УДК 532.5

ТЕРМОКОНЦЕНТРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В СИСТЕМЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ МАРАНГОНИ

М. В. Ефимова*,**, Н. Дараби**

* Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия
** Сибирский федеральный университет, 660036 Красноярск, Россия
E-mails: efmavi@icm.krasn.ru, nematdarabi@gmail.com

Исследована сопряженная начально-краевая задача, имеющая место при движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости с общей поверхностью раздела под действием термоконцентрационных сил. Найдено решение, описывающее стационарное течение в слоях, распределение температуры и концентрации. С использованием метода преобразования Лапласа получено нестационарное решение задачи в изображениях, позволяющее описать эволюцию движения с помощью численного обращения изображений.

Ключевые слова: начально-краевая задача, преобразование Лапласа, бинарная смесь, термоконцентрационный эффект.

DOI: 10.15372/PMTF20180511

Введение. Исследование конвективного переноса массы, тепла и других физических величин в жидкостях имеет большое значение как в фундаментальной науке, так и при практическом применении. В ряде работ при анализе данного процесса особое внимание уделяется изучению влияния термоконцентрационных эффектов на возникновение и эволюцию конвективных течений. Так, в [1] описана начально-краевая задача о движении двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей с общей поверхностью раздела, исследованы некоторые проблемы устойчивости соответствующих течений. В [2] анализировалось движение двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием перепада давления. Однонаправленное движение бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в теплоизолированной цилиндрической трубе под действием градиента давления рассмотрено в работе [3]. На практике часто встречается совместное движение трех жидкостей, контактирующих по некоторым поверхностям, одна из таких задач изучалась в [4].

В настоящей работе исследовано двухслойное течение системы бинарной смеси и вязкой жидкости с общей поверхностью раздела при локальном нагреве твердых стенок по параболическому закону. Построено точное решение стационарной задачи. Решение нестационарной задачи методом Лапласа позволило описать термоконцентрационное движение системы в зависимости от градиента поверхностного натяжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00229).

Постановка задачи. Пусть бинарная смесь заполняет находящийся на твердой неподвижной подложке ($y = 0$) слой, размеры которого задаются следующим образом: $|x| < \infty$, $0 < y < l_1(x,t)$. Над этим слоем расположен слой вязкой теплопроводной жидкости с размерами $|x| < \infty$, $l_1(x,t) < y < l_2$, где $y = l_2 = \mathrm{const}$ — твердая неподвижная стенка. Таким образом, линия $y = l_1(x,t)$ является границей раздела двух сред. Система находится в условиях невесомости. Пусть ρ_{j0} — постоянные плотности сред при средних значениях температуры и концентрации; θ_j, C — отклонения температуры и концентрации легкого компонента от средних значений. Тогда движение жидкостей описывается системой уравнений

$$\boldsymbol{u}_{jt} + (\boldsymbol{u}_j \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_j = -\frac{1}{\rho_j}\,\nabla p_j + \nu_j\,\Delta\boldsymbol{u}_j, \qquad \theta_{jt} + \boldsymbol{u}_j\cdot\nabla\theta_j = \chi_j\,\Delta\theta_j,$$

$$C_t + \boldsymbol{u}_1\cdot\nabla C = d\Delta C + \alpha\,d\Delta\theta_1, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{u}_j = 0,$$

где $\boldsymbol{u}_j = (u,v)$ — вектор скорости; p_j — отклонение давления от гидростатического; ρ_j — плотность; ν_j — кинематическая вязкость; χ_j — температуропроводность; d — коэффициент диффузии; α — параметр термодиффузии. Характеристики среды полагаются постоянными и соответствуют средним значениям температуры и концентрации.

Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения σ на границе раздела зависит от температуры и концентрации $\sigma = \sigma(\theta, C)$, причем для многих смесей он хорошо аппроксимируется линейной зависимостью $\sigma(\theta_1, C) = \sigma^0 - \varkappa_1\theta_1 - \varkappa_2 C$, где σ^0, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — постоянные.

Зададим условия на поверхности раздела $y = l_1(x,t)$:

$$u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2 = 0, \qquad \rho_2\nu_2(u_{2y} + v_{2x}) - \rho_1\nu_1(u_{1y} + v_{1x}) = -\varkappa_1\theta_{1x} - \varkappa_2 C_x,$$

$$\theta_1 = \theta_2, \qquad k_2\theta_{2y} - k_1\theta_{1y} = 0, \qquad c_y + \alpha_1\theta_{1y} = 0,$$

граничные условия на твердых стенках:

$$y = 0\colon \qquad \boldsymbol{u}_1 = 0, \quad \theta_1 = \theta_{10}(x,t), \quad c_{1y} + \alpha_1\theta_{1y} = 0,$$

$$y = l_2\colon \qquad \boldsymbol{u}_2 = 0, \quad \theta_2 = \theta_{20}(x,t)$$

и начальные условия при $t = 0$:

$$\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_{0j}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u}_{0j} = 0, \quad \theta_j = \theta_{0j}, \quad c_j = c_{0j}.$$

Введем безразмерные независимые переменные $\xi = x/l_{10}$, $\eta = y/l_{10}$, $\tau = \nu_1 t/l_{10}^2$, а также скорости, давления, температуры и концентрацию:

$$\boldsymbol{u}_j^* = \frac{\rho_{10}\nu_1}{\varkappa_1\Delta\theta}\boldsymbol{u}_j, \quad P_j^* = \frac{l_{10}}{\varkappa_1\Delta\theta}P_j, \quad \theta_j^* = \frac{1}{\Delta\theta}\,\theta_j, \quad C^* = \frac{\beta_1^c}{\beta_1^\theta\Delta\theta}\,C.$$

Здесь $\Delta\theta$ — характерный перепад температур; $l_{10} = \max|l_1(x,0)|$. Тогда уравнения движения сред записываются в безразмерном виде

$$u_{j\tau} + \mathrm{Ma}\,(u_j u_{j\xi} + v_j u_{j\eta}) + \frac{\rho_{j0}}{\rho_{10}}\,P_{j\xi} = \frac{\nu_j}{\nu_1}\,(u_{j\xi\xi} + u_{j\eta\eta}),$$

$$v_{j\tau} + \mathrm{Ma}\,(u_j v_{j\xi} + v_j v_{j\eta}) + \frac{\rho_{j0}}{\rho_{10}}P_{j\eta} = \frac{\nu_j}{\nu_1}\,(v_{j\xi\xi} + v_{j\eta\eta}),$$

$$\theta_{j\tau} + \mathrm{Ma}\,(u_j\theta_{j\xi} + v\theta_{j\eta}) = \frac{\chi_j}{\nu_1}\,(\theta_{j\xi\xi} + \theta_{j\eta\eta}), \qquad (1)$$

$$C_\tau + \mathrm{Ma}\,(u_1 C_\xi + v_1 C_\eta) = \frac{1}{\mathrm{Sc}}\,(C_{\xi\xi} + C_{\eta\eta} - \psi(\theta_{1\xi\xi} + \theta_{1\eta\eta})),$$

$$u_{j\xi} + v_{j\eta} = 0$$

(звездочка далее опускается; u_j, v_j — компоненты скоростей).

Система (1) содержит пять безразмерных параметров: тепловое число Марангони $\mathrm{Ma} = \varkappa_1 \Delta\theta l_{10}/(\rho_{10}\nu_1^2)$, числа Прандтля $\mathrm{Pr}_j = \nu_j/\chi_j$ и Шмидта $\mathrm{Sc} = \nu_1/D$, аналог параметра разделения $\psi = -\alpha\beta_1^c/\beta_1^\theta$, отношение кинематических вязкостей $\nu = \nu_2/\nu_1$. Индекс j соответствует номеру жидкости, первая жидкость расположена внизу.

Далее будем полагать, что движение в слоях является ползущим ($\mathrm{Ma} \ll 1$). В таком случае рассматриваемая задача становится линейной, ее решение в виде

$$\begin{gathered} u_j = U_j(\eta,\tau)\xi, \qquad v_j = V_j(\eta,\tau), \qquad \theta_j = A_j(\eta,\tau)\xi^2 + B_j(\eta,\tau), \\ c_1 = H_1(\eta,\tau)\xi^2 + E_1(\eta,\tau), \qquad p_j = P(\xi,\eta,\tau) \end{gathered} \tag{2}$$

можно интерпретировать следующим образом. Достаточно протяженный слой системы (отношение характерной толщины слоя к его длине мало) в окрестности точки $\xi = 0$ нагревается, причем температура твердых стенок в этой точке имеет максимум или минимум. Тогда в окрестности точки $\xi = 0$ температура аппроксимируется по параболическому закону. Дальнейшее движение смеси описывается формулами (2). Вследствие эффекта Соре распределение концентрации в слое бинарной смеси описывается параболическим законом.

Поле скоростей в (2) соответствует известному решению Хименца для чисто вязкой жидкости, описывающему натекание жидкости из бесконечности на плоскость $y = 0$ с условием прилипания на ней [5]. В работе [6] данное решение применялось для течения между двумя пластинами или течения в цилиндрической трубе (осесимметричный аналог решения (2)). Для движущихся пластин нестационарное решение (2) рассмотрено в работе [7], результаты которой в [8, 9] развиты на случай, когда расстояние между пластинами меняется по степенному закону в зависимости от времени. В работе [10], являющейся обобщением работы [5], построено решение задачи о нестационарном натекании вязкой жидкости на стенку. Теоретико-групповая природа решений (2) уравнений Навье — Стокса установлена в [11].

Подставляя решение (2) в линейную ($\mathrm{Ma} = 0$) систему (1), получаем уравнения

$$\begin{gathered} A_{j\tau} = \frac{\chi_j}{\nu_1} A_{j\eta\eta}, \qquad B_{j\tau} = \frac{\chi_j}{\nu_1}(2A_j + B_{j\eta\eta}), \qquad H_{1\tau} = \frac{1}{\mathrm{Sc}}(H_{1\eta\eta} - \psi A_{1\eta\eta}), \\ E_{1\tau} = \frac{1}{\mathrm{Sc}}(2H_1 + E_{1\eta\eta} - \psi(2A_1 + B_{1\eta\eta})), \quad -U_{j\tau} + \frac{\nu_j}{\nu_1} U_{j\eta\eta} = S_j(\tau), \quad V_{j\eta} + U_j = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Функции $P_j(\xi,\eta,\tau)$ имеют представления

$$\frac{\rho_1}{\rho_j} P_j = S_j(\tau)\frac{\xi^2}{2} + h_j,$$

при этом

$$h_{j\eta} = \frac{\nu_j}{\nu_1} V_{j\eta\eta} - V_{j\tau}.$$

Граничные условия на твердых стенках записываются в виде

$$\begin{gathered} U_1(0,\tau) = 0, \quad U_2(l,\tau) = 0, \quad A_1(0,\tau) = A_{10}(\tau), \quad A_2(l,\tau) = A_{20}(\tau), \\ B_1(0,\tau) = B_{10}(\tau), \qquad B_2(l,\tau) = B_{20}(\tau), \\ H_{1\eta}(0,\tau) - \psi A_{1\eta}(0,\tau) = 0, \qquad E_{1\eta}(0,\tau) - \psi B_{1\eta}(0,\tau) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

на поверхности раздела при $\eta = 1$ — в виде

$$\begin{gathered} U_1 = U_2, \qquad \mu U_{2\eta} - U_{1\eta} = -2A_1 - 2\omega H_1, \qquad A_1 = A_2, \qquad A_{1\eta} = kA_{2\eta}, \\ B_1 = B_2, \qquad B_{1\eta} = kB_{2\eta} \qquad H_{1\eta} - \psi A_{1\eta} = 0, \qquad E_{1\eta} - \psi B_{1\eta} = 0; \end{gathered} \tag{5}$$

$$\int\limits_0^1 U_1(z,\tau)\,dz = 0, \qquad \int\limits_1^l U_2(z,\tau)\,dz = 0 \tag{6}$$

($\rho = \rho_2/\rho_1$; $l = l_2/l_{10} > 1$; $\mu = \rho\nu$). Граничные условия (4), (5), содержащие параметр разделения ψ, означают отсутствие переноса вещества через твердую стенку и поверхность раздела соответственно.

Дополним задачу начальными условиями

$$U_j(y,0) = 0, \quad V_j(y,0) = 0, \quad A_j(y,0) = A_j^0(y), \quad B_j(y,0) = B_j^0(y),$$
$$H_1(y,0) = H_1^0(y), \qquad E_1(y,0) = E_1^0(y).$$

Поскольку наибольший интерес представляет анализ влияния поверхностных сил на движение, начальные условия для скоростей без ограничения общности будем считать нулевыми.

Интегральные условия (6) следуют из условия неподвижности границы раздела $\eta = 1$ и уравнений сохранения массы, поскольку

$$V_1 = -\int\limits_0^\eta U_1(z,\tau)\,dz, \qquad V_2 = -\int\limits_\eta^l U_2(z,\tau)\,dz; \tag{7}$$
$$V_1(1,\tau) = V_2(1,\tau) = 0.$$

Заметим, что поставленная задача является обратной, так как функции $S_j(\tau)$ должны находиться одновременно с функциями $A_j(\eta,\tau)$, $B_j(\eta,\tau)$, $U_j(\eta,\tau)$. Сначала определяются функции A_j, затем — H_1 и U_j, а на последнем этапе — продольные градиенты давлений $S_j(\tau)$ из равенств (6). Функции E_1, B_j не оказывают влияния на поле скоростей, а вертикальные скорости в слоях находятся из равенств (7). В силу представления (2) температура на стенках в точке $\xi = 0$ ($x = 0$) имеет минимум при $A_{j0}(\tau) > 0$ либо максимум при $A_{j0}(\tau) < 0$. В силу эффекта Марангони жидкость и смесь могут двигаться однонаправленно или в противоположных направлениях. Заметим, что характерный перепад температур описывается условием $\Delta\theta = l_{10}^2\Delta A$, где $\Delta A = \max\limits_{t\geqslant 0}|A_{20}(t) - A_{10}(t)| > 0$. Можно полагать, что при $A_{20}(t) = A_{10}(t)$ $\quad \Delta A = \max\limits_j \max\limits_y |A_{j0}(y)| > 0$.

Стационарное течение. Задача (3)–(6) имеет соответствующее постоянным A_{j0}, B_{j0} ($j = 1,2$) стационарное решение, для которого введем обозначения $A_j^c(\eta)$, $H_1^c(\eta)$, $U_j^c(\eta)$, S_j^c, $B_j^c(\eta)$, $E_1^c(\eta)$. Проведя вычисления, получаем следующие формулы (приведены лишь функции, описывающие гидродинамику течения (конвекцию)):

$$A_1^c(\eta) = a_1\eta + A_{10}, \qquad A_2^c(\eta) = \frac{a_1}{k}\,(\eta - l) + A_{20},$$
$$U_1^c(\eta) = \frac{S_1^c}{2}\,\eta^2 + a_2\eta, \qquad U_2^c(\eta) = \frac{1}{\nu}\Big(\frac{S_2^c}{2}\,\eta^2 + a_3\eta + a_4\Big), \tag{8}$$
$$H_1^c(\eta) = \psi A_1^c.$$

Здесь

$$a_1 = \frac{k}{k+l-1}\,(A_{20} - A_{10}), \qquad a_2 = \frac{(1-l)(1+\omega\psi)(a_1 + A_{10})}{\mu + l - 1} \equiv (1-l)n,$$
$$a_3 = -\frac{\nu(2l+1)n}{l-1}, \quad a_4 = \frac{\nu l(l+2)n}{2(l-1)}, \quad S_1^c = 3(l-1)n, \quad S_2^c = \frac{3\nu n}{l-1}.$$

Из (7) находим вертикальные компоненты скоростей

$$V_1^c(\eta) = -\frac{S_1^c}{6}\,\eta^3 - \frac{a_2\eta^2}{2}, \quad V_2^c(\eta) = \frac{1}{\nu}\Big(\frac{S_2^c}{6}\,(\eta^3 - l^3) + \frac{a_3}{2}\,(\eta^2 - l^2) + a_4(\eta - l)\Big). \tag{9}$$

Решение в изображениях по Лапласу. Сопряженная начально-краевая задача (3)–(6) интегрируется в квадратурах в пространстве изображений по Лапласу, что позволяет для конкретных жидких сред получить количественные характеристики движения. Пусть выражение

$$\hat{u}(y,p) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\, u(y,t)\, dt$$

является преобразованием Лапласа функции $u(y,t)$ (область его применения см., например, в [12]). В образах по Лапласу рассматриваемая задача сводится к сопряженной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений и имеет решение в виде

$$\begin{aligned} \hat{A}_1(\eta,p) &= C_1^1 \,\mathrm{sh}\, \sqrt{p\,\mathrm{Pr}_1}\,\eta + C_1^2 \,\mathrm{ch}\, \sqrt{p\,\mathrm{Pr}_1}\,\eta - \sqrt{\frac{\mathrm{Pr}_1}{p}} \int\limits_0^\eta A_1^0(z)\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p\,\mathrm{Pr}_1}\;(\eta - z)\,dz, \\ \hat{A}_2(\eta,p) &= C_2^1 \,\mathrm{sh}\, \sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}}\;\eta + C_2^2 \,\mathrm{ch}\, \sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}}\;\eta - \sqrt{\frac{\mathrm{Pr}_2}{\nu p}} \int\limits_1^\eta A_2^0(z)\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}}\;(\eta - z)\,dz; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\hat{H}_1(\eta,p) = \psi\hat{A}_1(\eta,p) + \sqrt{\frac{\mathrm{Sc}}{p}}\;\int\limits_0^\eta \big[\psi\big(p\hat{A}_1(z,p) - A_1^0(z)\big) - H_1^0(z)\big]\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p\,\mathrm{Sc}}\;(\eta - z)\,dz -$$

$$- \frac{1}{\mathrm{sh}\,\sqrt{p\,\mathrm{Sc}}}\sqrt{\frac{\mathrm{Sc}}{p}}\;\int\limits_0^1 \big[\psi\,(p\hat{A}_1(z,p) - A_1^0(z)) - H_1^0(z)\big]\;\mathrm{ch}\,\sqrt{p\,\mathrm{Sc}}\;(1 - z)\,dz\;\;\mathrm{ch}\;\sqrt{p\,\mathrm{Sc}}\,\eta; \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_1(\eta,p) &= D_1^1 \,\mathrm{sh}\,\sqrt{p}\,\eta + D_1^2\,\mathrm{ch}\,\sqrt{p}\,\eta - \hat{S}_1(p)/p, \\ \hat{U}_2(\eta,p) &= D_2^1 \,\mathrm{sh}\,\sqrt{p/\nu}\,\eta + D_2^2\,\mathrm{ch}\,\sqrt{p/\nu}\,\eta - \hat{S}_2(p)/p. \end{aligned} \tag{12}$$

При этом

$$C_1^1 = \frac{1}{\Delta}\Big[\frac{k}{\sqrt{\chi}}\Big(\mathrm{ch}\,\sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}}\;(l-1)F_1 + F_2\Big) + \mathrm{sh}\,\sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}}\;(l-1)F_3\Big], \qquad C_1^2 = \hat{A}_{10}(p),$$

$$\begin{aligned} C_2^1 = \frac{1}{\Delta}\Big[&\mathrm{ch}\,\sqrt{p\,\mathrm{Pr}_1}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}}\;lF_1 + \Big(\mathrm{ch}\,\sqrt{p\,\mathrm{Pr}_1}\;\;\mathrm{ch}\,\sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}} - \\ &- \frac{k}{\sqrt{\chi}}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p\,\mathrm{Pr}_1}\;\;\mathrm{sh}\,\sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}}\Big)F_2 - \mathrm{sh}\,\sqrt{p\,\mathrm{Pr}_1}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}}\;F_3\Big], \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} C_2^2 = \frac{1}{\Delta}\Big[&-\mathrm{ch}\,\sqrt{p\,\mathrm{Pr}_1}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}}\;lF_1 + \Big(\frac{k}{\sqrt{\chi}}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p\,\mathrm{Pr}_1}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}} - \\ &- \mathrm{sh}\,\sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{p\,\mathrm{Pr}_1}\Big)F_2 + \mathrm{sh}\,\sqrt{p\,\mathrm{Pr}_1}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\frac{p\,\mathrm{Pr}_2}{\nu}}\;lF_3\Big]; \end{aligned}$$

$$F_1 = -\hat{A}_{10}(p)\operatorname{ch}\sqrt{p\operatorname{Pr}_1} + \sqrt{\frac{\operatorname{Pr}_1}{p}}\int_0^1 A_1^0(z)\operatorname{sh}\sqrt{p\operatorname{Pr}_1}\,(1-z)\,dz,$$

$$F_2 = \hat{A}_{20}(p) + \sqrt{\frac{\operatorname{Pr}_2}{\nu p}}\int_1^l A_2^0(z)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{\operatorname{Pr}_2}{\nu}}\,(l-z)\,dz, \qquad (14)$$

$$F_3 = -\hat{A}_{10}(p)\operatorname{sh}\sqrt{p\operatorname{Pr}_1} + \sqrt{\frac{\operatorname{Pr}_1}{p}}\int_0^1 A_1^0(z)\operatorname{ch}\sqrt{p\operatorname{Pr}_2}\,(1-z)\,dz;$$

$$D_1^1 = -\frac{1}{\Delta_1}\Big\{\Big[\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\,(1-\operatorname{ch}\sqrt{p})\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1) - \operatorname{sh}\sqrt{p}\,\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1)\Big]\frac{\hat{S}_1(p)}{p} +$$
$$+ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\Big[1-\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1)\Big]\frac{\hat{S}_2(p)}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1)L\Big\}, \qquad D_1^2 = \frac{\hat{S}_1(p)}{p},$$

$$D_2^1 = \frac{1}{\Delta_1}\Big\{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,l(1-\operatorname{ch}\sqrt{p}\,)\frac{\hat{S}_1(p)}{p} + \Big[\frac{\operatorname{ch}\sqrt{p}}{\nu}\Big(\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}} - \operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,l\Big) +$$
$$+ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\operatorname{sh}\sqrt{p}\,\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\Big]\frac{\hat{S}_2(p)}{p} + \frac{\operatorname{sh}\sqrt{p}}{\sqrt{p}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,lL\Big\}, \qquad (15)$$

$$D_2^2 = \frac{1}{\Delta_1}\Big\{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,l(\operatorname{ch}\sqrt{p}-1)\,\frac{\hat{S}_1(p)}{p} + \Big[\frac{\operatorname{ch}\sqrt{p}}{\nu}\Big(\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}} - \operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,l\Big) -$$
$$- \frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\operatorname{sh}\sqrt{p}\,\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\Big]\frac{\hat{S}_2(p)}{p} - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{p}}{\sqrt{p}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,lL\Big\};$$

$$L = 2\hat{A}_1(1,p) + 2\omega\hat{H}_1(1,p),$$
$$\Delta_1 = -\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\operatorname{sh}\sqrt{p}\,\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1) - \operatorname{ch}\sqrt{p}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1); \qquad (16)$$

$$\hat{S}_1(p) = \frac{\sqrt{p}\,L}{Q_1Q_4 - Q_2Q_3}\Big[\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1)(\operatorname{ch}\sqrt{p}-1)Q_4 - \operatorname{sh}\sqrt{p}\Big(\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1)-1\Big)Q_2\Big],$$
$$\hat{S}_2(p) = \frac{\sqrt{p}\,L}{Q_1Q_4 - Q_2Q_3}\Big[\operatorname{sh}\sqrt{p}\Big(\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1)-1\Big)Q_1 - \operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1)(\operatorname{ch}\sqrt{p}-1)Q_3\Big]; \qquad (17)$$

$$Q_1 = \Delta_1(\operatorname{sh}\sqrt{p} - \sqrt{p}\,) + (1-\operatorname{ch}\sqrt{p})\Big(\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\,(1-\operatorname{ch}\sqrt{p})\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1) - \operatorname{sh}\sqrt{p}\,\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1)\Big),$$

$$Q_2 = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\,Q_3, \qquad Q_3 = (\operatorname{ch}\sqrt{p}-1)\Big(\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1)-1\Big), \qquad (18)$$

$$Q_4 = 2\operatorname{ch}\sqrt{p}\Big(1-\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1)\Big) - \frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\operatorname{sh}\sqrt{p}\,\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1) - \Delta_1\sqrt{\frac{p}{\nu}}\,(l-1),$$

где

$$\chi = \frac{\chi_2}{\chi_1}, \qquad \Delta = \frac{k}{\sqrt{\chi}}\operatorname{sh}\sqrt{p\operatorname{Pr}_1}\,\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}}\,(l-1) + \operatorname{ch}\sqrt{p\operatorname{Pr}_1}\,\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}}\,(l-1).$$

Пусть

$$\lim_{\tau\to\infty} A_{j0}(\tau) = A_j^0 = \mathrm{const}\,. \tag{19}$$

Тогда, проведя вычисления с использованием явных выражений (10)–(18) можно установить предельные равенства

$$\begin{gathered} \lim_{p\to 0} p\hat{A}_j(\eta,p) = A_j^c(\eta), \qquad \lim_{p\to 0} \hat{H}_1(\eta,p) = H_1^c(\eta), \\ \lim_{p\to 0} p\hat{U}_j(\eta,p) = U_j^c(\eta), \qquad \lim_{p\to 0} p\hat{S}_j(p) = S_j^c, \end{gathered} \tag{20}$$

где правые части представляют собой стационарное решение (8).

Согласно [12] равенства (20) показывают, что при $\tau \to \infty$ нестационарное решение $A_j(\eta,\tau)$, $H_1(\eta,\tau)$, $U_j(\eta,\tau)$, $S_j(\tau)$ стремится к стационарному режиму (8), если выполняются условия (19).

Замечание 1. При выполнении условий (19) с увеличением безразмерного времени τ функции $B_j(\eta,\tau)$, $E_j(\eta,\tau)$, $V_j(\eta,\tau)$ также выходят на стационарные значения.

Замечание 2. Используя метод априорных оценок [13], можно доказать, что

$$\begin{gathered} |A_j(\eta,\tau) - A_j^c(\eta)| \leqslant N_j\,\mathrm{e}^{-\delta\tau}, \qquad |H_1(\eta,\tau) - H_1^c(\eta)| \leqslant N_3\,\mathrm{e}^{-\delta_1\tau}, \\ |U_j(\eta,\tau) - U_j^c(\eta)| \leqslant K_j\,\mathrm{e}^{-\delta_2\tau}, \qquad |S_j(\tau) - S_j^c| \leqslant K_3\,\mathrm{e}^{-\delta_3\tau}, \end{gathered} \tag{21}$$

если сходятся интегралы

$$\int_0^\infty |A_{j0}(\tau) - A_j^0|\,\mathrm{e}^{\delta\tau}\,d\tau, \qquad \int_0^\infty |A_{j0}^{(k)}(\tau)|\,\mathrm{e}^{\delta\tau}\,d\tau, \qquad k = 1,2. \tag{22}$$

В (21) N_j, N_3, K_j, K_3, δ, δ_1, δ_2, δ_3 — положительные постоянные, зависящие от параметров жидкости, бинарной смеси и толщины слоев. Условия (22) означают, что функции $A_{j0}(\tau)$ стремятся по экспоненте с показателем $-\delta$ к постоянным предельным значениям. Полученные явные формулы (10)–(18) описывают также эволюцию движения для функций $A_{j0}(\tau)$, не удовлетворяющих условиям (22). Более того, функции $A_{j0}(\tau)$ могут иметь конечное число разрывов первого рода [12, 13],

Результаты численных расчетов. С использованием формул в изображениях по Лапласу (10)–(12) численно найдены поля скоростей, температур и концентрации. Использовалась модельная система с параметрами $\mathrm{Pr}_1 = 29$, $\mathrm{Pr}_2 = 1{,}52$, $\rho = 0{,}945$, $\nu = 7{,}1$, $k = 0{,}42$, $\psi = 1{,}49$, $\omega = -0{,}65$, $l_1 = 0{,}001$, $l_2 = 0{,}002$.

На рис. 1 представлены профили функций $U(\eta)$, $V(\eta)$ для стационарного случая, когда $A_{20} = 0$, $A_{10} < 0$, т. е. температура имеет максимум на нижней твердой стенке в точке $\xi = 0$.

Вертикальная компонента скорости в нижнем слое положительна, горизонтальная меняет знак, следовательно, жидкость в нижнем слое при $\xi = 0$ движется вертикально вверх вдоль оси η. Этот вывод согласуется с рис. 2, на котором показано векторное поле скоростей $u = U(\eta)\xi$, $v = V(\eta)$ стационарного течения, описываемого формулами (8), (9), при $A_{20} = 0$, $A_{10} < 0$.

На рис. 3, 4 представлены профили безразмерных компонент U, V скорости потока в различные моменты времени. Положим, что $A_{10} = b_1 + b_2\exp(-b_3\tau)\sin(b_4\tau)$ (b_2 — амплитуда, b_4 — частота), причем при $b_3 > 0$ и больших временах выполняется условие (19). На рис. 3 показано изменение во времени функций $U(\eta,\tau)$, $V(\eta,\tau)$ при $A_{10} = 3 + \exp(-0{,}05\tau)\sin(0{,}5\tau)$, $A_{20} = 0$. Со временем безразмерные компоненты U, V

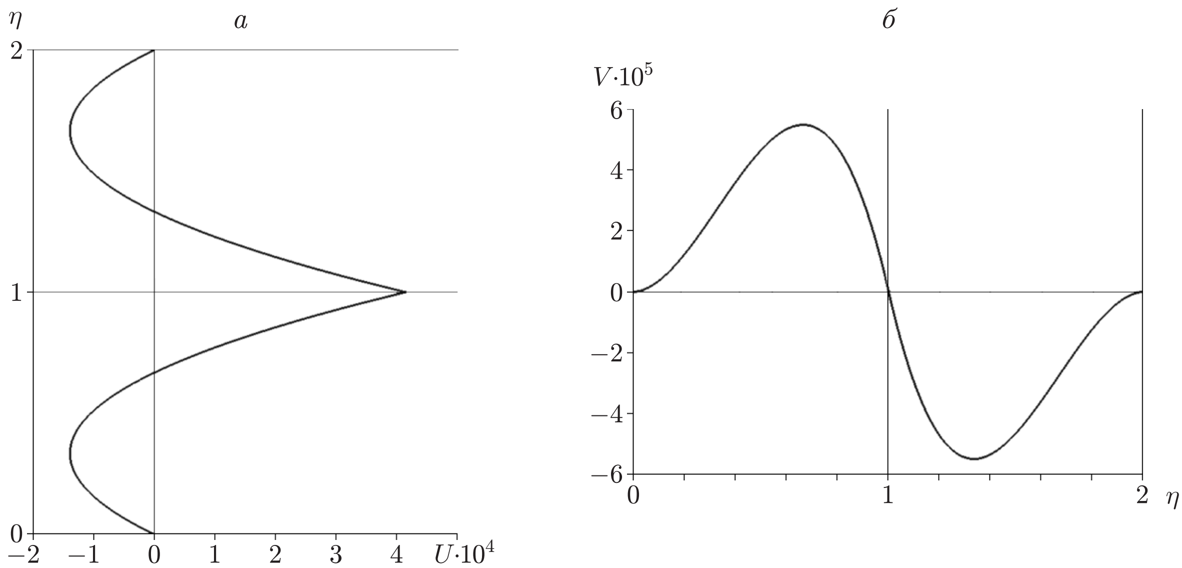

Рис. 1. Профили функций $U(\eta)$ (a) и $V(\eta)$ ($б$) в стационарном случае при $A_{20} = 0$, $A_{10} < 0$

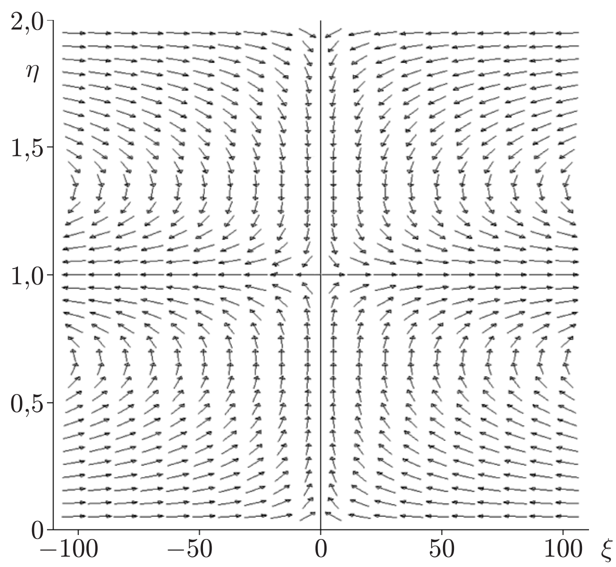

Рис. 2. Стационарное векторное поле $u = U(\eta)\xi$, $v = V(\eta)$ при $A_{20} = 0$, $A_{10} < 0$

скорости выходят на стационарный режим (кривая *1*), что согласуется с априорными оценками (21). С ростом $|b_1|$ увеличивается интенсивность потока вблизи поверхности раздела.

Рассмотрим случай, когда условия (19) не выполняются ($b_3 \leqslant 0$). В предположении, что $A_{10} = 2\sin(0{,}1\tau)$, выхода на стационарный режим не происходит, наблюдается смена направления движения (см. рис. 4) в различные моменты времени.

На рис. 5 представлена зависимость градиента поверхностного натяжения на поверхности раздела $\eta = 1$ от времени $\sigma_\xi = -2(\varkappa_1 A_1(1,\tau) + \varkappa_2 H_1(1,\tau))\xi$ при $\xi = 1$. Видно, что при выполнении условий (19) со временем градиент поверхностного натяжения стремится к постоянному значению (см. рис. 5,a), вследствие чего термокапиллярные силы уравновешиваются и движение устанавливается. Если со временем градиент поверхност-

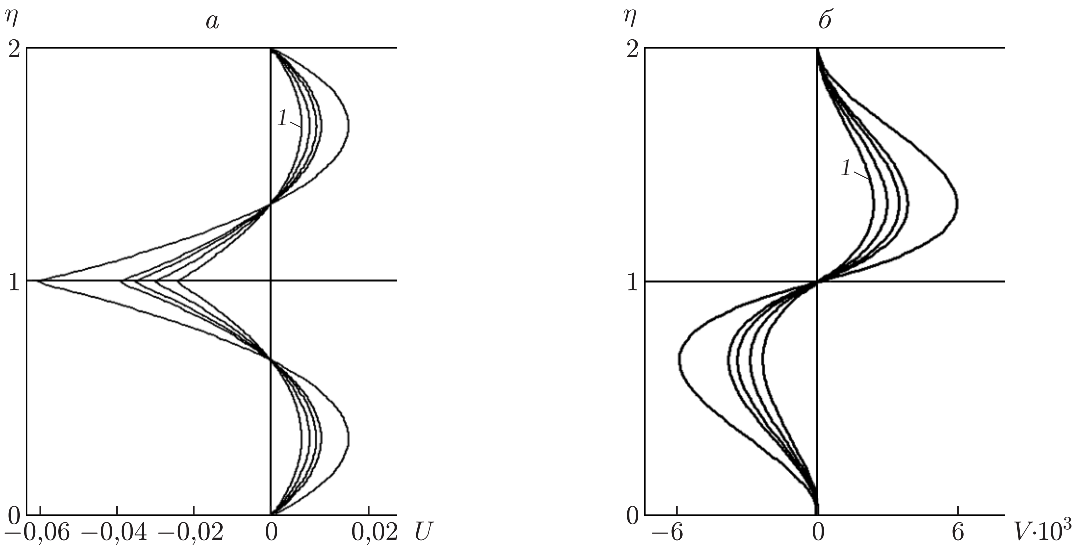

Рис. 3. Профили функций U (*а*), V (*б*) в различные моменты времени при $A_{10} = 3 + \exp(-0{,}05\tau)\sin(0{,}5\tau)$, $A_{20} = 0$:
1 — выход на стационарный режим

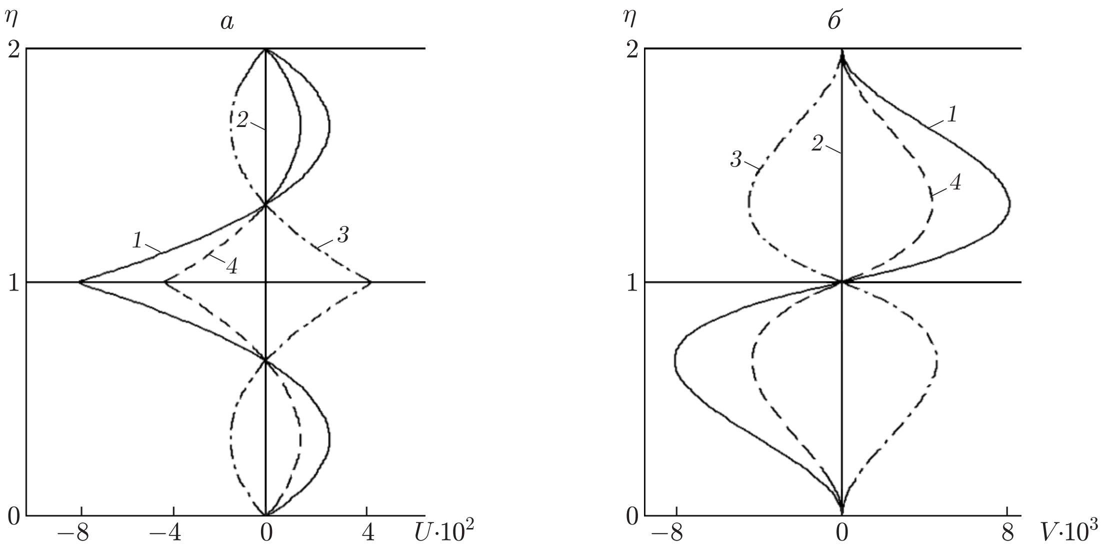

Рис. 4. Профили функций U (*а*), V (*б*) в различные моменты времени при $A_{10} = 2\sin(0{,}1\tau)$, $A_{20} = 0$ (нестационарный режим):
1 — $\tau = 10$, *2* — $\tau = 25$, *3* — $\tau = 30$, *4* — $\tau = 60$

ного натяжения не стабилизируется, что характерно, например, для тригонометрической зависимости A_{10}, то вследствие изменения знака градиента σ_ξ меняется направление движения жидкости, а при $\sigma_\xi = 0$ капиллярные и концентрационные силы уравновешиваются и движение прекращается.

Заключение. В работе получено точное решение уравнений конвекции в системе, состоящей из двух слоев несмешивающихся жидкостей при малых числах Марангони. В случае стационарной конвекции решение найдено в виде аналитических формул. Для решения нестационарной задачи использован метод Лапласа. Построено аналитическое решение задачи для определения поля скоростей, температур и концентрации в изображениях по Лапласу. Истинные поля скорости, температуры и концентрации для модельной

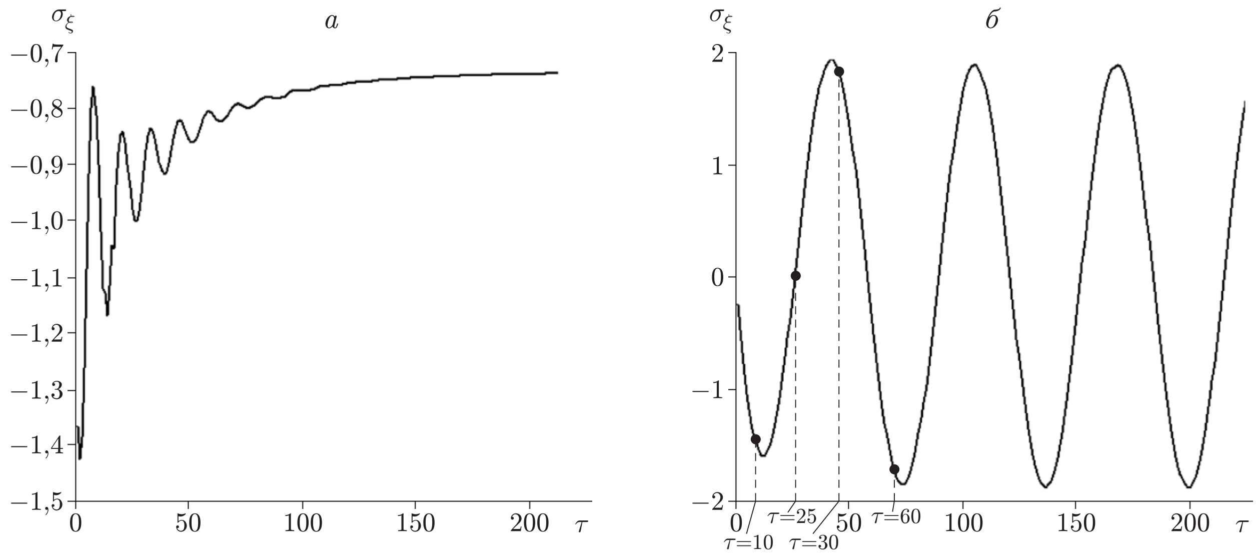

Рис. 5. Зависимость градиента поверхностного натяжения от времени при различных A_{10}:
а — $A_{10} = 3 + \exp(-0{,}05\tau)\sin(0{,}5\tau)$, *б* — $A_{10} = 2\sin(0{,}1\tau)$

системы восстановлены с помощью численного обращения преобразования Лапласа. Результаты расчетов показывают, что термоконцентрационные силы порождают сложное циркуляционное движение в слоях, причем поток меняет направление по толщине слоя. Поток симметричен относительно оси $x = 0$, на которой точка $y = 0$ является точкой максимума или минимума температуры на твердой стенке. Полученные результаты можно использовать для описания двухфазных систем в микроканалах и процессов охлаждения пленок потоками жидкости или газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев В. К.** Термокапиллярная неустойчивость / В. К. Андреев, В. Е. Захватаев, Е. А. Рябицкий. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2000.
2. **Андреев В. К.** Эволюция совместного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием нестационарного перепада давления // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 94–107.
3. **Собачкина Н. Л.** О совместном движении бинарной смеси и вязкой жидкости в теплоизолированной цилиндрической трубе // Вычисл. технологии. 2011. Т. 16, № 4. С. 120–133.
4. **Лемешкова Е. Н.** Прямая и обратная задача о совместном движении трех вязких жидкостей в плоских слоях // Журн. Сиб. федер. ун-та. Сер. Математика и физика. 2011. Т. 4, № 3. С. 363–370.
5. **Hiemenz K.** Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder // Dinglers Poliytech. J. 1911. Bd 3326. S. 321–324.
6. **Brady J. F., Acrivos A.** Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity // J. Fluid Mech. 1981. V. 112. P. 127–150.
7. **Riabouchinsky D.** Quelques considerations sur les mouvements plans rotationnels d'un liquide // C. R. Acad. Sci. 1924. V. 179. P. 1133–1136.
8. **Петров А. Г.** Точное решение уравнений Навье — Стокса в слое жидкости между движущимися параллельно пластинами // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 5. С. 13–18.

9. **Петров А. Г.** Построение решений уравнений Навье — Стокса для слоя жидкости между движущимися параллельными пластинами при малых и умеренных числах Рейнольдса // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 1. С. 51–56.
10. **Петрова А. Г., Пухначев В. В., Фроловская О. А.** Нестационарное движение вблизи критической точки // Успехи механики сплошных сред: Сб. докл. междунар. конф., приуроч. к 75-летию акад. В. А. Левина, Владивосток, 28 сент. — 4 окт. 2014 г. Иркутск: Мегапринт, 2014. С. 385–388.
11. **Пухначев В. В.** Групповые свойства уравнений Навье — Стокса в плоском случае // ПМТФ. 1960. № 1. С. 83–90.
12. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973.
13. **Андреев В. К., Черемных Е. Н.** Совместное ползущее движение трех вязких жидкостей в плоском слое: априорные оценки и сходимость к стационарному режиму // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 1. С. 3–17.

Поступила в редакцию 15/VI 2017 г.,
в окончательном варианте — 29/XI 2017 г.