

УДК 532.5.031

## **Динамика кавитационного пузырька вблизи твердой стенки\***

**А.А. Аганин, М.А. Ильгамов, Л.А. Косолапова, В.Г. Малахов**

*Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН*

E-mail: kosolapova@kfti.knc.ru

Рассматривается динамика кавитационного пузырька, изменение полей давления и скорости окружающей жидкости в процессе его осесимметричного сжатия вблизи плоской твердой стенки. Предполагается, что в начальный момент времени жидкость покоится, а пузырек имеет форму сфероида. Жидкость считается невязкой и несжимаемой, движение ее — потенциальным. Деформация поверхности пузырька и скорость жидкости на ней рассчитываются по схеме Эйлера с применением метода граничных элементов до момента соударения между собой каких-либо частей поверхности пузырька. Исследуется влияние удаленности пузырька от стенки и его начальной несферичности на поля давления и скорости жидкости, форму пузырька, давление в его полости в конце рассматриваемого промежутка времени. Показано, что максимальное давление в жидкости реализуется у основания возникающей при схлопывании кумулятивной струи, направленной к стенке. В верхней половине этой струи скорость и давление практически постоянны, при этом давление в струе примерно равно давлению в пузырьке.

**Ключевые слова:** кавитационный пузырек, потенциальное течение жидкости, метод граничных элементов.

### **Введение**

Изучение динамики пузырьков у стенки важно для понимания особенностей явления кавитационного разрушения (эрозии). В результате воздействия кавитационных пузырьков разрушению подвергаются лопасти гребных винтов судовых движителей [1, 2], стенки проточных каналов трубопроводных систем [3] и насосов [4], лопасти гидротурбин [5] и т.д. Разрушительный потенциал кавитации используется для очистки от отложений труб теплообменных аппаратов [6], подводных объектов от морских загрязнений (в частности, от нароста ракообразных) [7], для доставки лекарств в органические клетки посредством сонопорации [8] и т.д.

Исследованию динамики пузырька у стенки посвящено множество публикаций, начиная с экспериментальных работ [9, 10] и теоретической работы [11], в которых впервые было показано образование на поверхности пузырька при его сжатии кумулятивной струи жидкости, направленной к поверхности стенки. Роль таких струй в кавитационном разрушении обсуждалась в работе [12]. В дальнейшем [13, 14] изучалось влияние на динамику пузырька сфероидальных возмущений его начальной формы. В частности, в работе [13] была установлена сильная зависимость скорости кумулятивной струи от малых возмущений начальной формы пузырька, а в [14] был определен интервал

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 14-01-97004 р\_поволжье\_а).

отношения полуосей сфероидального пузырька, контактирующего со стенкой, в котором на поверхности пузырька возникает кумулятивная струя. Позже в ряде работ исследовалось влияние расстояния между пузырьком и стенкой и силы тяжести [15–17], соседних пузырьков [18], податливости стенки [19, 20] и др. Во многих работах наряду со стадией сжатия пузырька рассматривается и предшествующая ей стадия расширения [15, 17, 21, 22].

В настоящей работе изучается влияние начальной несферичности на динамику кавитационного пузырька при его схлопывании на разных расстояниях от плоской жесткой стенки. Давление в пузырьке в начале сжатия равно давлению насыщенного пара при температуре окружающей жидкости (т.е. намного меньше, чем давление жидкости). Основное внимание направлено на исследование характеристик кумулятивной струи (формы, скорости, диаметра), давления пара в пузырьке, полей давления и скорости как в струе, так и в слое жидкости между пузырьком и стенкой, а также зависимости влияния начальной несферичности от расстояния между пузырьком и стенкой. Такая задача для пустой полости рассматривалась в работах [13, 14], однако многие аспекты, перечисленные выше, были освещены недостаточно подробно.

В расчетах используется методика, основанная на схеме Эйлера с применением метода граничных элементов (МГЭ). Впервые МГЭ для задачи о динамике пузырька был предложен в работе [23] и применен в работах [13, 14] для изучения осесимметричной деформации пустой сфероидальной полости у твердой стенки. Дальнейшее развитие МГЭ в приложении к задачам динамики пузырька получил значительно позже в работах [15, 16, 24, 25]. В работе [24] МГЭ был обобщен на трехмерный случай, а в [25] — на случай перехода в тороидальную фазу движения пузырька. Наряду с этим в работах [26, 27] был предложен приближенный способ учета сжимаемости жидкости для пузырька в неограниченном ее объеме, что важно для задач с интенсивным сжатием пузырька.

### Постановка задачи, основные соотношения и метод решения

Рассматривается сжатие кавитационного пузырька в жидкости вблизи плоской жесткой стенки. Поверхность пузырька в начале сжатия представляет собой сфероид с осью симметрии  $z$  (рис. 1) и отношением полуосей  $e = b_0 / a_0$ . Начальный объем пузырька равен объему сферы радиуса  $R_0$ . Давление на «бесконечности»  $p_\infty$  постоянно. Давление пара в пузырьке в начале сжатия  $p_b^0$  равно давлению насыщения при температуре окружающей жидкости. Изучается динамика пузырька, изменение полей давления и скорости окружающей жидкости в зависимости от начальной формы пузырька и начального расстояния  $h_0$  между пузырьком и стенкой.

Предполагается, что жидкость идеальная и несжимаемая, ее движение потенциальное и описывается уравнениями

$$\Delta\Phi = 0, \quad (1)$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p - p_\infty}{\rho_f} = 0, \quad (2)$$

где  $\Phi$  — потенциал скорости,  $t$  — время,  $p$  — давление,  $\rho_f$  — плотность жидкости. Состояние пара в кавитационном пузырьке описывается уравнением Ван-дер-Ваальса

$$p_b = p_b^0 \left[ (1 + \bar{a}) \left( \frac{1 - \bar{b}}{V/V_0 - \bar{b}} \right)^\gamma - \bar{a} \left( \frac{V_0}{V} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

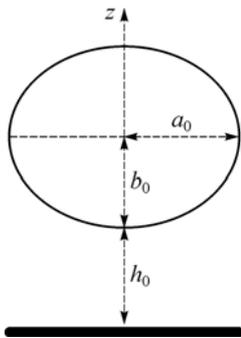


Рис. 1. Пузырек около стенки.

Здесь  $\bar{a} = a/(V_0^2 p_b^0)$ ,  $\bar{b} = b/V_0$ ,  $V_0, V$  — начальный и текущий объемы пузырька,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $a, b$  — константы газа.

На поверхности пузырька выполняются динамическое и кинематическое условия

$$p_f = p_b - 2\sigma H, \quad (4)$$

$$dx/dt = \mathbf{v}, \quad (5)$$

где  $p_f, p_b$  — давления со стороны жидкости и пара,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $H$  — средняя кривизна,  $\mathbf{x}, \mathbf{v}$  — радиус-вектор и скорость точки поверхности ( $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ ).

На жесткой стенке ставится условие непротекания

$$v_z = 0. \quad (6)$$

Для описания движения и деформации поверхности пузырька во времени и коррекции значений потенциала на ней применяется схема Эйлера первого порядка точности, для определения скорости жидкости на контуре используется МГЭ [15, 23].

Потенциал скорости  $\Phi$  и его нормальная производная  $\partial\Phi/\partial n$  на поверхности связаны граничным интегральным уравнением [28]

$$c(x)\Phi(x) = \int_S (G(x, y) \frac{\partial\Phi(y)}{\partial n} - \Phi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n}) dS(y), \quad (7)$$

где  $x, y \in S$  — точки наблюдения и интегрирования,  $\bar{n}$  — вектор нормали, направленной внутрь пузырька,  $G(x, y)$  — фундаментальное решение (функция Грина), которое для полупространства с границей в виде плоской жесткой стенки берется в виде

$$G(x, y) = (1/4\pi)(1/r + 1/r_2), \quad (8)$$

здесь  $r = |x - y|$ ,  $r_2 = |x^* - y|$  — расстояния между точками  $x$  и  $y$  и между точкой  $x^*$ , симметричной точке  $x$  относительно стенки, и точкой  $y$ . Параметр  $c(x)$  в уравнении (7) полагается равным 0,5 в случае гладкой границы в точке  $x$  и равен  $\beta/(2\pi)$  для угловой точки границы  $x$  с углом  $\beta$  при вершине. При известном значении потенциала  $\Phi$  на поверхности  $S$  из (7) можно определить значения нормальной производной  $\partial\Phi/\partial n$ .

Для осесимметричной задачи уравнение (7) записывается в цилиндрической системе координат в виде:

$$c\Phi(\rho, z) = \int_L \{ \psi(\rho_0, z_0) K_1(\rho_0, z_0, \rho, z, t) - \Phi(\rho_0, z_0) K_2(\rho_0, z_0, \rho, z, t) \} ds_0, \quad (9)$$

где

$$\psi(\rho_0, z_0) = \partial\Phi(\rho_0, z_0)/\partial n_0, \quad K_1(\rho_0, z_0, \rho, z, t) = (\rho_0/\pi)(K(m)/A + K(m_2)/A_2),$$

$$K_2(\rho_0, z_0, \rho, z, t) = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{K(m)}{A} + \frac{K(m_2)}{A_2} \right) \frac{dz_0}{ds_0} + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{dz_0}{ds_0} + \frac{\rho_0}{d^2} \left( (\rho - \rho_0) \frac{dz_0}{ds_0} - (z - z_0) \frac{d\rho_0}{ds_0} \right) \right) \frac{E(m)}{A} + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{dz_0}{ds_0} + \frac{\rho_0}{d^2} \left( (\rho - \rho_0) \frac{dz_0}{ds_0} + (z + z_0) \frac{d\rho_0}{ds_0} \right) \right) \frac{E(m_2)}{A_2} \right],$$

$(\rho, \varphi, z)$  — координаты точки наблюдения  $x$ ,  $(\rho_0, \varphi, z_0)$  — координаты точки интегрирования  $y$ ,  $s_0$  — дуговая координата контура,

$$A = \left[ (\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]^{1/2}, \quad d = \left[ (\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]^{1/2},$$

$$A_2 = \left[ (\rho + \rho_0)^2 + (z + z_0)^2 \right]^{1/2}, \quad d_2 = \left[ (\rho - \rho_0)^2 + (z + z_0)^2 \right]^{1/2},$$

$$m = 2\sqrt{\rho\rho_0} / A, \quad m_2 = 2\sqrt{\rho\rho_0} / A_2,$$

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad 0 \leq m \leq 1,$$

$K(m), E(m)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Для решения уравнения (9) используется МГЭ. При этом контур поверхности пузырька аппроксимируется ломаной линией, состоящей из  $n$  элементов. В пределах элемента функции  $\psi(\rho_0, z_0)$  и  $\Phi(\rho_0, z_0)$  принимаются линейными. Алгоритм решения задачи (1)–(6) подробно описан в работе [29]. Было проведено тестирование МГЭ на точном решении уравнения Лапласа для заданного сложного контура, состоящего из конических и тороидальных фрагментов. При этом алгоритм показал сходимость второго порядка. Для определения шага по времени использовалось условие устойчивости, принятое в работах [17, 25].

При построении полей скорости и давления в жидкости, окружающей пузырек, потенциал  $\Phi(\rho, z)$  определяется из уравнения (9), в котором полагается  $c = 1$ . Для вычисления компонент скорости  $v_\rho = \partial\Phi/\partial\rho$  и  $v_z = \partial\Phi/\partial z$  применяются конечно-разностные формулы второго порядка точности. Давление в жидкости вычисляется из уравнения (2), где  $\partial\Phi/\partial t$  также считается по конечно-разностным формулам.

В работе изучается сжатие сфероидального кавитационного пузырька среднего радиуса  $R_0 = 1$  мм в воде при комнатных условиях ( $p_\infty = 0,1$  МПа,  $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $p_b^0 = 0,0023$  МПа,  $\gamma = 1,33$ ,  $\bar{a} = 8,4 \cdot 10^{-5}$ ,  $\bar{b} = 1,8 \cdot 10^{-5}$ ). В силу достаточно большого размера пузырька поверхностное натяжение не учитывается —  $\sigma = 0$ .

### Динамика примыкающего к стенке пузырька

На рис. 2 для ряда значений  $e$  из интервала  $[0,5, 2,0]$  представлены формы пузырька, касающегося стенки ( $h_0 = 0$ ), в несколько последовательных моментов времени, последний из которых (момент 3) совпадает с моментом  $t_c$ . Под моментом  $t_c$  здесь и далее понимается момент соударения (контакта) между собой каких-либо частей поверхности пузырька. Также на рис. 2 приведены картины полей давления и скорости жидкости в окрестности пузырька в момент  $t = t_c$ .

Видно, что у первоначально сильно сплюснутого сфероида (рис. 2а) момент  $t_c$  соответствует образованию в области, наиболее удаленной от стенки, либо малой тороидальной полости ( $e = 0,5$ ), либо малого дочернего пузырька ( $e = 0,67$ ), в окрестности которых наблюдаются наибольшие скорости и давления.

Деформация пузырька с малым начальным отклонением формы от сферической (рис. 2б) происходит с образованием на его поверхности направленной к стенке кумулятивной струи. Удар такой струи непосредственно по стенке или по ближней к стенке части поверхности пузырька, если пузырек удален от стенки, является на практике наиболее разрушительным, поскольку в этом случае нет рассеивания кинетической энергии струи, как, например, при  $e = 1,1$  (рис. 2с), когда струя бьет по боковой части поверхности пузырька.

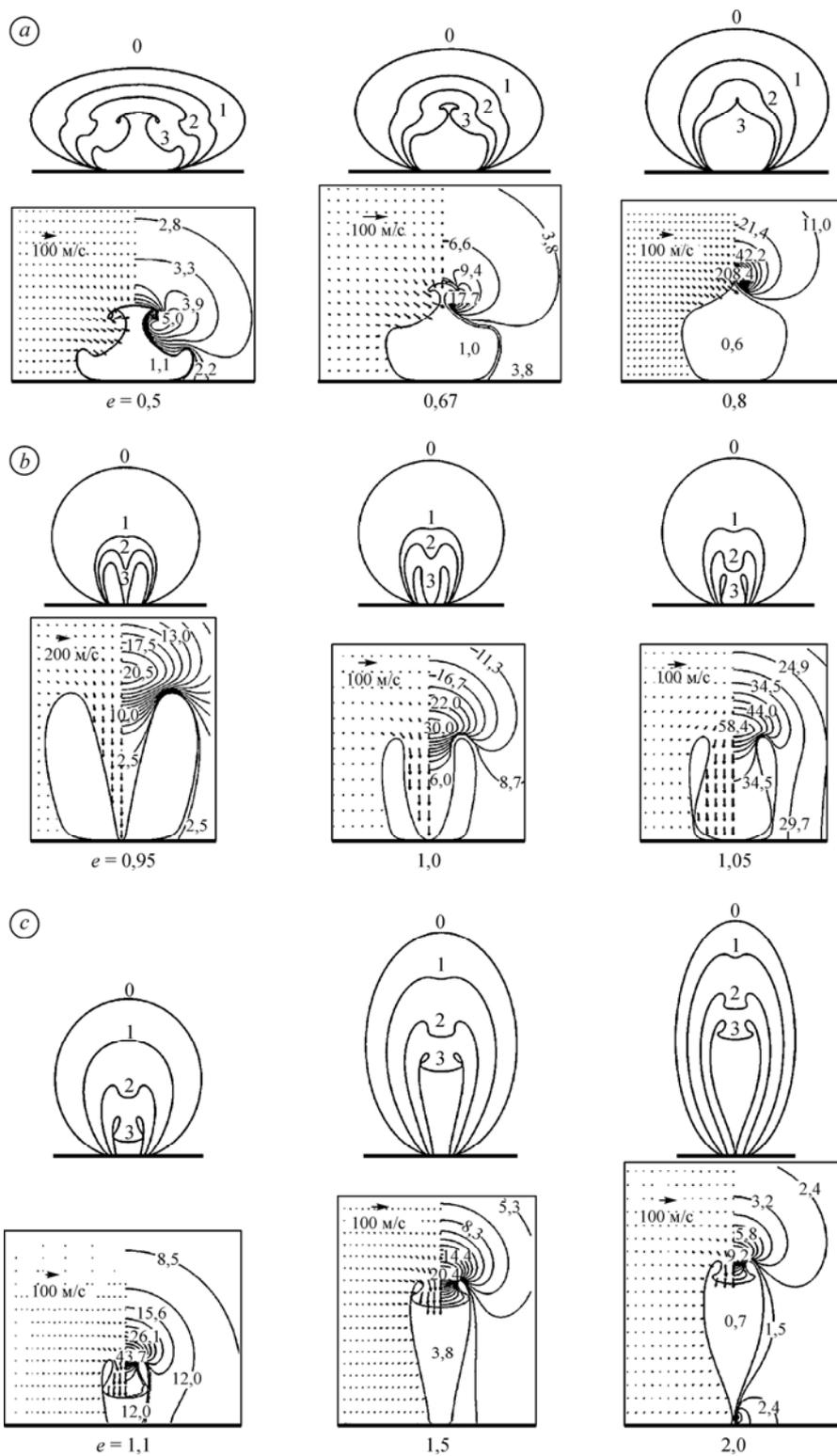


Рис. 2. Изменение формы примыкающего к стенке ( $h_0 = 0$ ) первоначально сфероидального пузырька в процессе сжатия, поля давления (бар) и скорости в жидкости в окрестности пузырька в момент  $t_c$  для ряда значений начальной несферичности  $e$ . Обозначения приведены в тексте.

На рис. 2*b* момент  $t_c$  соответствует удару конца струи по стенке в точке соприкосновения пузырька со стенкой. С уменьшением  $e$  струя становится тоньше, а ее скорость возрастает. Наибольшее давление в жидкости возникает у основания струи, и оно тем больше, чем шире струя. В верхней половине струи скорость и давление практически постоянны. При этом давление в струе примерно равно давлению в пузырьке. Давление на стенке в момент удара можно оценить по формуле  $p = \rho_f v D$ , где  $D = c + \lambda v$  — скорость ударной волны,  $c$  — скорость звука в жидкости,  $\lambda = \text{const}$  (для воды  $c = 1500$  м/с,  $\lambda = 2$ ) [30]. Согласно такой оценке давление на стенке по мере уменьшения  $e$  от 1,05 до 0,95 возрастает от 1,7 кбар до 2,8 кбар.

У сильно вытянутого сфероидального пузырька (рис. 2*c*) при  $e = 1,1$  и 1,5 в верхней части пузырька в результате расширения конца струи образуется отделяющаяся от пузырька тороидальная полость. Подобная картина наблюдается и при  $e = 2,0$ . Однако в этом случае до завершения образования тороидальной полости вблизи стенки возникает тонкая ножка с отделением малой полости.

Расчетами установлено, что бьющая по стенке струя у примыкающего к стенке парового пузырька в воде возникает при  $e \in [0,82, 1,05]$ . На рис. 3*a* приведена максимальная скорость конца струи в зависимости от параметра  $e$  (линия 1), скорость конца струи (линия 2) и давление в пузырьке (линия 3) в момент удара струи о стенку  $t_c$ . Символами изображены значения скорости струи, полученные в работах [13, 14]. Видно, что для  $e > 0,88$  значения максимальной скорости и скорости конца струи в момент удара близки между собой и хорошо согласуются с результатами [13, 14].

Вычисления показывают, что при увеличении числа отрезков разбиения контура  $n$  различие в форме струи и величине давления внутри пузырька быстро уменьшается.

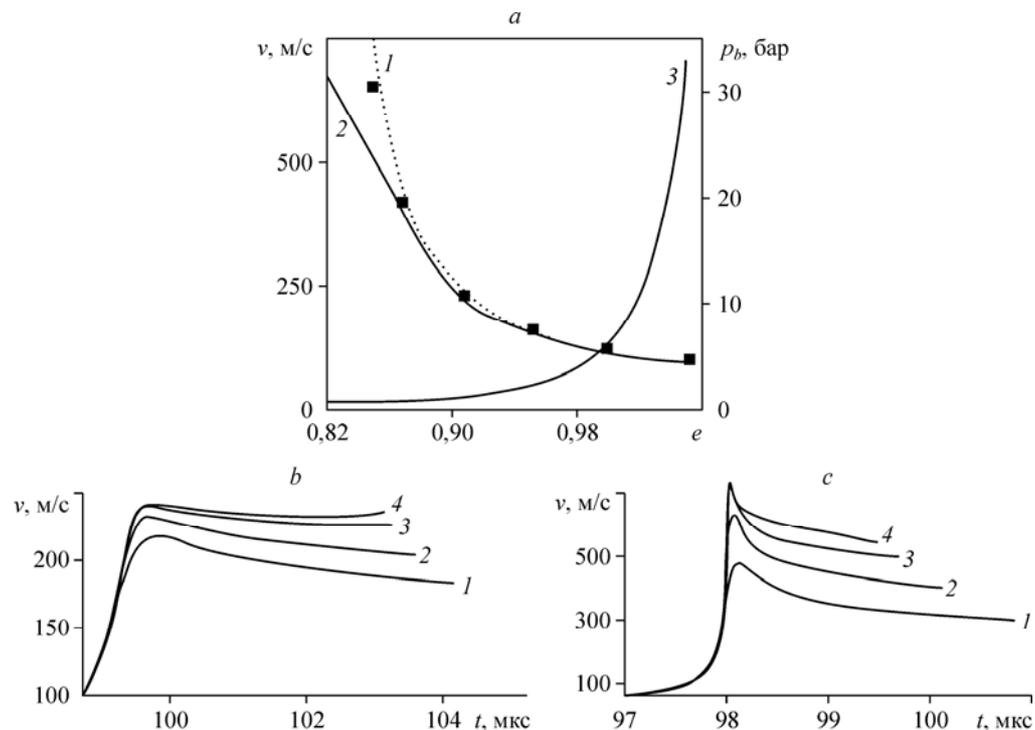


Рис. 3. Максимальная скорость струи (1), скорость струи (2) и давление в пузырьке (3) в момент удара струи о стенку  $t_c$  в зависимости от  $e$  (а); скорость конца струи для  $e = 0,9$  (b) и 0,85 (c) на интервале времени, близком к моменту  $t_c$ , при разном разбиении контура.

а: символы — результаты работ [13, 14]; б, в:  $n = 100$  (1), 200 (2), 400 (3), 800 (4).

На рис. 3*b*, 3*c* приведены зависимости скорости конца струи от времени для  $e = 0,9$  и  $0,85$  при разном числе  $n$ . Видно, что с ростом  $n$  разница между кривыми становится меньше. При этом различие между полученными данными максимальной скорости струи и результатами [13, 14] для  $e = 0,9$  не превышает 2 % при  $n = 50$ , а с ростом  $n$  увеличивается до 4 % ( $n = 100 \div 400$ ). Для  $e = 0,85$  при  $n = 200$  это различие составляет менее 1 % и увеличивается с ростом  $n$  до 10 % ( $n = 800$ ).

Все приведенные в статье результаты получены с равномерным распределением узлов на контуре пузырька. При этом с уменьшением  $e$  сходимость по величине скорости конца струи ухудшается и получить достоверную оценку скорости струи для  $e < 0,85$  становится затруднительным. С целью улучшения сходимости были проведены расчеты с неравномерным распределением узлов пропорционально либо расстоянию от оси вращения, либо скорости контура, либо значению потенциала на нем, что приводило к сгущению узлов на контуре струи. Так, если на длину дуги, равную радиусу кривизны конца струи, в случае  $e = 0,85$  для  $n = 200$  (800), при равномерном распределении приходилось 2 (3) узла, то при их сгущении — 7 (11). Однако это не привело к заметному улучшению сходимости по скорости струи. Отметим, что одновременно с ухудшением сходимости разность между максимальной скоростью конца струи и ее скоростью в момент удара о стенку возрастает (рис. 3).

### Влияние удаленности пузырька от стенки

Проведено исследование влияния начального расстояния от пузырька до стенки  $h_0$  на интервал изменения  $e$ , в котором образуется направленная к стенке кумулятивная струя, бьющая по ближней к стенке части поверхности пузырька.

Для нескольких значений  $e \in [0,82, 1,08]$  и  $h_0$  на рис. 4 показаны формы пузырьков в момент  $t_c$  соударения частей их поверхности. Прямыми линиями показано положение стенки при  $h_0 = 0, 0,25R_0, 0,5R_0$ , случай, когда  $h_0/R_0 = \infty$ , соответствует ее отсутствию.

Видно, что при  $e = 0,82$  очень тонкая кумулятивная струя возникает только у пузырька, примыкающего к стенке. Начиная с  $e = 0,825$  образование такой струи происходит и при  $h_0 = 0,25R_0$ , а начиная с  $e = 0,845$  и до  $e = 1,05$  — при всех рассмотренных

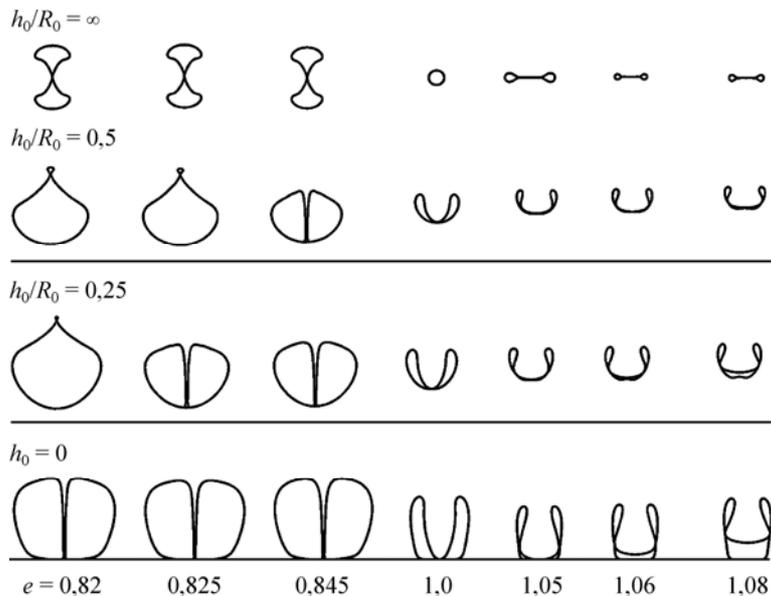


Рис. 4. Формы пузырьков в момент  $t_c$  при разных значениях начального расстояния до стенки  $h_0$  и начальной несферичности  $e$ .

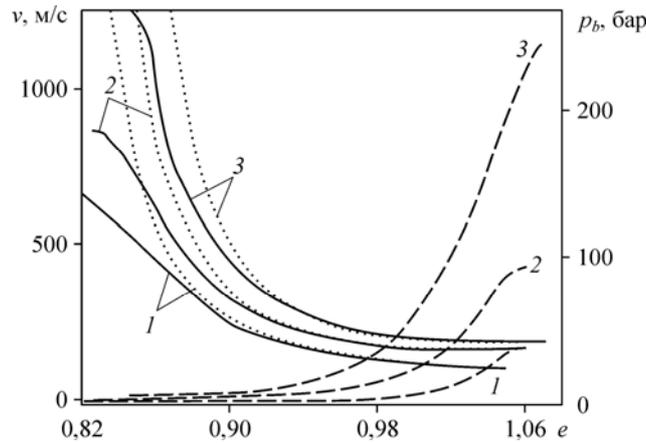


Рис. 5. Зависимости от  $e$  относительной максимальной скорости конца струи (пунктирные линии), относительной скорости конца струи (сплошные линии) и давления внутри пузырька (штриховые линии) в момент  $t_c$  для трех значений параметра  $h_0$ .  
 $h_0 = 0$  (1),  $0,25R_0$  (2),  $0,5R_0$  (3).

значениях  $h_0$ . У первоначально вытянутых пузырьков для  $e > 1,05$  наблюдается картина, обратная той, что возникает при рассмотрении сплюснутых пузырьков. Так, при  $e = 1,06$ , в случае пузырька, примыкающего к стенке, струя касается боковой поверхности пузырька, не достигая стенки, а при  $h_0 \geq 0,25R_0$  она практически одновременно бьет как по боковой, так и по ближней к стенке частям поверхности пузырька. Аналогичная картина наблюдается и для  $e = 1,08$ , но при  $h_0 = 0,5R_0$ . Интервал изменения  $e$ , в котором возникает кумулятивная струя, направленная к стенке, с ростом  $h_0$  незначительно изменяясь по величине сдвигается вправо. Из рис. 4 видно, что наличие стенки существенно влияет на форму пузырьков в момент соударения частей их поверхности.

На рис. 5 приведены значения относительной максимальной скорости конца струи (пунктирные линии), относительной скорости конца струи, характеризующей скорость соударения (сплошные линии), и давления в пузырьке (штриховые линии) в момент  $t_c$  для трех значений  $h_0$  в зависимости от  $e$ :  $h_0 = 0$  (линии 1),  $0,25R_0$  (линии 2),  $0,5R_0$  (линии 3). Относительная скорость подсчитывалась как разность скоростей конца струи и противоположной ей точки поверхности пузырька.

Видно, что по мере удаления пузырька от стенки скорость конца струи и давление в пузырьке в момент  $t_c$  возрастают. С уменьшением  $e$  численная сходимость по величине скорости струи ухудшается, одновременно разность между максимальной скоростью струи и ее скоростью в момент  $t_c$  возрастает.

### Заключение

Рассмотрен процесс осесимметричного схлопывания кавитационного пузырька в идеальной несжимаемой жидкости вблизи плоской твердой стенки. В начале сжатия жидкость находится в состоянии покоя, паровой пузырек имеет форму сфероида.

В работе использовался численный метод, основанный на схеме Эйлера для коррекции положения контура пузырька, значений потенциала скорости на нем и методе граничных элементов. Расчет проводился до момента соударения (контакта)  $t_c$  между собой каких-либо частей поверхности пузырька. Исследована практическая сходимость метода при увеличении числа элементов разбиения контура. Выполнено сравнение полученных данных с результатами других авторов и получено их хорошее совпадение.

Изучено влияние на динамику пузырька расстояния до стенки и отклонения формы пузырька от сферической в начальный момент времени. Показано, что при схлопывании сильно сплюснутого сфероидального пузырька, контактирующего со стенкой, в момент соударения  $t_c$  от пузырька в его удаленной от стенки части отделяется небольшая тороидальная полость, а при схлопывании сильно вытянутого пузырька вблизи стенки от него отделяется маленький дочерний пузырек.

Установлено, что при значениях  $e$ , принадлежащих интервалу  $[0,82, 1,05]$ , у прилегающей к стенке пузырька образуется кумулятивная струя, бьющая непосредственно по стенке. По мере удаления пузырька от стенки на расстояние, не превышающее половины среднего по объему начального радиуса пузырька, этот интервал изменяется незначительно по величине и сдвигается вправо. При этом с увеличением начального расстояния до стенки у сплюснутого пузырька при  $e < 0,9$  возрастает скорость соударения конца струи с противоположной ей частью поверхности пузырька, а у вытянутого — при  $e > 1$  возрастает давление внутри пузырька. Расчеты показали, что при увеличении числа элементов разбиения контура различие в форме струи и величине давления внутри пузырька быстро уменьшается. Однако для изначально сплюснутого сфероида сходимость по величине скорости струи в момент  $t_c$  с уменьшением  $e$  замедляется так, что получить достоверную оценку скорости при  $0,82 \leq e < 0,85$  в рамках используемой методики становится затруднительным.

Построены поля скорости и давления в жидкости, окружающей пузырек. Показано, что максимальное давление возникает у основания струи. В верхней половине струи скорость и давление практически постоянны, при этом давление в струе примерно равно давлению в пузырьке.

### Список литературы

1. **Parsons C.A., Cook S.S.** Investigations into the causes of corrosion or erosion of propellers // J. of the American Society for Naval Engineers. 1919. Vol. 31, No. 2. P. 536–541.
2. **Terwisga T.J.C., Wijngaarden E., Bosschers J., Kuiper G.** Cavitation research on ship propellers a review of achievements and challenges // Sixth Intern. Symp. on Cavitation, 2006. Wageningen, The Netherlands. P. 1–14.
3. **Preece C.M.** Cavitation erosion // In: Preece CM (ed) Erosion. N.Y.: Academic Press, 1979. P. 208–301.
4. **Pearsall I.S.** Cavitation. London: Mills and Boon Limited, 1972. 80 p.
5. **Brennen C.E.** Hydrodynamics of pumps. Oxford university press, 1994. 300 p.
6. **Kieser B., Phillion R., Smith S., McCartney T.** The application of industrial scale ultrasonic cleaning to heat exchangers // Proc. of Int. Conf. on Heat exchanger fouling and cleaning. 2011. P. 336–338.
7. **Guoa Sh., Khoo B.Ch., Teob S.L. M., Lee H.P.** The effect of cavitation bubbles on the removal of juvenile barnacles // Colloids and Surfaces B: Biointerfaces. 2013. Vol. 109. P. 219–227.
8. **Ohl C.-D., Arora M., Ikink R., Jong N., Versluis M., Delius M., Lohse D.** Sonoporation from jetting cavitation bubbles // Biophysical J. 2006. Vol. 91. P. 4285–4295.
9. **Naude C.F., Ellis A.T.** On the mechanism of cavitation damage by nonhemispherical cavities collapsing in contact with a solid boundary // J. of Basic Engineering. 1961. P. 648–656.
10. **Benjamin T.B., Ellis A.T.** The collapse of cavitation bubbles and the pressures there by produced against solid boundaries // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sci. 1966. Vol. 260, No. 1110. P. 221–240.
11. **Plesset M.S., Chapman R.B.** Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 47. P. 2. P. 283–290.
12. **Kornfeld M., Suvorov L.** On the destructive action of cavitation // J. Appl. Phys. 1944. Vol. 15. P. 495–506.
13. **Воинов О.В., Воинов В.В.** О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струи // ДАН СССР. 1976. Т. 227, № 1. С. 63–66.
14. **Воинов О.В.** Расчет параметров скоростной струи, образующейся при захлопывании пузыря // ПМТФ. 1979. № 3. С. 94–98.
15. **Blake J.R., Taib B.B., Doherty G.** Transient cavities near boundaries // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 170. P. 479–497.
16. **Blake J.R., Gibson, D.C.** Cavitation bubbles near boundaries // Ann. Rev. Fluid Mech. 1987. Vol. 19. P. 99–123.
17. **Zhang Z.Y., Zhang H.S.** Surface tension effects on the behavior of a cavity growing, collapsing and rebounding near a rigid wall // Physical Review E. 2004. Vol. 70, No. 5. P. 056310.
18. **Blake J.R., Robinson P.B., Shima A., Tomita Y.** Interaction of two cavitation bubbles with a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1993. Vol. 255. P. 707–721.

19. **Shervani-Tabar M.T., Hajzadeh Aghdam A., Khoo B.C., Farhangmehr V., Farzaneh B.** Numerical analysis of a cavitation bubble in the vicinity of an elastic membrane // *Fluid Dyn. Res.* 2013. Vol. 45, No. 5. P. 055503–055516.
20. **Klaseboer E., Khoo B. C.** An oscillating bubble near an elastic material // *J. Applied Physics.* 2004. Vol. 96, No. 10. P. 5808–5818.
21. **Shervani-Tabar M.T.** Computer study of a cavity bubble near a rigid boundary, a free surface and a compliant wall // PhD Thesis, University of Wollongong. Wollongong. Australia. 1995.
22. **Pearson A., Blake J.R., Otto S.R.** Jets in bubbles // *J. Engng Mathematics.* 2004. Vol. 48. P. 391–412.
23. **Воинов О.В., Воинов В.В.** Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // *ДАН СССР.* 1975. Т. 221, № 3. С. 559–562.
24. **Афанасьев К.Е., Григорьева И.В.** Численное моделирование динамики пространственных парогазовых пузырей // *Вычислительные технологии.* 2006 Т. 11. Спец. выпуск. С. 4–25.
25. **Best J.P.** The dynamics of underwater explosions // PhD thesis, The University of Wollongong, Australia. 1991. 184 p.
26. **Leppinen D.M., Wang Q.X., Blake J.R.** Pulsating Bubbles Near Boundaries // *Bubble Dynamics and Shock Waves Shock Wave Sci. and Technology Reference Library.* 2013. Vol. 8. P. 33–65.
27. **Wang Q.X., Blake J.R.** Non-spherical bubble dynamics in a compressible liquid. P. 2. Standing acoustic wave // *J. Fluid Mech.* 2010. Vol. 679. P. 559–581.
28. **Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.** Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
29. **Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.** Схлопывание кавитационного пузырька в жидкости вблизи твердой стенки // *Вестн. Башкирского университета.* 2013. Т. 18, вып. 1. С. 15–21.
30. **Neumann F.J.** High-speed impact between a liquid drop and a solid surface // *J. Appl. Phys.* 1969. Vol. 40, No. 13. P. 5113–5122.

*Статья поступила в редакцию 26 мая 2014 г.,  
после переработки — 2 апреля 2015 г.*