УДК 539.376

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. А. Банщикова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: binna@ngs.ru

Рассмотрены задачи, описывающие процесс получения остаточного угла закручивания стержня в условиях ползучести с учетом упругого восстановления после снятия нагрузок. Предполагается, что для формируемого участка задается постоянный погонный угол закручивания, т. е. участок находится в условиях чистого кручения, без стеснения торцов стержня. Считается, что деформации и напряжения зависят только от времени и двух пространственных координат в плоскости поперечного сечения стержня. Рассмотрены прямые и обратные задачи о кручении стержня с прямоугольным и уголковым поперечными сечениями в различных кинематических режимах ползучести. Скорость угла закручивания в течение всего процесса деформирования задается постоянной. Предложена методика численного расчета на основе метода конечных элементов, позволяющая получать жесткостные характеристики сечения при кручении в случае ползучести. Показано, что минимальный уровень остаточных напряжений наблюдается в релаксационном режиме деформирования. Для стержня с поперечным сечением уголкового типа найдены режимы, в которых существенно уменьшаются напряжения в области их концентрации.

Ключевые слова: кручение, стержень, депланация поперечного сечения, кинематические режимы, ползучесть, обратная задача.

DOI: 10.15372/PMTF20220519

Введение. Профили с поперечными сечениями уголкового, таврового, прямоугольного и других типов широко применяются в качестве подкрепляющих элементов обшивки корпусов и изделий авиа-, судо- и общего машиностроения. Длина таких профилей может достигать нескольких метров, угол закручивания, как правило, не превышает 0,5 рад/м, кривизна изогнутой оси профиля составляет не более 0,5 $м^{-1}$. Характерные размеры поперечных сечений (высота стенок и полок профилей типа тавра, уголка) порядка нескольких сантиметров, их толщина обычно составляет несколько миллиметров. Изготовление деталей в условиях быстрого пластического деформирования часто приводит к разрушению конструкции еще на стадии производства. Например, при гибке таврового или уголкового профиля с использованием прокатных установок, состоящих из системы валиковых блоков и предназначенных для создания подобных профилей, при обычной температуре может происходить отрыв полки, что объясняется высокой концентрацией напряжений в областях соединения полок и резкими изменениями геометрической формы поперечного сечения. Одним из способов создания нужной геометрии указанных профилей является последовательное формоизменение их участков в термокамере при медленных режимах, когда значительную долю необратимых деформаций составляют деформации ползучести. Можно считать, что в пределах формуемого участка профиля (стержня), находящегося в печи, стеснение на концах стержня отсутствует, погонный угол закручивания и кривизна изогнутой оси профиля являются постоянными величинами. Под углом закручивания понимается угол поворота поперечного сечения стержня на единицу длины. После завершения процесса формования и снятия нагрузок вследствие большого различия длины и размеров поперечного сечения участка возможно упругое восстановление. Аналогичные прямые и обратные задачи о формообразовании пластин и профилей рассмотрены в работах [1–5].

В данной работе исследуются прямые и обратные задачи о чистом кручении без стеснения торцов стержней с прямоугольным и уголковым сечениями в режимах ползучести, когда в течение всего процесса деформирования скорость изменения угла закручивания считается заданной. Определение напряженно-деформированного состояния в поперечном сечении уголкового типа осложняется наличием области концентрации напряжений. Поскольку стеснение на торцах отсутствует, задачи можно сформулировать в двумерной постановке. Для численного решения предлагается использовать методику расчета на основе метода конечных элементов. Подобные двумерные задачи о кручении стержней в условиях ползучести были исследованы в [1] с помощью метода конечных разностей. Однако при использовании этого метода описание геометрии поперечного сечения профиля сложной формы, а также аппроксимация граничных условий существенно затруднены.

1. Постановка прямых и обратных задач о кручении. Сформулируем задачи и запишем разрешающие уравнения.

1.1. *Прямая задача о кручении.* В начальный момент времени $t = 0$ под действием крутящего момента стержень деформируется упруго до заданного погонного угла закручивания θ_0. Во временном диапазоне $0 \leqslant t < t_*$ скорость закручивания $\dot\theta = \mathrm{const}$ считается известной, при этом возможен также релаксационный режим деформирования, в котором угол остается фиксированным: $\dot\theta = 0$. В стержне происходит накопление необратимых деформаций ползучести. Необходимо найти остаточный угол закручивания θ_{**} после упругого восстановления при $t = t_*$ вследствие снятия нагрузок (время t_* задано).

1.2. *Обратная задача о кручении.* Требуется найти начальный угол закручивания θ_0, на который необходимо упруго деформировать стержень в начальный момент времени $t = 0$, чтобы после деформирования его в течение времени $0 \leqslant t < t_*$ с заданной скоростью закручивания $\dot\theta = \mathrm{const}$ и упругой разгрузки при $t = t_*$ получить заданный остаточный угол закручивания θ_{**}.

При $0 \leqslant t \leqslant t_*$ температура считается постоянной, при $t < 0$ стержень не деформирован. Решение обратной задачи можно получить методом последовательных приближений, решая на каждом шаге прямую задачу и используя итерационный процесс, подобный описанному в работах [1, 2].

Пусть ось z направлена вдоль стержня, оси x и y расположены в плоскости поперечного сечения. Поскольку стеснение на торцах стержня отсутствует, угол поворота на единицу длины $\theta = \theta(t)$ не зависит от координаты z и сечение z поворачивается относительно сечения $z = 0$ на угол закручивания $\varphi = \theta z$. Тогда для смещений имеем зависимости [6]

$$u = -\varphi y = -\theta z y, \qquad v = \varphi x = \theta z x, \qquad w = W(x, y, t), \tag{1}$$

где $W = W(x, y, t)$ — перемещение точек поперечного сечения стержня в направлении z, происходящее при кручении (депланация сечения). Деформации $\gamma_{zx} = \gamma_{zx}(x, y, t)$, $\gamma_{zy} = \gamma_{zy}(x, y, t)$ определяются из соотношений Коши. Учитывая (1), при $t = 0$ имеем

$$\gamma_{zx}(x, y, 0) = \gamma_{zx0} = W_{0,x} - \theta_0 y, \qquad \gamma_{zy}(x, y, 0) = \gamma_{zy0} = W_{0,y} + \theta_0 x. \tag{2}$$

Здесь $\theta_0 = \theta(0)$; $W_0 = W(x,y,0)$. При $t = 0$ напряжения $\tau_{zx} = \tau_{zx}(x,y,t)$, $\tau_{zy} = \tau_{zy}(x,y,t)$ связаны с деформациями (1) законом Гука

$$\tau_{zx}(x,y,0) = \tau_{zx0} = G\gamma_{zx0}, \qquad \tau_{zy}(x,y,0) = \tau_{zy0} = G\gamma_{zy0}, \tag{3}$$

где G — модуль сдвига. Напряжения (3) удовлетворяют уравнению равновесия

$$\tau_{zx0,x} + \tau_{zy0,y} = 0 \tag{4}$$

с краевыми условиями на контуре поперечного сечения

$$\tau_{zx0}n_x + \tau_{zy0}n_y = 0 \tag{5}$$

(n_x, n_y — компоненты нормали к контуру). Начальный крутящий момент равен

$$M_{z0} = \int\limits_S (\tau_{zy0}x - \tau_{zx0}y)\,dS = \theta_0 D, \tag{6}$$

где D — жесткость сечения стержня при упругом кручении; S — площадь поперечного сечения стержня.

Считаем, что в любой момент времени $0 \leqslant t < t_*$ полные деформации представляют собой сумму упругих деформаций и деформаций ползучести, поэтому с учетом (2) имеем

$$\frac{1}{G}\,\dot\tau_{zx} + \eta^c_{zx} = \dot W_{,x} - \dot\theta y, \qquad \frac{1}{G}\,\dot\tau_{zy} + \eta^c_{zy} = \dot W_{,y} + \dot\theta x \tag{7}$$

(η^c — скорости деформаций ползучести). Ползучесть материала описывается кинетической теорией с учетом накопления повреждений [7]:

$$\eta^c_{kl} = \frac{1}{(1-\omega)^m}\,\frac{3}{2}\,\frac{f_1(\sigma_i)}{\sigma_i}\,\sigma^0_{kl}, \qquad \dot\omega = \frac{f_2(\sigma_i)}{(1-\omega)^m}. \tag{8}$$

Здесь $\sigma_i = (3\sigma^0_{kl}\sigma^0_{kl}/2)^{1/2}$ — интенсивность напряжений; σ^0_{kl} — компоненты девиатора напряжений; $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ — параметр поврежденности. В данном случае $\sigma_i = (3\tau^2_{zx} + 3\tau^2_{zy})^{1/2}$. При $0 \leqslant t < t_*$ из уравнений (4), (5) для скоростей напряжений следует

$$\dot\tau_{zx,x} + \dot\tau_{zy,y} = 0; \tag{9}$$

$$\dot\tau_{zx}n_x + \dot\tau_{zy}n_y = 0. \tag{10}$$

Крутящий момент в сечении стержня определяется по формуле

$$M_z = \int\limits_s (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y)\,ds. \tag{11}$$

Уравнения (7)–(11) представляют собой дифференциальную систему, решая которую при начальных условиях W_0, τ_{zx0}, τ_{zy0} можно определить напряженно-деформированное состояние при $0 \leqslant t < t_*$.

При $t = t_*$ стержень разгружается упруго. Выражения для напряжений перед разгрузкой $\tau_{zx*} = \tau_{zx}(x,y,t_*)$, $\tau_{zy*} = \tau_{zy}(x,y,t_*)$ представим в виде

$$\tau_{zx*} = \tau^e_{zx} + \rho_{zx}, \qquad \tau_{zy*} = \tau^e_{zy} + \rho_{zy}, \tag{12}$$

где ρ_{zx}, ρ_{zy} — остаточные напряжения; τ^e_{zx}, τ^e_{zy} — напряжения, соответствующие упругому восстановлению.

Уравнение упругой разгрузки имеет следующий вид:

$$\int\limits_s (\tau_{zy*}x - \tau_{zx*}y)\,ds = \theta^e D$$

(θ^e — угол, при котором происходит упругое восстановление).

В силу постановки задачи $\dot\theta = \mathrm{const}$. Для остаточного угла имеем

$$\theta_{**} = \theta_* - \theta^e = \theta_0 + \dot\theta t_* - \theta^e. \tag{13}$$

Решения обратной задачи можно получить, используя итерационный процесс

$$\theta_0^{k+1} = \theta_0^k + (\theta_{**} - \theta_{**}^k). \tag{14}$$

Здесь θ_0^k, θ_{**}^k — соответственно начальный и полученный в результате решения прямой задачи остаточный углы на k-й итерации. В качестве первого приближения можно выбрать равенство $\theta_0^1 = \theta_{**}$. Проблема сходимости подобных итерационных процессов при решении обратных задач исследуется в работе [5].

2. Методы численного решения. В случае наличия в сечении особых точек, в которых происходит концентрация напряжений, применение метода конечных разностей [1] затруднено. Используем в расчетах метод конечных элементов, основанный на методе вариации перемещений и предложенный для решения задач кручения в [6]. Варьируя смещения в (1), получаем

$$\delta u = 0, \qquad \delta v = 0, \qquad \delta w = \delta W(x, y, t).$$

Так как при вариации перемещений в начальный момент времени $t = 0$ возможная работа внешних сил (крутящего момента) обращается в нуль, то работа внутренних сил также равна нулю:

$$\int\limits_S (\tau_{zx0}\,\delta\gamma_{zx0} + \tau_{zy0}\,\delta\gamma_{zy0})\,dS = 0. \tag{15}$$

Учитывая (2), (3) и то, что вариация деформаций равна $\delta\gamma_{zx0} = (\delta W_0)_{,x}$, $\delta\gamma_{zy0} = (\delta W_0)_{,y}$, интеграл (15) преобразуем к виду

$$\int\limits_S (W_{0,x} - \theta_0 y)(\delta W_0)_{,x} + (W_{0,y} + \theta_0 x)(\delta W_0)_{,y}\,dS = 0. \tag{16}$$

Область поперечного сечения разбиваем на треугольные конечные элементы. Внутри элемента p искомая функция депланации $W_0(x, y)$ представляется в виде

$$W_0^p = (N)(W_0^p), \tag{17}$$

где $(N) = (N_1, N_2, N_3)$ — вектор функций форм; $(W_0^p) = (W_0^{p1}, W_0^{p2}, W_0^{p3})^{\mathrm{т}}$ — вектор значений функции депланации в трех узлах элемента. С учетом (17) уравнение (16) преобразуется к системе линейных уравнений

$$[R_{ij}^p](W_0^{pi}) = (F_i^p), \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$[R_{ij}^p] = \int\limits_s \Big(\frac{\partial N_i}{\partial x}\,\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\,\frac{\partial N_j}{\partial y}\Big)\,ds, \qquad (F_i^p) = \int\limits_s \Big(\theta_0 y\,\frac{\partial N_i}{\partial x} - \theta_0 x\,\frac{\partial N_i}{\partial y}\Big)\,ds. \tag{18}$$

Здесь верхний индекс p соответствует p-му элементу; $[R^p]$ — матрица жесткости p-го элемента. Функции формы приравниваются к L-координатам треугольника $N_i = L_i$ ($i = 1, 2, 3$), где

$$L_1 = \frac{1}{2s}\,(a_1 + b_1 x + c_1 y), \quad L_2 = \frac{1}{2s}\,(a_2 + b_2 x + c_2 y), \quad L_3 = \frac{1}{2s}\,(a_3 + b_3 x + c_3 y), \tag{19}$$

$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$; $b_1 = y_2 - y_3$; $c_1 = x_3 - x_2$ (остальные коэффициенты получаются путем круговой перестановки индексов); x_i, y_i — координаты узлов элемента в декартовой системе координат; s — площадь рассматриваемого p-го элемента:

$$s = \frac{1}{2}\det\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, депланация внутри элемента имеет линейную аппроксимацию $W_0^p = (L_1, L_2, L_3)(W_0^p)$. Заметим, что можно использовать также более сложную нелинейную аппроксимацию для W_0^p [8], но это приведет к усложнению численного интегрирования. В случае линейных функций удовлетворительная точность расчетов достигается за счет разбиения сечения на более мелкие конечные элементы.

После подстановки (19) в систему (18) последнюю можно представить в виде

$$[R^p](W_0^p) = (F^p), \tag{20}$$

где $[R^p] = s[B^p]^{\text{т}}[B^p]$ — матрица жесткости элемента; $(F^p) = \theta_0 s[B^p]^{\text{т}}(y_s, -x_s)^{\text{т}}$,

$$[B^p] = \frac{1}{2s}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \qquad x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Интегрирование (18) выполняется приближенно по формулам [8, 9]

$$\int\limits_s \phi(x, y)\, ds = 2s\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-L_1} \phi(L_1, L_2, L_3)\, dL_2\, dL_1 = s\sum_{r=1}^{J} d_r \phi(L_{1r}, L_{2r}, L_{3r})$$

(J — количество точек интегрирования; d_r, $\phi(L_{1r}, L_{2r}, L_{3r})$ — весовые коэффициенты и значение функции ϕ в r-й точке интегрирования). В данном случае $J = 1$, точка интегрирования имеет координаты $L_1 = L_2 = L_3 = 1/3$, весовой коэффициент равен $d = 1$. После получения системы (20) для каждого элемента вычисляются матрица жесткости $[R]$ и вектор (F) для всей системы элементов сечения. В результате получаем систему линейных уравнений

$$[R](W_0) = (F), \tag{21}$$

где $(W_0) = (W_0^1, W_0^2, \ldots, W_0^{m_1})$ — искомый вектор; m_1 — количество узлов системы. Деформации (2) определяются через полученные значения (W_0) следующим образом:

$$(\gamma_{zx0}, \gamma_{zy0})_p^{\text{т}} = [B^p](W_0^p) + \theta_0(-y_s, x_s)_p^{\text{т}}.$$

Затем вычисляются напряжения (3) в центре тяжести каждого элемента, после чего находятся общий момент M_{z0} (путем замены интеграла (6) суммой всех моментов, вычисляемых для каждого элемента), а также жесткость сечения стержня при кручении $D = M_{z0}/\theta_0$. Таким образом, при решении прямой задачи о кручении стержня все величины в начальный момент времени $t = 0$ становятся известными.

При $0 \leqslant t < t_*$ решается система дифференциальных уравнений (7)–(11) с начальными условиями, полученными при $t = 0$. При $0 \leqslant t < t_*$ можно записать уравнение, подобное (16):

$$\int\limits_S (\dot{W}_{,x} - \dot{\theta} y - \eta_{zx}^c)(\delta \dot{W})_{,x} + (\dot{W}_{,y} + \dot{\theta} x - \eta_{zy}^c)(\delta \dot{W})_{,y}\, dS = 0. \tag{22}$$

Интегрируя (22) по частям, получаем

$$\int\limits_C (\dot{W}_{,x} - \dot{\theta} y - \eta_{zx}^c)\, \delta \dot{W} n_x\, dC - \int\limits_S \frac{\partial}{\partial x}(\dot{W}_{,x} - \eta_{zx}^c)\, \delta \dot{W}\, dS +$$
$$+ \int\limits_C (\dot{W}_{,y} + \dot{\theta} x - \eta_{zy}^c)\, \delta \dot{W} n_y\, dC - \int\limits_S \frac{\partial}{\partial y}(\dot{W}_{,y} - \eta_{zy}^c)\, \delta \dot{W}\, dS = 0. \tag{23}$$

Уравнение (23) соответствует уравнению равновесия (9) с краевыми условиями (10) [8]. Преобразуя (22), получаем систему, подобную (20):

$$[R^p](\dot{W}^p) = (\Phi^p), \tag{24}$$

где $(\Phi^p) = s[B^p]^{\text{т}}(\Psi^p)$ — вектор правых частей; $(\Psi^p) = (\dot{\theta} y_s + \eta^c_{zxs}, -\dot{\theta} x_s + \eta^c_{zys})^{\text{т}}$.

Матрица $[R^p]$ в (24) совпадает с матрицей жесткости в (20). Нижний индекс s означает, что значения функций определяются в точке интегрирования $L_1 = L_2 = L_3 = 1/3$. Зависящий от времени вектор в правой части (24) для совокупности узлов получается путем суммирования правых частей в узлах каждого элемента. При $0 \leqslant t < t_*$ общая матрица жесткости совпадает с матрицей при $t = 0$ и является постоянной. С учетом (7) можно получить выражения для скоростей напряжений в каждом элементе в матричном виде. В результате преобразований получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
[R](\dot{W}) = (\Phi), \qquad (\dot{W}) = (\dot{W}^1, \dot{W}^2, \dots, \dot{W}^{m_1})^{\text{т}}, \\
(\dot{\tau}_{zx}, \dot{\tau}_{zy})^{\text{т}}_p = G([B^p](\dot{W}^p) - (\Psi^p)), \qquad p = 1, 2, \dots, m_2,
\end{gathered} \tag{25}$$

где m_2 — количество элементов в системе ($m_1 + 2m_2$ — общее число уравнений системы). При решении (25) использовался метод Рунге — Кутты — Мерсона [10]. Автоматический контроль шага по времени обеспечивает достаточно быструю сходимость. При тестировании данного метода сначала деформации ползучести полагались равными нулю, т. е. рассматривалось чисто упругое деформирование в интервале времени $0 \leqslant t < t_*$. В результате решение системы (25) при $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta} = \psi/t_* = \text{const}$ совпало с решением системы (21) при $\theta_0 = \psi$.

Для обращения матрицы $[R]$ при решении системы линейных уравнений был использован метод отражения [11], реализованный на языке Фортран. В случае учета повреждаемости к системе (25) необходимо добавить m_2 дифференциальных уравнений для определения параметра поврежденности ω. Следует отметить, что предложенный метод решения может быть обобщен на случай ортотропии и разносопротивляемости материала при растяжении и сжатии в случае ползучести [12–15].

3. Примеры решения задач. Проведен расчет для стержней с прямоугольным сечением размером 10×20 мм и с уголковым сечением с углом между полками, равным 90° (рис. 1). Вычисления выполнены для сплава ВТ9 без учета накопления повреждений с использованием зависимостей и параметров в (8), соответствующих температуре $T = 550$ °C: $f_1(\sigma_i) = B_1\sigma_i^n$, $f_2(\sigma_i) = B_2\sigma_i^g$, где $n = 4$; $g = 5$; $m = 10$; $B_1 = 1{,}1303 \cdot 10^{-17}$ МПа$^{-n} \cdot$ с$^{-1}$; $B_2 = 5{,}0105 \cdot 10^{-20}$ МПа$^{-g} \cdot$ с$^{-1}$ [16]. Модуль Юнга $E = 66\,700$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$, предел текучести $\sigma_{\text{т}} = 608$ МПа.

3.1. *Прямые задачи для стержня с прямоугольным сечением.* Сечение разбивалось $m_1 = 861$ узлом (21 по оси x и 41 по оси y с шагом 0,5 мм) на $m_2 = 1600$ элементов. В табл. 1 приведены результаты решения задачи (начальный момент M_{z0}, вычисленный согласно (6), момент перед разгрузкой M_{z*}, остаточный угол θ_{**}) без учета параметра поврежденности ($m = 0$ в (8)) для режима релаксации ($\dot{\theta} = 0$) и режима с постоянной угловой скоростью закручивания ($\dot{\theta} = 1{,}615 \cdot 10^{-4}$ рад/(м $\cdot$ с)). Заданное время $t_* = 1{,}08 \times 10^4$ с, начальный погонный угол при $t = 0$ составлял $\theta_0 = 1{,}396$ рад/м. В табл. 1 приведено также решение тех же задач методом конечных разностей [1] с шагом по осям x и y, равным 0,5 мм. При $t = 0$ различие результатов вычисления моментов составляет менее 0,3 %, при $t = t_*$ — менее 0,1 %, остаточные углы закручивания различаются менее чем на 1,1 %.

3.2. *Обратные задачи для стержня с прямоугольным сечением.* На рис. 2,*а* приведена зависимость начального угла от времени при значениях остаточного угла $\theta_{**} = 0{,}175$; 0,349; 0,524 рад в случае релаксационного режима деформирования ($\dot{\theta} = 0$) при

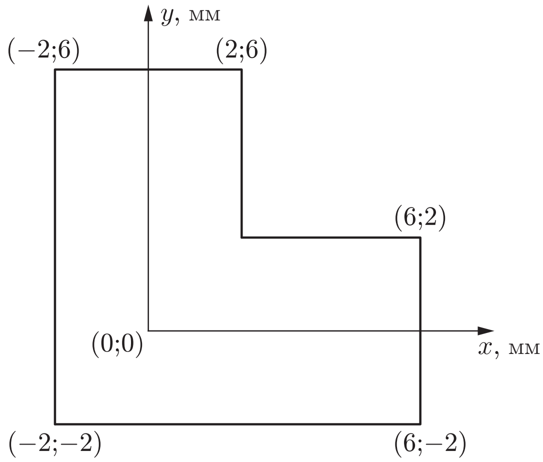

Рис. 1. Поперечное уголковое сечение

Таблица 1

Результаты решения прямых задач для стержня с прямоугольным сечением

Метод	M_{z0}, Н · м	$\dot\theta \cdot 10^3$, рад/(м · с)	M_{z*}, Н · м	θ_{**}, рад/м
Метод конечных элементов	164,1	0 1,615	121,3 212,6	0,365 1,332
Метод конечных разностей	163,7	0 1,615	121,4 212,5	0,361 1,330

$t_* = 7{,}2\cdot 10^3 \div 3{,}6\cdot 10^6$ с. На рис. 2,*б* показана та же зависимость при $t_* \approx 7{,}2\cdot 10^3 \div 7{,}2\cdot 10^4$ с. Для достижения точности итерационного процесса (13), (14) $(\theta_{**} - \theta_{**}^k)/\theta_{**} \leqslant 10^{-4}$ необходимо 8–15 итераций k в зависимости от исходных данных.

3.3. *Прямые задачи для стержня с уголковым сечением.* Особенностью уголкового сечения является наличие точки, окрестность которой представляет собой область концентрации напряжений, в которой они стремятся к бесконечности. В случае наличия таких областей применение для расчетов метода конечных разностей затруднительно. Поэтому для решения использовался метод конечных элементов.

Проведено исследование влияния вида конечно-элементной сетки на результаты расчета. Использовалось равномерное разбиение сечения (рис. 3,*а*) с равными шагами по осям x и y и неравномерное, более плотное в зонах концентрации напряжений (рис. 3,*б,в*). Результаты решения прямой задачи кручения при начальном угле закручивания $\theta_0 = 0{,}95$ рад/м и $t_* = 7{,}2\cdot 10^4$ с для разбиений различного типа приведены в табл. 2. В случае мелкого разбиения с шагом по осям x и y $h = 0{,}2$ мм, соответствующего рис. 3,*а*, общее число узлов и элементов составило соответственно $m_1 = 1281$, $m_2 = 2400$; в случае неравномерного разбиения (см. рис. 3,*б*) $m_1 = 1295$, $m_2 = 2424$. Полученные с учетом (12) максимальные значения интенсивности напряжений перед разгрузкой составили $\sigma_{i*} = 197{,}4$ МПа и $\sigma_{i*} = 234{,}1$ МПа соответственно.

Из табл. 2 следует, что несмотря на существенное различие интенсивности напряжений в областях концентрации при равномерном и неравномерном разбиениях, полученные значения моментов в начальный момент времени M_{z0} и перед упругой разгрузкой M_{z*} различаются незначительно, причем при уменьшении шага сетки h наблюдается сходимость этих интегральных величин. Различие значений остаточных углов закручивания θ_{**} не превышает 0,5 %. Таким образом, для вычислений с удовлетворительной точностью можно использовать равномерное разбиение. Для уменьшения напряжений в областях их

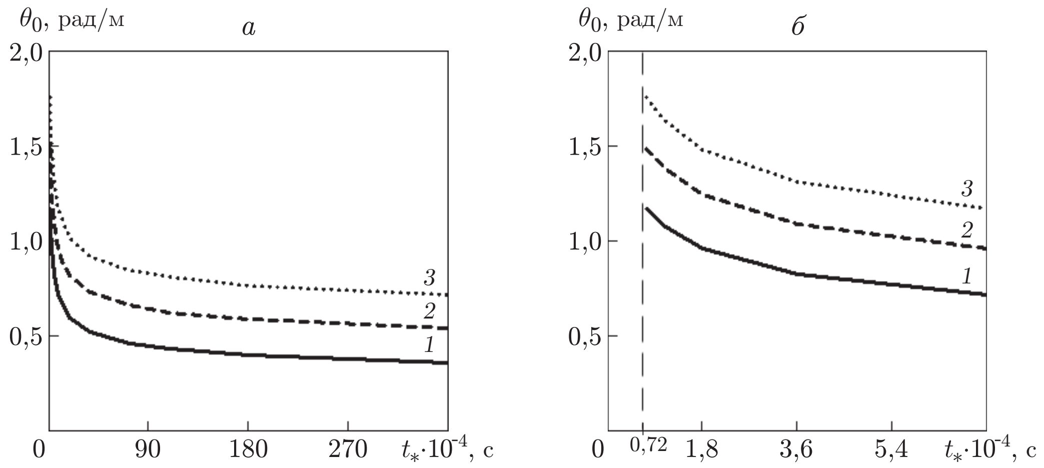

Рис. 2. Зависимость начального угла от времени $\theta_0(t_*)$ для режима релаксации в диапазонах $t_* = 7{,}2 \cdot 10^3 \div 3{,}6 \cdot 10^6$ с (*а*) и $t_* = 7{,}2 \cdot 10^3 \div 7{,}2 \cdot 10^4$ с (*б*):
1 — $\theta_{**} = 0{,}175$ рад, *2* — $\theta_{**} = 0{,}349$ рад, *3* — $\theta_{**} = 0{,}524$ рад

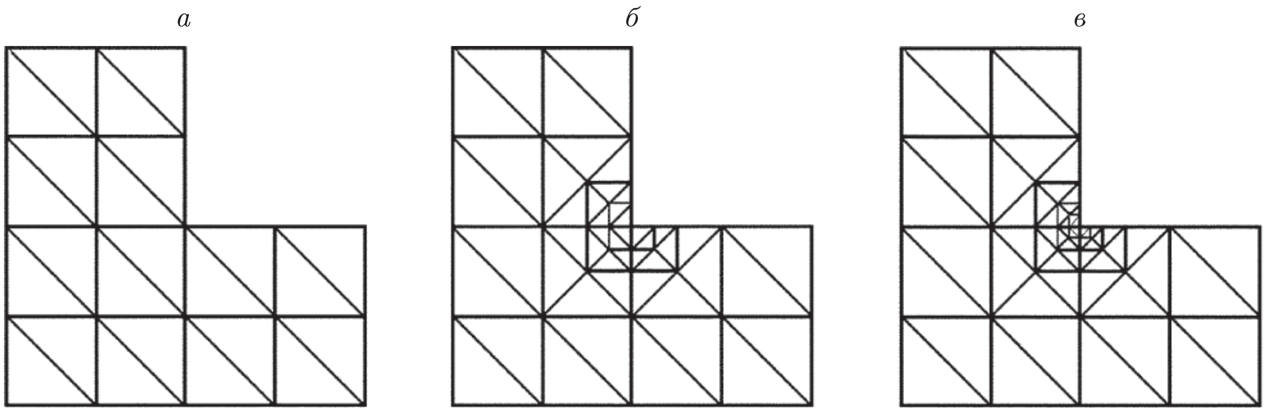

Рис. 3. Разбиения уголкового поперечного сечения:
а — равномерное, *б, в* — неравномерное с дополнительным числом узлов в зоне концентрации напряжений (*б* — 14, *в* — 21)

Таблица 2

Результаты решения прямой задачи для стержня с поперечным сечением уголкового типа

$h \cdot 10^3$, м	Тип разбиения (см. рис. 3)	M_{z0}, Н · м	M_{z*}, Н · м	θ_{**}, рад/м	$\sigma_{i0\,\max}$, МПа
0,2	*а*	5,420	4,826	0,1030	342,7
0,2	*б*	5,410	4,831	0,1033	594,9
0,5	*а*	5,504	4,951	0,1028	253,7
1,0	*а*	5,703	5,098	0,1018	199,3
1,0	*б*	5,578	4,969	0,1048	352,4
1,0	*в*	5,567	4,963	0,1042	442,1

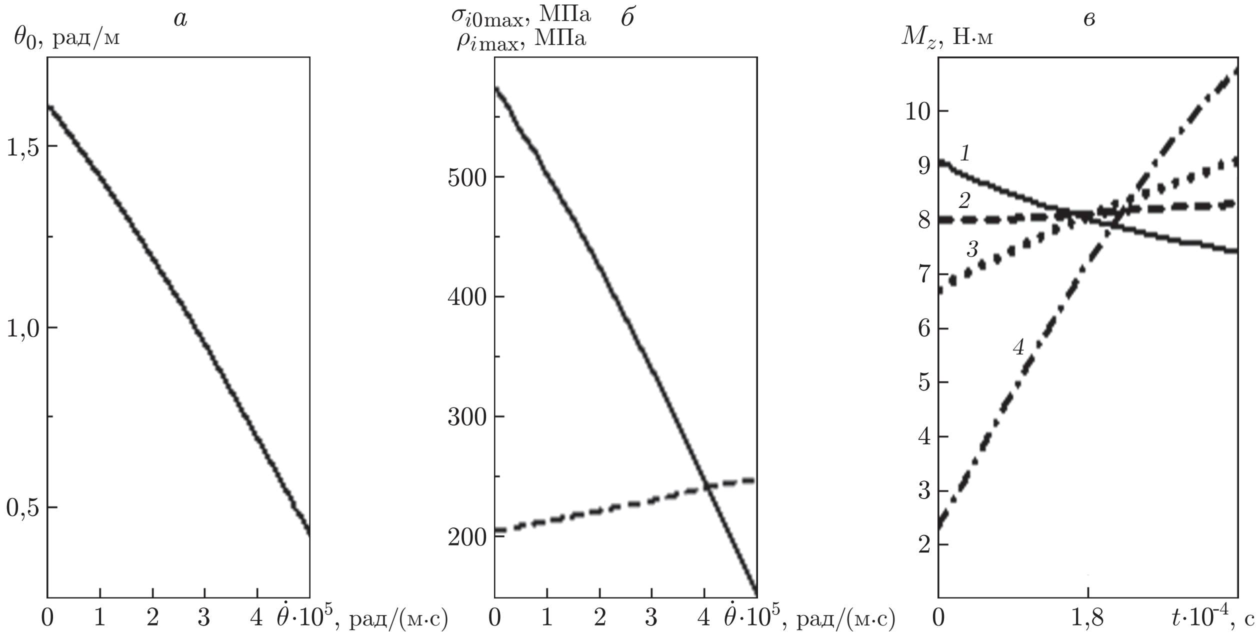

Рис. 4. Решение обратной задачи для стержня с уголковым сечением ($t_* = 3{,}6 \cdot 10^4$ с, $\theta_{**} = 0{,}3$ рад/м):

а — зависимость θ_0 от $\dot\theta$, *б* — зависимости максимальной интенсивности напряжений в сечении $\sigma_{i0\,\max}(\dot\theta)$ при $t = 0$ (сплошная кривая) и $\rho_{i\,\max}(\dot\theta)$ при $t = t_*$ после разгрузки (штриховая кривая), *в* — зависимость крутящего момента от времени при различных значениях $\dot\theta$ (*1* — $\dot\theta = 0$, *2* — $\dot\theta = 10^{-5}$ рад/(м $\cdot$ с), *3* — $\dot\theta = 2 \cdot 10^{-5}$ рад/(м $\cdot$ с), *4* — $\dot\theta = 5 \cdot 10^{-5}$ рад/(м $\cdot$ с))

концентрации, как правило, применяется скругление в зонах соединения полок, а также учитываются пластические деформации [17].

3.4. *Обратная задача о чистом кручении стержня с уголковым сечением.* На рис. 4 представлены результаты решения методом конечных элементов задачи определения угла θ_0, необходимого для получения остаточного угла $\theta_{**} = 0{,}3$ рад/м, при различных режимах ползучести $\dot\theta = \mathrm{const}$ в интервале времени $0 \leqslant t < t_*$, $t_* = 3{,}6 \cdot 10^4$ с. В расчетах использовалось равномерное разбиение с шагом $h = 0{,}2$ мм. На рис. 4,*а* приведена зависимость искомого угла θ_0 от скорости изменения угла закручивания $\dot\theta$, на рис. 4,*б* — зависимости максимальной интенсивности напряжений в сечении от угловой скорости закручивания $\dot\theta$. Минимальное значение остаточных напряжений наблюдается при релаксационном режиме деформирования ($\dot\theta = 0$), что подтверждает результаты, полученные в работе [2]. На рис. 4,*в* начальный угол закручивания определяется по кривой, приведенной на рис. 4,*а*. Режим 2 ($\dot\theta = 10^{-5}$ рад/(м $\cdot$ с)) близок к режиму кручения постоянным моментом.

На рис. 5 показана поверхность интенсивности напряжений в уголковом сечении стержня. Для сравнения на рис. 6 представлена та же поверхность для различных режимов $\dot\theta = \mathrm{const}$ в профильной проекции.

Анализ поверхностей, показанных на рис. 6, позволяет сделать следующие выводы. Несмотря на то что при релаксационном режиме (см. рис. 6,*а*–*в*) остаточные напряжения наименьшие, начальные напряжения ($t = 0$) являются наибольшими. Это может приводить к значительным повреждениям и даже разрушению конструкции при кручении. Режимы $\dot\theta = 2 \cdot 10^{-5}$; $5 \cdot 10^{-5}$ рад/(м $\cdot$ с) (см. рис. 6,*ж*–*м*) способствуют значительному уменьшению интенсивности напряжений в области концентрации напряжений. Отметим также, что сплав ВТ9 описывается энергетическим вариантом теории ползучести, когда

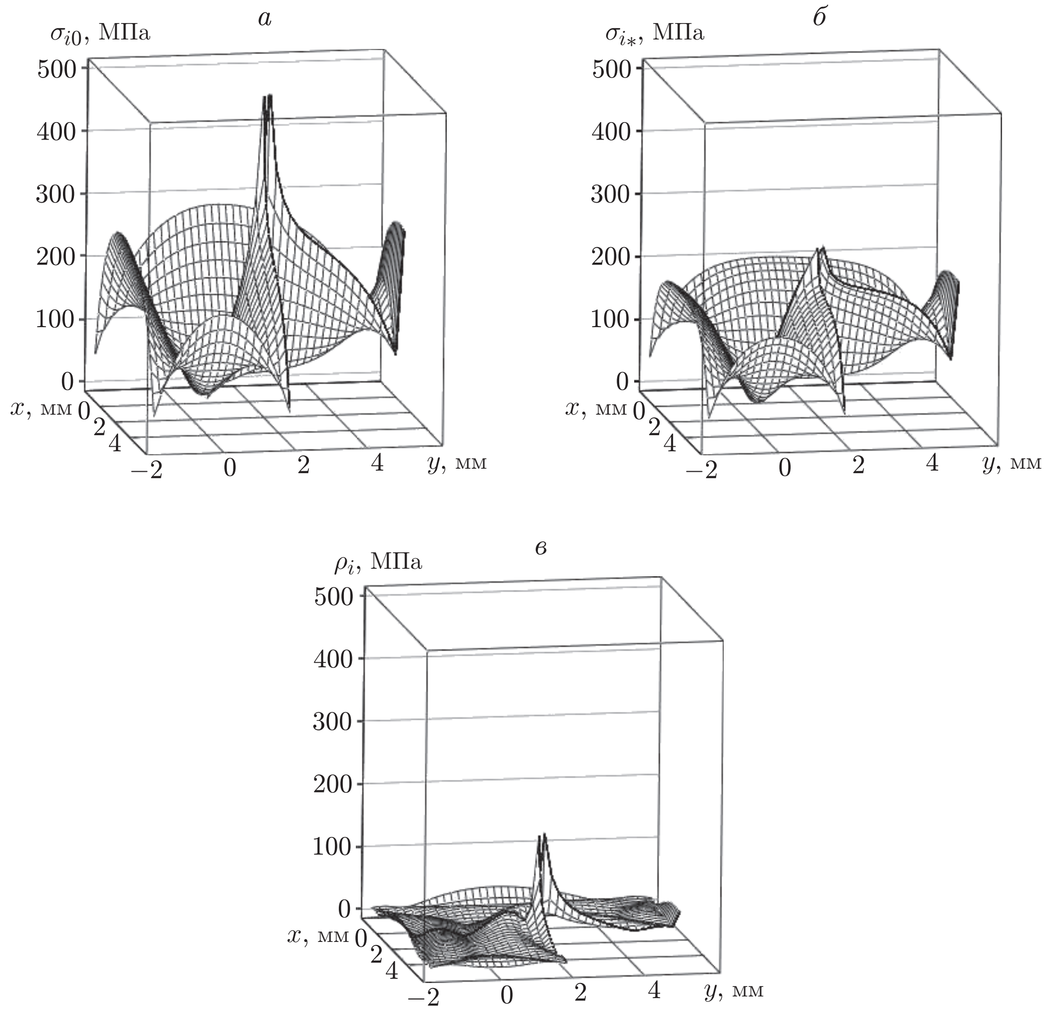

Рис. 5. Поверхность интенсивности напряжений в уголковом сечении стержня для релаксационного режима деформирования $\dot{\theta} = 0$:
а — $t = 0$, *б*, *в* — $t = t_*$ (*б* — перед разгрузкой, *в* — после разгрузки)

работа рассеяния является постоянной величиной [7]. Параметры этого сплава удовлетворяют условию $g > n$, поэтому наименьший уровень накопления повреждений наблюдается при линейном изменении угла закручивания в процессе деформирования [5]. К этому режиму деформирования наиболее близок режим $\dot{\theta} = 5 \cdot 10^{-5}$ рад/(м $\cdot$ с) (см. рис. 6,*к*–*м*).

Заключение. В работе рассмотрены прямые и обратные задачи о кручении стержней с прямоугольным и уголковым поперечными сечениями в режимах ползучести, когда в процессе деформирования угловая скорость закручивания считается заданной. Для формируемого участка задается постоянный погонный угол закручивания, стеснение на торцах отсутствует. Это условие позволяет свести задачу к двумерной в плоскости поперечного сечения стержня. После завершения процесса формования в течение заданного времени происходит упругое восстановление в результате снятия нагрузки. Развита методика численного расчета с использованием метода конечных элементов. Предложенный метод позволяет получать жесткостные характеристики сечения при кручении в случае ползучести. Проведено исследование влияния плотности равномерного и неравномерного конечно-элементного разбиения в области концентрации напряжений на результаты расчета. Численно показано, что наименьшие остаточные напряжения наблюдаются в режиме

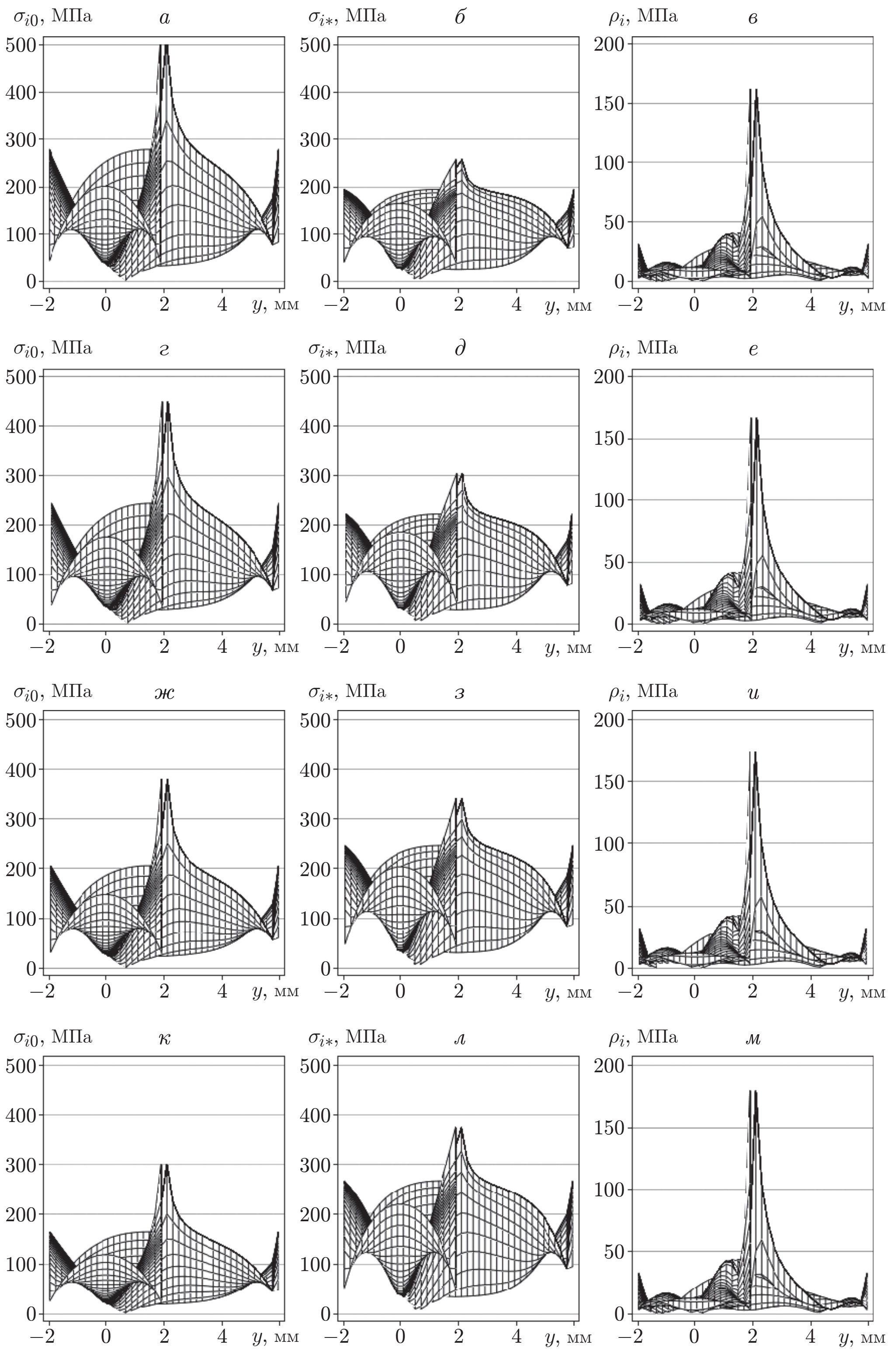

Рис. 6. Профильная проекция поверхности интенсивности напряжений в угловом сечении стержня:
а–в — $\dot{\theta} = 0$, *г–е* — $\dot{\theta} = 10^{-5}$ рад/(м·с), *ж–и* — $\dot{\theta} = 2 \cdot 10^{-5}$ рад/(м·с), *к–м* — $\dot{\theta} = 5 \cdot 10^{-5}$ рад/(м·с); *а, г, ж, к* — $t = 0$, *б, д, з, л* — $t = t_*$ (перед разгрузкой), *в, е, и, м* — $t = t_*$ (после разгрузки)

релаксации. Исследовано влияние режима деформирования на концентрацию напряжений в стержне с уголковым сечением.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Банщикова И. А., Горев Б. В., Сухоруков И. В.** Двумерные задачи формообразования стержней в условиях ползучести // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 129–139.
2. **Банщикова И. А., Цвелодуб И. Ю.** Об одном классе обратных задач формоизменения вязкоупругих пластин // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 122–131.
3. **Бормотин К. С., Тарануха Н. А.** Математическое моделирование обратных задач формообразования с учетом неполной обратимости деформаций ползучести // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 1. С. 161–171.
4. **Бормотин К. С.** Обратные задачи оптимального управления в теории ползучести // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 33–42.
5. **Цвелодуб И. Ю.** Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
6. **Биргер И. А.** Стержни, пластины, оболочки. М.: Физматлит, 1992.
7. **Горев Б. В., Любашевская И. В., Панамарев В. А., Иявойнен С. В.** Описание процесса ползучести и разрушения современных конструкционных материалов с использованием кинетических уравнений в энергетической форме // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 6. С. 132–144.
8. **Зенкевич О.** Методы конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
9. **Мяченков В. И.** Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справ. / В. И. Мяченков, В. П. Мальцев, В. П. Майборода и др. М.: Машиностроение, 1989.
10. **Мудров А. Е.** Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: МП РАСКО, 1991.
11. **Коновалов А. Н.** Введение в вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
12. **Банщикова И. А., Цвелодуб И. Ю., Петров Д. М.** Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиговом направлении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 157, № 3. С. 34–41.
13. **Банщикова И. А., Ларичкин А. Ю.** Кручение круглых стержней с учетом разносопротивляемости материала растяжению и сжатию в условиях ползучести // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 6. С. 123–134.
14. **Банщикова И. А.** Построение определяющих уравнений для ортотропных при ползучести материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 1. С. 102–117.
15. **Banshchikova I. A., Petrov D. M., Tsvelodub I. Yu.** Torsion of circular rods at anisotropic creep // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 722, N 1. 012004.
16. **Никитенко А. Ф., Сухоруков И. В.** Приближенный метод решения релаксационных задач с учетом повреждаемости материала при ползучести // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 136–142.
17. **Мавлютин Р. Р.** Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 1/II 2022 г.,
после доработки — 1/II 2022 г.
Принята к публикации 28/III 2022 г.