с координатами $\chi = 37{,}3333$, $z = 0{,}1111$ виден на рис. 2. Кривые соответствуют источнику с параметрами $\varkappa_0 = 0{,}9643$, $\varkappa_1 = 0$, $N = 10$.

Рис. 3 иллюстрирует зависимость амплитуды давлений от горизонтальной координаты x при $z = 0{,}1111$ в момент времени $t = 37{,}3333$ для импульсного источника с заполнением $\varkappa_0 = 2{,}3559$, $\varkappa_1 = 3{,}2143$, $N = 5$.

Численный эксперимент показывает, что область вблизи переднего фронта волнового пакета определяется ограниченным количеством наиболее быстрых первых мод с учетом их переотражений. В дальнейшей его структуре участвует увеличивающееся количество мод, влияние же их переотражений спадает.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шендеров Е. Л.** Излучение и рассеяние звука.— Л.: Судостроение, 1989.
2. **Берктай Х. О., Мустафа А. Х. А.** Прохождение узкого звукового пучка через границу между двумя жидкостями // Акустика дна океана.— М.: Мир, 1984.
3. **Skudrzyk E.** The foundation of acoustics.— Wien; N. Y.: Springer, 1971.
4. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости.— М.: Наука, 1986.
5. **Габов С. А.** О решении одной задачи динамики стратифицированной жидкости и его стабилизации при $t \to \infty$ // ЖВММФ.— 1985.— Т. 25, № 5.
6. **Золотарев А. А., Золотарева Л. И.** Метод факторизации в неустановившихся задачах о возбуждении гравитационно-упругих волн в жидкости с частично свободной границей // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 6.
7. **Нобл Б.** Метод Винера—Хопфа.— М.: ИЛ, 1962.
8. **Ворович И. И., Бабешко В. А.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.— М.: Наука, 1979.
9. **Werner P.** Ein Resonanzphönomen in der Theorie akustischer und electromagnetischer Wellen // Math. Meth. Appl. Sci.— 1984.— V. 6.

г. Ростов-на-Дону *Поступила 10/X 1988 г., в окончательном варианте — 27/IV 1989 г.*

УДК 532.526

В. А. Батищев

ВЛИЯНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ЭФФЕКТА НА ФОРМУ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ МАРАНГОНИ

1. При малых коэффициентах вязкости $\nu \to 0$ и температуропроводности $\chi \to 0$ рассматривается нелинейная стационарная задача о течении вязкой теплопроводной жидкости в неограниченной области D под действием термокапиллярных сил, вызванных неравномерным нагревом свободной границы Γ:

$$(1.1)\qquad (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -(1/\rho)\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g},\ \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T,\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0;$$

$$(1.2)\qquad \begin{gathered} p = 2\nu\rho\mathbf{n}\Pi\mathbf{n} + \sigma(k_1 + k_2) + p_*,\quad (x, y, z) \in \Gamma,\\ 2\nu\rho\Pi\mathbf{n} - 2\nu\rho(\mathbf{n}\Pi\mathbf{n})\mathbf{n} = \nabla_1\sigma;\quad \mathbf{v}\mathbf{n} = 0,\quad (x, y, z) \in \Gamma,\\ \varkappa\partial T/\partial n = q,\ (x, y, z) \in \Gamma_1;\ T = T_\Gamma,\ (x, y, z) \in \Gamma_2,\\ \mathbf{v} = 0,\ \partial T/\partial n = 0,\ (x, y, z) \in L. \end{gathered}$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$— вектор скорости; T — температура; $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$— орт оси z, g — ускорение силы тяжести); $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к свободной границе Γ; Π — тензор скоростей деформации; k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности Γ; $p_* = \mathrm{const}$ — давление на Γ; $\nabla_1 = \nabla - (\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n}$ — градиент вдоль Γ; σ — коэффициент поверхностного натяжения, считается линейной функцией температуры $\sigma = \sigma_0 + \sigma_T(T - T_*)$ (σ_0, σ_T, T_* — известные константы

($\sigma_T < 0$)); L — твердая граница. Поверхность Γ состоит из двух частей Γ_1 и Γ_2; $q(x, y, z)$— заданный тепловой поток на Γ_1; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности. Поле скоростей на бесконечности исчезает.

При исчезающих коэффициентах вязкости и теплопроводности вблизи границ области формируются нелинейные пограничные слои. В неограниченной области всюду вне пограничных слоев течение приближенно описывается уравнениями Эйлера. В [1—5] изучены нелинейные пограничные слои Марангони, возникающие вблизи свободной границы вследствие термокапиллярного эффекта. В [6] получены асимптотические разложения при $\nu \to 0$ решения стационарной задачи о течении жидкости под действием касательных напряжений.

Ниже исследуются формальные асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) при ν, $\chi \to 0$. Задача приводится к безразмерному виду и вводится малый параметр $\varepsilon = \mathrm{M}^{-1/3}$ ($\mathrm{M} = |\sigma_T|dQ\rho^{-1}\nu^{-2}\varkappa^{-1}$ — число Марангони, d и Q — характерные масштабы длины и теплового потока). Для безразмерного давления p' имеем соотношение $p = Pp' - \rho gz$ ($P = \sigma_0/d$ — масштаб давления). Характерное значение скорости в пограничном слое вблизи свободной границы $U = (\sigma_T^2 Q^2\nu^{-1}d^{-1}\varkappa^{-2}\rho^{-2})^{1/3}$ принимается за масштаб скорости. Асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) строятся как

$$(1.3)\quad \mathbf{v} \sim \mathbf{h}_0 + \varepsilon(\mathbf{h}_1 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1) + \ldots,\ p' \sim \lambda q_0 + \varepsilon\lambda(p_1 + q_1 + r_1) + \ldots,$$
$$T \sim \theta_0 + T_0 + t_0 + O(\varepsilon),\ \zeta \sim \zeta_0 + \varepsilon\zeta_1 + \ldots,$$

где $\lambda = |\sigma_T| Q\sigma_0^{-1}\varkappa^{-2}$ — капиллярная константа [3]; $z = \zeta(x, y)$— уравнение свободной границы. Обозначим D_Γ — область пограничного слоя вблизи свободной границы, а D_L — вблизи твердой стенки. Тогда $\mathbf{h}_k$, q_k, θ_0 — функции типа решений задачи пограничного слоя в D_Γ; $\mathbf{w}_1$, r_1, t_0 — в D_L, а $\mathbf{v}_1$, p_1, T_0 определяют решение вне D_L и D_Γ. Порядки главных членов в разложениях (1.3) находятся из условий равенства порядков вязких и инерционных членов с системе Навье — Стокса (1.1) и в краевых условиях (1.2) для касательных напряжений. В этом случае толщина пограничного слоя в области D_Γ имеет порядок ε.

2. Краевая задача для главных членов асимптотики (1.3), определяющих течение в пограничном слое вблизи свободной границы, получается применением к системе (1.1), (1.2) второго итерационного процесса методом Вишика — Люстерника [7]. Вблизи поверхности Γ вводятся локальные ортогональные координаты ξ, φ, θ [6] (ξ — расстояние от точки $N(x, y, z)$ до Γ; φ, θ — криволинейные координаты на Γ основания нормали, опущенной из точки N на Γ). Предполагается, что отрезки нормалей к поверхности Γ при достаточно малых ξ не пересекаются.

Пусть $h_{\varphi k}$, $h_{\theta k}$, $h_{\xi k}$ — компоненты вектора $\mathbf{h}_k$ в локальных координатах. Функцию $T_0 = 0$ возьмем в качестве решения вырожденной для (1.1), (1.2) задачи при $\nu = \chi = 0$. Подставляем (1.3) в (1.1), (1.2), разлагаем $\mathbf{v}_1$, p_1 в ряды Тейлора по степеням ξ и вводим преобразование растяжения $\xi = \varepsilon s$. Обозначим $H_{\xi 1} = h_{\xi 1} + \mathbf{v}_1\mathbf{n}|_\Gamma$. Приравнивая нулю коэффициенты при ε^{-1}, ε^0, получим, что $h_{\xi 0} = 0$, а $h_{\varphi 0}$, $h_{\theta 0}$, $H_{\xi 1}$ удовлетворяют уравнениям пограничного слоя Прандтля. Приведем краевую задачу для $h_{\varphi 0}$, $H_{\xi 1}$, θ_0 в плоском случае, считая координату φ длиной дуги вдоль поверхности Γ:

$$(2.1)\qquad h_{\varphi 0}\partial h_{\varphi 0}/\partial\varphi + H_{\xi 1}\partial h_{\varphi 0}/\partial s = \partial^2 h_{\varphi 0}/\partial s^2,$$
$$h_{\varphi 0}\partial\theta_0/\partial\varphi + H_{\xi 1}\partial\theta_0/\partial s = \mathrm{Pr}^{-1}\partial^2\theta_0/\partial s^2,\ \partial h_{\varphi 0}/\partial\varphi + \partial H_{\xi 1}/\partial s = 0,$$

$$\partial h_{\varphi 0}/\partial s = -\partial\theta_0/\partial\varphi,\quad \partial\theta_0/\partial s|_{\Gamma_1} = -\mathrm{Pr}^{-1/2}q,\quad \theta_0|_{\Gamma_2} = \theta_a,\quad H_{\xi 1} = 0\quad (s = 0),$$
$$h_{\varphi 0} = h_{\xi 1} = \theta_0 = 0\quad (s = \infty)$$

(Pr — число Прандтля, $q(\varphi)$— заданный безразмерный тепловой поток на Γ_1). Отметим, что задача (2.1) при $\theta_0 = 0$ для заданных касательных напряжений на Γ и заданном начальном профиле скорости в области D исследована в [5], где выписаны условия ее разрешимости.

Найдем значение q_0 на свободной границе. Следуя [6], выводим формулу для q_0 в D_Γ:

$$q_0 = -k_1 \int_s^\infty h_{\varphi 0}^2\, ds - k_2 \int_s^\infty h_{\theta 0}^2\, ds. \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в краевое условие (1.2) для нормальных напряжений и устремляя ν к нулю, получим уравнение свободной границы в главном приближении (в размерной форме)

$$\sigma (k_1 + k_2) + k_1 \int_0^\infty h_{\varphi 0}^2\, ds + k_2 \int_0^\infty h_{\theta 0}^2\, ds = \rho g z + c. \tag{2.3}$$

Данная формула легко упрощается для плоской задачи. В этом случае, интегрируя первое уравнение (2.1) сначала по s на полуоси $(0, \infty)$, а затем по φ на отрезке $[\varphi_0, \varphi]$, имеем соотношение

$$\int_0^\infty h_{\varphi 0}^2\, ds = [\theta_0(\varphi) - \theta_0(\varphi_0)]_{s=0} + \int_0^\infty f_0^2(s)\, ds \tag{2.4}$$

($f_0(s) = h_{\varphi 0}(s, \varphi_0)$— профиль скорости в сечении $\varphi = \varphi_0$). Подставляем (2.4) в (2.3), полагаем $k_2 = 0$ и, представляя безразмерный коэффициент поверхностного натяжения в виде $\sigma = 1 - \lambda\theta_0|_\Gamma$, выводим уравнение свободной границы в безразмерной форме

$$k_1 \left[1 - 2\lambda T_\Gamma(\varphi) + \lambda T_\Gamma(\varphi_0) + \int_0^\infty f_0^2\, ds \right] = \mathrm{B} z + c, \tag{2.5}$$

где T_Γ — значение температуры θ_0 на свободной границе, $\mathrm{B} = \rho g d^2/\sigma_0$ — число Бонда. Таким образом, функция ζ_0 в (1.3) находится решением уравнений (2.3) или (2.5).

Невязкое течение вне D_L, D_Γ получается применением первого итерационного процесса [7] к (1.1), (1.2). Главные члены асимптотических разложений (1.3) $\mathbf{v}_1$, p_1 находятся путем решения краевой задачи

$$(\mathbf{v}_1, \nabla)\mathbf{v}_1 = -\nabla p_1, \ \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0,$$
$$\mathbf{v}_1 \mathbf{n}_0|_{\Gamma_0} = H_{\xi 1}|_{\xi=\infty}, \quad \mathbf{v}_1 \mathbf{n}_1|_L = 0, \quad \mathbf{v}_1 = 0 \quad (x^2 + y^2 + z^2 = \infty)$$

(Γ_0 — поверхность $z = \zeta_0$, $\mathbf{n}_0$ — вектор нормали к Γ_0, $\mathbf{n}_1$ — вектор нормали к твердой стенке).

Вектор-функция $\mathbf{w}_1$ определяет поле скоростей в пограничном слое вблизи твердой границы и компенсирует невязку, возникающую при выполнении вектором $\mathbf{v}_1$ условия прилипания на L. Краевая задача для $\mathbf{w}_1$, r_1 не приводится, так как эти функции дают вклад в уравнение свободной границы в высших приближениях, начиная со второго.

3. Рассмотрим плоскую задачу о расчете формы свободной границы капиллярной жидкости, налитой на твердую горизонтальную поверхность и смачивающей ее в полуплоскости $x \geqslant 0$. Обозначим β — угол смачивания, образуемый жидкостью на линии смачивания $x = 0$ с твердой стенкой. Предположим, что на части свободной границы Γ_1 задан постоянный тепловой поток $q = \mathrm{const}$ при $\varphi \in [0, l]$, а при $\varphi > l$ задана постоянная температура (φ — длина дуги, отсчитываемая от точки контакта вдоль свободной границы). Приведем решение системы уравнений пограничного слоя (2.1) на участке Γ_1 при $q = 1$. В [2] найдены автомодельные решения уравнений температурного пограничного слоя вблизи поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей. Система (2.1) допускает решение $h_{\varphi 0} = f'(\eta)$, $\theta_0 = \sqrt{\varphi}\tau(\eta)$, $\eta = s/\sqrt{\varphi}$. Для $f(\eta)$, $\tau(\eta)$ выводим краевую задачу (начальный профиль задавать не надо, так как он удовлетворяет

условию автомодельности)

$$2f''' + ff'' = 0,\ 2\,\mathrm{Pr}^{-1}\tau'' + f\tau' - f'\tau = 0, \tag{3.1}$$

$$f(0) = 0,\ f''(0) = -0{,}5\tau(0),\ \tau'(0) = -\mathrm{Pr}^{-1/2},\ f'(\infty) = \tau(\infty) = 0.$$

Полученная система для различных чисел Прандтля интегрировалась численно с применением метода Рунге — Кутта. При фиксированных значениях Pr функции $f'(\eta)$ и $\theta(\eta)$ монотонно убывают с ростом η, а при больших η затухание скорости тем больше, чем меньше Pr. Профили скоростей для различных Pr пересекаются, а профили температур — нет. С ростом Pr толщина динамического (скоростного) пограничного слоя увеличивается, а толщина температурного — уменьшается. На рис. 1 изображены графики зависимостей скорости $f'(0)$ (кривая *1*) и температуры $\tau(0)$ (*2*) от числа Прандтля на свободной границе.

Расчет формы свободной границы проводится интегрированием уравнения (2.5), где полагается $\varphi_0 = 0$ и $f_0 = 0$ (так как $h_{\varphi 0} = 0$ при $\varphi = 0$). Уравнение (2.5) с учетом решения задачи (3.1) записывается в виде

$$\zeta_0''\left(1 + \zeta_0'^2\right)^{-3/2}(1 + \lambda F(\varphi)) = \mathrm{B}\zeta_0 + c \tag{3.2}$$

(штрих обозначает производную по x; $F(\varphi) = \tau(0)(2\sqrt{\varphi} - \sqrt{l})$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant l$ и $F(\varphi) = \tau(0)\sqrt{l}$ при $\varphi > l$). Для задачи (3.2) ставятся краевые условия $\zeta_0'(0) = \operatorname{tg}\beta$, $\zeta_0(0) = 0$ (β — угол смачивания). Уравнение (3.2) численно интегрировалось для различных λ и β при $\mathrm{B} = 1$, $\mathrm{Pr} = 7$ и $\tau(0) = 0{,}2235$. В расчетах полагалось $l = 9$, при этой длине дуги свободная граница выходит на горизонтальную асимптоту. При интегрировании (3.2) переписывалось в параметрической форме с длиной дуги в качестве параметра. Неизвестная постоянная c определялась при дополнительном условии $\zeta_0'(\infty) = 0$. Толщина слоя жидкости на бесконечности находилась по формуле $H = -c\mathrm{B}^{-1}$. Расчеты проводились при значениях λ в интервале $0 \leqslant \lambda < \lambda_* = 1{,}4914$. При $\lambda = \lambda_*$ коэффициент перед старшей производной в (3.2) обращался в нуль для $\varphi = 0$.

На рис. 2 приведены зависимости угла контакта β от параметра λ, характеризующего величину теплового потока. Вдоль кривых *1*—*4* толщина слоя H постоянна и соответственно равна 1,85; 1,5; 1; 0,5. С ростом λ β увеличивается и тем быстрее, чем больше толщина слоя. Для каждого H максимальное β равно π и достигается при некотором $\lambda_1 \leqslant \lambda_*$; так, $\lambda_1 = 0{,}5$ при $H = 1{,}85$. При убывании H λ_1 возрастает и $\lambda_1 \to \lambda_*$ при $H \to 0$. Рассчитанная зависимость H от величины угла β показала, что при фиксированном λ H монотонно увеличивается с ростом β и достигает максимума при $\beta = \pi$. Это максимальное значение равно двум при $\lambda = 0$ и убывает до нуля с ростом λ.

Полученные результаты позволяют рассчитать форму плоского мениска, примыкающего к твердой вертикальной стенке. Теперь жидкость заполняет бесконечную область, ограниченную стенкой $x = 0$ и свободной границей $z = \zeta(x)$. Уравнение (3.1) интегрируется при условиях $\zeta_0'(0) = \operatorname{tg}\beta$, $\zeta_0(\infty) = 0$, где β — острый угол между касательной к свободной границе и осью x при $x = 0$. Функция $F(\varphi)$ остается прежней. Постоянная $c = 0$ в (3.2). При $0 \leqslant \lambda < \lambda_*$ высота мениска $h = \zeta_0(0)$ монотонно возрастает с ростом β и достигает максимального значения при $\beta = \pi/2$. Этот максимум равен $\sqrt{2}$ при $\lambda = 0$. При фиксированном β высота мениска убывает с ростом λ и обращается в нуль при $\lambda = \lambda_* = 1{,}491$.

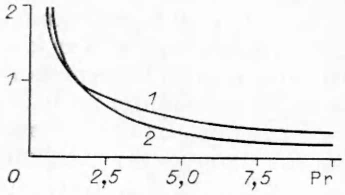

Рис. 1

Отметим, что в (1.3) не входят функции пограничного слоя, проявляющие себя в области D_1 — окрестности точки контакта свободной границы и твердой стенки. В D_1 асимптотические разложения носят более сложный характер, чем (1.3). Уравнения пограничного слоя в D_1 совпадают с полными уравнениями Навье — Стокса. Функ-

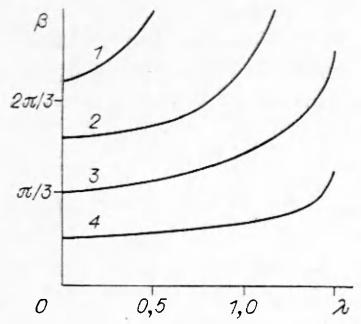

Рис. 2

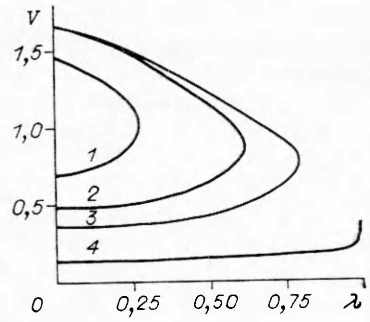

Рис. 3

ции пограничного слоя дают вклад в уравнение свободной границы лишь в высших приближениях и потому здесь не учитываются. Асимптотические исследования системы Навье — Стокса вблизи точки контакта проведены в [8, 9].

4. Рассмотрим осесимметричную задачу о расчете формы свободной границы капли, вытекающей из отверстия в плоской горизонтальной стенке. Свободная поверхность опирается на кромку круглого отверстия радиуса R. Предположим, что на свободной границе задано распределение температуры $T - T_* = ARf(\varphi)$ (φ — безразмерная длина дуги в осевом сечении, отсчитываемая от оси симметрии). Введем параметр $\lambda = |\sigma_T| AR\sigma_0^{-1}$, характеризующий величину градиента температуры вдоль свободной границы. Так как имеет место осевая симметрия $h_{\theta 0} = 0$, из уравнений пограничного слоя получаем, что для $h_{\varphi 0}$ справедливо соотношение

$$(4.1)\qquad \int_0^\infty h_{\varphi 0}^2\, ds = \frac{1}{r}\int_0^\varphi r(\varphi)\frac{d\sigma}{d\varphi}\, d\varphi$$

($r = r(\varphi)$, $z = z(\varphi)$— параметрические уравнения свободной границы в цилиндрических координатах). Здесь учтено, что $h_{\varphi 0} \to 0$ при $\varphi \to 0$. Свободная граница удовлетворяет уравнению (2.3), которое, согласно (4.1), приводится в безразмерной форме к системе уравнений

$$(4.2)\qquad \frac{(rz')'}{rr'}(1-\lambda f) - \lambda\frac{r'z''-r''z'}{r}\int_0^\varphi rf'\, d\varphi = z\mathrm{B} + c, \quad r'^2 + z'^2 = 1.$$

Помещая начало системы координат на свободную границу на оси симметрии, записываем краевые условия $r(0) = z(0) = z'(0) = 0$, $r'(0) =$ $= 1$. Система (4.2) интегрируется численно с применением метода Рунге — Кутта. При $\varphi \to 0$ решение системы разлагается в ряд по степеням φ и сращивается с численным. Задаются число Бонда, параметр λ, функция $f(\varphi)$, а определяются постоянная c, объем капли V и угол β ($\pi - \beta$ — угол в точке контакта между касательной к осевому сечению свободной границы и горизонтальной твердой стенкой).

В случае $f(\varphi) = \exp(-\varphi)$ расчеты проведены при $\mathrm{B} = -1$, постоянном $V = 1$ и для различных R. Заметим, что при фиксированном R могут существовать несколько форм свободной границы с разными β. Для первой ветви решений с ростом λ угол β уменьшается от некоторого β_0 при $\lambda = 0$ до β_1 при $\lambda = \lambda_*$. Решение не существует при $\lambda > \lambda_*$, λ_* зависит от R и увеличивается с ростом R, однако не превосходит единицы. Например, $\lambda_* = 0{,}6$, $\beta_0 = 87{,}6°$, $\beta_1 = 60{,}8°$ при $R = 0{,}975$. Для второй ветви решений с убыванием λ β уменьшается от β_1 при $\lambda = \lambda_*$ до некоторого β_3 при $\lambda = 0$.

При $f(\varphi) = 1 - \varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 1)$, $f(\varphi) = 0$ $(\varphi > 1)$ расчеты проведены при постоянном $R = 1$ для $\mathrm{B} = -1$ и при различных значениях V.

При заданном V могут существовать несколько решений. Для первой ветви решений при фиксированном β с ростом λ объем капли увеличивается от V_1 при $\lambda = 0$ до V_2 при $\lambda = \lambda_1$. Решение не существует при $\lambda > \lambda_1$, λ_1 зависит от β и возрастает от 0 до 1 при убывании β от 86° до 0. Для второй ветви решений объем капли увеличивается от V_2 при $\lambda = \lambda_1$ до V_3 при $\lambda = 0$. Например, $V_1 = 0{,}36$, $V_2 = 0{,}78$, $V_3 = 1{,}66$, $\lambda_1 = 0{,}79$ при $\beta = 60°$.

На рис. 3 приведены зависимости V от λ. Кривые *1—4* отвечают $\beta = 80, 70, 60, 30°$. Максимальное значение λ равно единице, ему соответствует критическая температура на свободной границе, при которой коэффициент поверхностного натяжения обращается в нуль.

5. Рассмотрим влияние термокапиллярного эффекта на форму свободной границы жидкости, заполняющей горизонтальный слой с толщиной порядка толщины пограничного слоя ε. Здесь $\varepsilon = \mathrm{M}^{-1/3}$ ($\mathrm{M} = |\sigma_T| A_1 L^2 \rho^{-1} \nu^{-2}$ — число Марангони, A_1 — характерный масштаб градиента температуры, L — характерный горизонтальный масштаб). Обозначим $U_1 = \left(|\sigma_T|^2 A_1^2 L \rho^{-2} \nu^{-1}\right)^{1/3}$ характерную скорость в пограничном слое, тогда безразмерное давление p' введем по формуле $p = \rho U^2 p' - \rho g z$. Примем $\mathrm{B}_1 = \rho g h^2 \sigma_0^{-1}$ — число Бонда. Рассчитаем плоское термокапиллярное течение в области, ограниченной свободной границей Γ и твердой стенкой, вызванное нагревом свободной границы при заданной постоянной температуре стенки. При $\varepsilon \to 0$ асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) (Γ_1 — пустое множество) строятся в виде рядов

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{h}_0 + \varepsilon \mathbf{h}_1 + \ldots, \quad \zeta \sim \varepsilon \zeta_1 + \ldots, \quad p' \sim q_0 + \varepsilon q_1 + \ldots, \quad T \sim \tau_0 + \varepsilon \tau_1 + \ldots \tag{5.1}$$

Уравнения для главных членов асимптотики выводятся с помощью второго итерационного процесса методом Вишика — Люстерника [7]. В (5.1), в отличие от рядов (1.3), отсутствуют коэффициенты, определяющие внешнее решение, так как вся область течения полностью совпадает с областью пограничного слоя. Пусть $\psi(s, x)$— функция тока ($s = z/\varepsilon$), тогда $h_{x0} = \partial\psi/\partial s$, $h_{z0} = 0$, $h_{z1} = -\partial\psi/\partial x$. Краевая задача для главных членов разложений (5.1) приводится к виду

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial s} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} = \frac{\partial^3\psi}{\partial s^3} - \frac{\partial q_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_0}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\tau_0}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\tau_0}{\partial s} = \mathrm{Pr}^{-1}\frac{\partial^2\tau_0}{\partial s^2}, \tag{5.2}$$

$$\partial^2\psi_0/\partial s^2 = \partial\tau_\Gamma/\partial x, \ \psi = 0, \ \tau = \tau_\Gamma(x) \ (s = \zeta_1(x)),$$

$$\partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial s = 0, \ \tau_0 = \mathrm{const} \ (s = 0).$$

Здесь $\tau_\Gamma(x)$— распределение температуры вдоль свободной границы. Из динамического краевого условия на свободной границе следует соотношение $\lambda q_0 = \mathrm{B}\zeta_1$ ($\lambda = |\sigma_T| A_1 L \sigma_0^{-1}$ — безразмерный градиент температуры).

Система (5.2) допускает автомодельное решение. Пусть распределение температуры вдоль свободной границы задано степенным законом $\tau_\Gamma = -1{,}25\tau x^{4/5}$. Легко показать, что

$$\psi = -x^{-3/5}\tau^{1/3}b^2\Phi(\xi), \quad \zeta_1 = b\tau^{-1/3}x^{2/3}, \quad \xi = 1 - s x^{-2/5}\tau^{1/3}b^{-1}.$$

Функция $\Phi(\xi)$ и параметр $b(\tau)$ определяются путем решения краевой задачи

$$5\Phi''' - b^3\Phi'^2 + 3b^3\Phi\Phi'' = 5\alpha b^2, \ \Phi(0) = \Phi(1) = \Phi'(1) = 0, \ \Phi''(0) = -1 \tag{5.3}$$

($\alpha = 2\lambda^{-1}\tau^{-5/3}/3$). Задача (5.3) решена численно. При $\alpha = 1$ получены значения $b = 1{,}218$ и $\Phi'(0) = 0{,}249$.

На рис. 4 даны профили продольной компоненты скорости $\Phi'(\xi)$ (кривая *1*) и функции $10\Phi(\xi)$ (*2*). Наибольшее значение скорости достигается на свободной границе. В области $0 \leqslant z \leqslant 0{,}66\zeta_1$ возникает зона

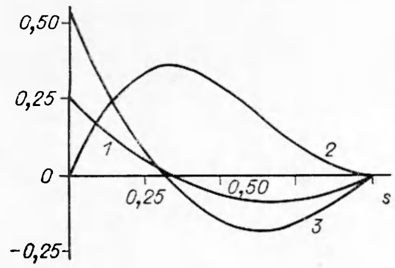

Рис. 4

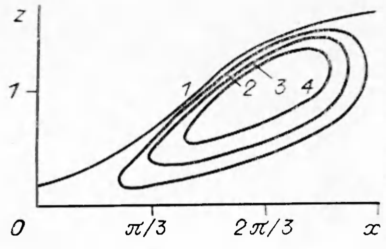

Рис. 5

противотока с максимальной скоростью, приблизительно втрое меньшей скорости на свободной границе.

Задача (5.2) решена методом Галеркина для случая гармонического распределения температуры $\tau_\Gamma = \tau_a \sin x$. Неизвестная область течения D_Γ отображена в прямолинейную полосу с помощью преобразования $\eta = 1 - s\zeta^{-1}(x)$. Функция тока и возвышение свободной границы представлены рядами

$$\psi = \sum_{k=0}^{N} \psi_k(\eta) \sin kx, \quad \zeta_1 = \zeta_{10} + \sum_{k=1}^{N} \zeta_{1k} \cos kx.$$

Коэффициенты ψ_k, ζ_{1k} удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решены численно методом пристрелки. В расчетах полагалось $N = 3$, $\lambda = 0{,}143$ и $L = 5$. Средняя толщина слоя 0,1 см, В = 0,055. Это соответствует градиенту температуры $A_1 = 10$ град/см и параметру $\varepsilon = 0{,}0126$.

На рис. 5 приведена картина линий тока при $\tau_a = 0{,}2$ в одной ячейке. Линии тока на отрезке $[\pi, 2\pi]$ симметричны относительно прямой $x = \pi$. Кривая *1* изображает форму свободной границы, *2—4* — линии тока $\psi = c$ при $c = 0{,}002$; 0,004; 0,006. На рис. 4 (кривая *3*) представлен профиль скорости $-10h_{x0}$ в сечении $x = 0{,}5\pi$. Расчеты показали, что максимум скорости достигается на свободной границе. Вдоль нее скорость увеличивается от нуля при $x = 0$ до максимального значения и далее убывает до нуля при $x = \pi$. С ростом амплитуды температуры τ_a толщина слоя в точке $x = 0$ уменьшается, а в точке $x = \pi$ увеличивается. При $\tau_a = \tau_* = 0{,}28$ свободная граница касается твердой стенки в точке $x = 0$. При $\tau_a > \tau_*$ жидкий слой разбивается на полосы, которые смачивают твердую стенку в областях $\pi - \alpha + 2\pi m \leqslant x \leqslant \pi + \alpha + 2\pi m$ ($m = 0, \pm 1, \ldots$), вне их стенка не смочена. Значения α зависят от τ_a и находятся численно, например, $\alpha = 0{,}144$ при $\tau_a = 0{,}35$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Napolitano L. G.** Marangoni boundary layers // Proc. 3rd Europ. sympos. on material science in space, Grenoble, 1979.
2. **Napolitano L. G., Golia C.** Marangoni boundary layers. Applications of space developments: Select. pap. 31st Intern. astronaut. congr., Tokyo, 1980 // Acta astronaut.— 1981.— V. 8, N 5—6.
3. **Cowley S. J., Davis S. H.** Viscous thermocapillary convection at high Marangoni number // J. Fluid Mech.— 1983.— V. 135, N 3.
4. **Pucknachov V. V.** Boundary layers near free surface // Computational and asymptotic methods for boundary and interior layers.— Dublin: Bool. Press, 1982.
5. **Кузнецов В. В.** О существовании пограничного слоя вблизи свободной границы // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1984.— Вып. 67.
6. **Батищев В. А.** Об асимптотике течений маловязкой жидкости при действии касательных напряжений на свободной границе // ПМТФ.— 1987.— № 5.
7. **Вишик М. А., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН.— 1957.— Т. 12, № 5.
8. **Солонников В. А.** Разрешимость трехмерной задачи со свободной границей для

стационарных систем уравнений Навье—Стокса // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1979.— Т. 84, № 5.
9. **Moffat H. K.** Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech.— 1964.— V. 18, N 1.

г. Ростов-на-Дону *Поступила 20/I 1989 г.*

УДК 532.529+66.069.8+622.0

Ф. М. Султанов, А. Л. Ярин

ПЕРКОЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ДИСПЕРГИРОВАНИЯ И ВЗРЫВНОГО ДРОБЛЕНИЯ ЖИДКИХ СРЕД: РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАПЕЛЬ ПО РАЗМЕРАМ

Теоретический анализ деформаций жидких сред в процессах диспергирования и взрывного дробления сводится к очень сложной задаче о нерегулярных движениях, которая в общем случае не может быть решена точно. В настоящей работе делается попытка связать хаотическое (взрывное) разрушение жидких сред с процессом распада бесконечного кластера, изученным в теории перколяции. Теоретическим путем найдено распределение капель по размерам. При плоском характере процесса разрушения полученные результаты приводят к известным эмпирическим соотношениям (закону Розина — Раммлера и распределению Вейбулла), в пространственном случае имеются отклонения от них. Проведено также экспериментальное исследование процесса дробления концентрированной полимерной упруговязкой жидкости при электрическом взрыве проводника в цилиндрическом объеме жидкости. Экспериментальные данные в целом удовлетворительно соответствуют результатам теоретического анализа.

1. Объектами исследования являются следующие жидкости: ньютоновские (в частном случае, идеальные), обладающие поверхностным натяжением, и полимерные, обладающие внутренней энтропийной упругостью [1]. Для достаточно концентрированных ($\gtrsim$1 %) упруговязких полимерных жидкостей поверхностное натяжение, как правило, несущественно, поскольку практически всегда выполняется условие $Ga_0/\alpha \gg 1$ (G — модуль высокоэластичности, α — коэффициент поверхностного натяжения, a_0 — наименьший характерный размер, подробно обсуждаемый ниже).

Пусть в некоторый момент $t = 0$ произвольному ограниченному жидкому объему с характерным размером R_0 сообщается (скажем, при взрыве в его центре) кинетическая энергия E_0. Речь идет прежде всего о ситуациях, возникающих при электрическом взрыве проводника или ВВ внутри ограниченного жидкого объема (см. [2—4], а также далее п. 3). В подобных случаях есть несколько причин, которые могут практически мгновенно привести (и, в соответствии с данными экспериментов, приводят) к нерегулярному хаотическому деформационному движению жидких частиц, предшествующему разрушению жидкого объема и способствующему его разрушению. Одна из них — несовершенство формы, или неоднородность взрывающейся проволочки или ВВ, ведущая к начальной нерегулярности поля скоростей. Другая причина связана с тем, что расширение взрывной полости сопровождается неустойчивостью Рэлея — Тейлора [5—7], представляющей собой первый этап возникновения нерегулярного движения. При дальнейшем развитии этого вида неустойчивости движение все более усложняется и хаотизируется (на нелинейной стадии роста возмущений в жидкости возникают вихревые образования на вершинах образующихся «пальцев»). В какой-то степени разрушение сплошного объема среды само по себе — свидетельство наличия в ней нерегулярных деформационных движений, а возможное дальнейшее усиление хаотического характера движения на стадии существования отдельных капель, по-видимому (при разлете в вакууме), связано с тем, что «проявляющиеся» все новые моды уже присутствовали