется дополнительная остаточная деформация, природа которой, как подчеркивается в [8], такая же, как и пластической деформации. В настоящей работе утверждается, что всякая необратимая (остаточная) деформация, в том числе и пластическая, есть результат перехода из неравновесного в равновесное состояние, т. е. на микроуровне — результат релаксации искаженной структуры элемента.

В [9] сказано, что основной механизм быстрой (пластической) деформации и неустановившейся, а также стационарной ползучести поликристаллического тела — сдвиг составляющих его кристаллических зерен. Соглашаясь с этим утверждением, добавим, что любой микросдвиг возможен только при наличии движущей силы, каковой является локальный градиент напряжений в виде локальных пиковых напряжений. Поэтому необратимая деформация и рассматривается в рамках неравновесной термодинамики твердого тела. Весь ход необратимой деформации определяется совокупностью двух противоположных взаимосвязанных термодинамических процессов — появлением и ростом неравновесности состояния в форме искажений кристаллической решетки элемента и переходом из неравновесного в равновесное состояние путем снятия этих искажений релаксацией. В зависимости от того, при каких условиях проходит релаксация в процессе деформирования, реализуется тот или иной вид необратимой деформации: пластическая, вязкопластическая или вязкая.

В рамках предложенного в настоящей работе термодинамического подхода макромерой локальных пиковых напряжений по определению являются неравновесные напряжения, а результатом их релаксации — тот или иной вид необратимой деформации или их комбинация.

Сформулируем закон релаксации неравновесных напряжений как макромеры локальных пиковых, закон релаксации которых приведен в [8]. Пусть за время $\Delta\tau$ в элементе образовались неравновесные напряжения $\Delta\psi_{ij}(\tau)$. Примем, что за время du ($u > \tau$) напряжения $\Delta\psi_{ij}$ уменьшаются на значения, пропорциональные $\Delta\psi_{ij}$. Это происходит тем быстрее, чем меньше интервал времени $u - \tau$. Поэтому $d(\Delta\psi_{ij}) = -\Delta\psi_{ij}(u)K(u-\tau)du$ ($K(u-\tau)$— ядро, убывающее с ростом $u-\tau$). Решение данного уравнения есть $\Delta\psi_{ij}(t) = \Delta\psi_{ij}(\tau)Q(t, \tau)$, где

$$Q(t,\tau) = \exp\left[-\int\limits_{\tau}^{t} K(u-\tau)\,du\right], \tag{1.2}$$

отсюда

$$\psi_{ij}(t) = \int\limits_{0}^{t} \frac{d\psi_{ij}(\tau)}{d\tau} Q(t,\tau)\,d\tau. \tag{1.3}$$

Ядро этого соотношения должно быть таким, чтобы правая часть (1.3) выражала основные свойства локальных пиковых напряжений. В частности, следуя [9], можно положить, например,

$$Q(t-\tau) = \exp\,[-k(t-\tau)]. \tag{1.4}$$

Поскольку $d\psi_{ij}$ обусловлено приращением $d\sigma_{ij}$, то

$$d\psi_{ij} = q_{ijmn} d\sigma_{mn}. \tag{1.5}$$

В [4] показано, что приращение тензора полной относительной деформации (ε_{ij}) выражается через тензор неравновесных напряжений и его приращение:

$$d\varepsilon_{ij} = A_{ijmn} d\psi_{mn} + B_{ijmn}\psi_{mn} dt. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.5) и (1.4) в (1.3), а затем (1.3) в (1.6), получим соотношение

$$d\varepsilon_{ij} = a_{ijmn} d\sigma_{mn} + g_{ijmn} \int\limits_{0}^{t} \frac{d\sigma_{mn}(\tau)}{d\tau} \exp\,[-k(t-\tau)]\,d\tau\,dt,$$

являющееся определяющим в разработанной теории деформации, основанной на неравновесных представлениях.

2. Случай изотропного твердого тела. Тензорное дифференциальное уравнение (1.6) запишем для изотропного материала. Для чего потребуем, чтобы его коэффициенты A_{ijmn} и B_{ijmn} принимали одни и те же значения в каждой системе координат. Данному требованию удовлетворим, взяв A_{ijmn} и B_{ijmn} в виде общих изотропных тензоров четвертого ранга, положив при этом

$$A_{ijmn} = l\delta_{ij}\delta_{mn} + a_1\delta_{im}\delta_{jn} + a_2\delta_{in}\delta_{jm},$$
$$B_{ijmn} = r\delta_{ij}\delta_{mn} + b_1\delta_{im}\delta_{jn} + b_2\delta_{in}\delta_{jm}$$

(l, r, a_1, a_2, b_1, b_2 — постоянные материала). Подставляя эти значения A_{ijmn} и B_{ijmn} в (1.6) и учитывая симметрию тензоров неравновесных напряжений ($\psi_{ij} = \psi_{ji}$), получим окончательно

$$d\varepsilon_{ij} = l\delta_{ij} d\psi + a d\psi_{ij} + (r\delta_{ij}\psi + b\psi_{ij})dt, \tag{2.1}$$
$$a = a_1 + a_2,\ b = b_1 + b_2,\ \psi = (1/3)\psi_{ii}.$$

Соотношение (1.5) для изотропного материала имеет вид

$$d\psi_{ij} = q d\sigma_{ij}; \tag{2.2}$$

подставив (2.2) в (1.3), с учетом (1.4) получим

$$\psi_{ij}(t) = q \int\limits_{0}^{t} \frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau} \exp\,[-k(t-\tau)]\,d\tau. \tag{2.3}$$

При этом уравнение (2.1) запишем как

$$d\varepsilon_{ij} = A\delta_{ij} d\sigma + B d\sigma_{ij} + c\delta_{ij} \int\limits_{0}^{t} \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \exp\,[-k(t-\tau)]\,d\tau\,dt + {}$$
$$+ g \int\limits_{0}^{t} \frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau} \exp\,[-k(t-\tau)]\,d\tau\,dt, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}. \tag{2.4}$$

Постоянные A и B в (2.4) при приращениях напряжений определим, учитывая, что в рамках разрабатываемой теории равновесной является только обратимая, т. е. упругая, деформация, определяемая по закону Гука, и, следовательно,

$$(2.5)\quad d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\left(d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}\delta_{ij}d\sigma\right) + \left[g\int_0^t \frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\exp[-k(t-\tau)]\,d\tau + {} + c\delta_{ij}\int_0^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\exp[-k(t-\tau)]\,d\tau\right]dt,$$

где λ, μ — постоянные Ламе; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; g, c, k — постоянные коэффициенты. Слагаемые, стоящие в квадратных скобках правой части уравнения (2.5), определяют неупругую деформацию во времени $(\varepsilon_{ij}^{\text{н}}(t))$ изотропного материала:

$$(2.6)\quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{н}}(t) = g\int_0^t \frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\exp[-k(t-\tau)]\,d\tau + {} + c\delta_{ij}\int_0^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\exp[-k(t-\tau)]\,d\tau.$$

Здесь второе слагаемое показывает, что разработанная теория описывает неупругую деформацию, возникающую при изменениях гидростатического давления.

3. Определение постоянных. Коэффициенты уравнения (2.6) g, k, c являются постоянными материала и находятся из следующего эксперимента. Образец в виде тонкостенной цилиндрической трубки растягивается с постоянной скоростью растягивающего усилия. В некоторый момент растяжения за пределом текучести растягивающее усилие фиксируется и в дальнейшем поддерживается неизменным.

Для одноосного нагружения уравнение (2.6) принимает вид

$$(3.1)\quad \dot{\varepsilon}_z^{\text{н}} = R\int_0^t \frac{d\sigma_z(\tau)}{d\tau}\exp[-k(t-\tau)]\,d\tau, \quad R = g + \frac{1}{3}c$$

или после интегрирования по частям

$$(3.2)\quad \dot{\varepsilon}_z^{\text{н}} = R\left[\sigma_z(t) - k\int_0^t \sigma_z(\tau)\exp[-k(t-\tau)]\,d\tau\right].$$

Опишем эксперимент одноосного растяжения образца с последующей выдержкой при постоянном напряжении. Пусть вначале образец растягивается с постоянной скоростью $\dot{\sigma}$. При этом, согласно (3.1),

$$\varepsilon_z^{\text{н}}(t) = \frac{R}{k}\dot{\sigma}\left[t - \frac{1}{k}(1-\exp(-kt))\right].$$

При достижении значения $\sigma_z = \sigma_1$ для $t = t_1$ напряжение становится равным $\sigma_1 = \sigma_0 + \dot{\sigma}t_1$, а неупругая деформация

$$(3.3)\quad \varepsilon_1^{\text{н}} = \frac{R}{k}\dot{\sigma}\left[t_1 - \frac{1}{k}(1-\exp(-kt_1))\right].$$

Зафиксируем напряжение σ_1 и будем поддерживать его неизменным. После этого, согласно (3.2), неупругая деформация получает приращение

$$\Delta\varepsilon_1^{\text{н}}(t) = \frac{R}{k}\sigma_1[1-\exp(-kt)], \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty,$$

максимальное значение которого при $t \to \infty$

$$\Delta\varepsilon^{\text{н}}_{\max} = R\sigma_1/k. \tag{3.4}$$

Найденных результатов достаточно для определения постоянных R и k. Полагая $\varepsilon^{\text{н}}_1$, $\Delta\varepsilon^{\text{н}}_{\max}$ и t_1 известными из эксперимента, из (3.4) имеем $R/k = \Delta\varepsilon^{\text{н}}_{\max}/\sigma_1$. Подставляя это значение в (3.3), получаем уравнение для нахождения коэффициента k:

$$\frac{\dot{\sigma}\Delta\varepsilon^{\text{н}}_{\max} t_1 - \varepsilon^{\text{н}}_1\sigma_1}{\dot{\sigma}\Delta\varepsilon^{\text{н}}_{\max}}\, k + \exp(-kt_1) = 1.$$

Итак, разработанная на основании термодинамических представлений о неравновесности состояния в процессе неупругой деформации твердого тела теория неравновесной деформации не противоречит физическим законам. Она представляет неупругую деформацию как результат перехода системы из неравновесного в равновесное состояние, стирая тем самым границу между пластической и вязкой деформациями, возведенную искусственно только для удобства теоретических расчетов и не имеющую места в физических процессах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1973.— Т. 2.
2. **Вакуленко А. А.** К вопросу о возможности необратимых квазистатических процессов в макросистеме // ПММ.— 1984.— Т. 48, вып. 4.
3. **Русинко К. Н., Блинов Э. И.** Аналитическое описание термоупругопластического деформирования твердого тела // ПМ.— 1981.— Т. 11, вып. 17.
4. **Блинов Э. И.** О возможном пути построения кинетической теории деформации // Изв. АН СССР. МТТ.— 1989.— № 5.
5. **Леонтович М. А.** Введение в термодинамику. Статистическая физика.— М.: Наука, 1983.
6. **Обратимый** процесс // Физический энциклопедический словарь.— М.: Сов. энциклопедия, 1983.
7. **Сивухин В. Д.** Примечания редактора/Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика.— М.: Наука, 1983.
8. **Русинко К. Н.** Теория пластичности и неустановившейся ползучести.— Львов: Вища шк., 1981.
9. **Русинко К. Н.** Особенности неупругой деформации твердых тел.— Львов: Вища шк., 1986.

г. Львов *Поступила 16/VII 1990 г.*

УДК 539.375

А. В. Бойко

НЕКОТОРЫЕ ЭФФЕКТЫ ДВУХОСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ

Рассматривается упругое равновесие круговой пластины с центральной трещиной при заданных на границе пластины радиальных перемещениях, распределенных по эллиптическому закону. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению. Получены численное и приближенное аналитическое решения, которые сравниваются между собой. Выявлена зависимость коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины от параметра двухосности нагружения, в качестве которого принято отношение перемещений по главным осям деформирования пластины. Установлена возможность устойчивого роста трещины. Отмечены практические приложения полученных результатов.

1. Постановка задачи обусловлена прежде всего необходимостью создания математической модели для интерпретации экспериментальных результатов, получаемых на специальном оборудовании, позволяющем реализовать двухосное растяжение образца в виде круговой пластины заданными радиальными перемещениями. Такой подход является пер-