УДК 536.46

С. А. Пелесков

ЗАЖИГАНИЕ С УЧЕТОМ БОКОВЫХ ТЕПЛОПОТЕРЬ

Влияние теплопотерь через боковую поверхность поджигаемой системы на критические условия воспламенения рассматривалось в [1] в рамках стационарной тепловой теории [2]. Временные характеристики зажигания при наличии теплопотерь получены в [3] из сопоставления результатов численных расчетов с закономерностями, установленными для адиабатического случая. В настоящей работе в рамках нестационарного подхода рассматривается задача о критических условиях и временных характеристиках зажигания полубесконечного цилиндра, на торце которого поддерживается постоянная температура T_s и который обменивается теплом с окружающей средой по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи α.

Температура окружающей среды $T_0 < T_s$. Предполагается, что химическая реакция сильно активирована, т. е. $E \gg RT_s$, поэтому зона реакции узка. Выгоранием до момента воспламенения пренебрегаем. Задачу рассматриваем с использованием метода критического условия [4], которое зададим, следуя [5], как равенство в момент воспламенения критического градиента по Зельдовичу [5] текущему значению градиента при инертном прогреве.

Такой подход сводит задачу фактически к рассмотрению эволюции температурного профиля в полубесконечном стержне, нагреваемом источником постоянной температуры с торца. Временно́е распределение температуры стержня при таких условиях, согласно [6], имеет вид

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mathrm{Bi} J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right)}{J_0(\mu_n)\left(\mathrm{Bi}^2 + \mu_n^2\right)} \exp\left(-\mu_n \frac{x}{r_0}\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Bi} J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right)}{J_0(\mu_n)\left(\mathrm{Bi}^2 + \mu_n^2\right)} \left[\exp\left(\mu_n \frac{x}{r_0}\right) \mathrm{erfc}\left(\mu_n \sqrt{\frac{a\tau}{r_0^2}} + \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) -\right.$$
$$\left. - \exp\left(-\mu_n \frac{x}{r_0}\right) \mathrm{erfc}\left(\mu_n \sqrt{\frac{a\tau}{r_0^2}} - \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right], \qquad (1)$$

где T — температура; x, r — координаты; τ — время; r_0 — радиус цилиндра; a — температуропроводность; $\mathrm{Bi} = \alpha r_0/\lambda$ — критерий Био; λ — коэффициент теплопроводности; μ_n — корень характеристического уравнения $J_0(\mu_n)/J_1(\mu_n) = \mu_n/\mathrm{Bi}$; $J_0(\mu_n)$ и $J_1(\mu_n)$ — функции Бесселя.

Продифференцировав уравнение (1) по x, можно найти выражение для градиента температуры. Но оказывается, что при $x = 0$ ряды в этом выражения расходятся. Чтобы обойти это затруднение, воспользуемся следующим приемом.

Минимальный градиент температуры при наличии теплоотвода всегда находится на оси цилиндра. Ряд в уравнении (1), записанном для продольной оси ($r = 0$), становится знакочередующимся. В этом случае его сумма по величине не более первого члена ряда [7]. Оценим ошибку, которая возникает при замене суммы ряда (1) его первым членом. В плоскости $x = 0$ точное значение $\Theta = 1$. Оценка по первому члену при $\mathrm{Bi} \to 0$ дает $\Theta \to 1$, а при $\mathrm{Bi} \to \infty$ $\Theta \to 2/(\mu_1 J_1(\mu_1)) = 1{,}6$. Поскольку при $x \to \infty$ точное значение температуры на оси цилиндра совпадает с оценкой по первому члену ряда при любых Bi, приближенно можно считать, что замена ряда в (1) оценкой по его первому члену изменяет только величину температуры, но не градиент.

В таком приближении градиент температуры в плоскости $x = 0$ находится из выражения

$$-\frac{dT}{dx} = (T_s - T_0)\frac{2\mathrm{Bi}}{J_0(\mu_1)(\mathrm{Bi}^2+\mu_1^2)}\left[\frac{\mu_1}{r_0}\operatorname{erf}\left(\frac{\mu_1}{r_0}\sqrt{a\tau}\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi a\tau}}\exp\left(-\frac{\mu_1^2}{r_0^2}a\tau\right)\right]. \tag{2}$$

Воспламенение происходит, когда $-\frac{dT}{dx}$ (2) достигает величины критического значения [5]

$$\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2RT_s^2}{\lambda E}Qk_0\exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right)}, \tag{3}$$

где E, Q и k_0 — соответственно энергия активации, тепловой эффект и предэкспоненциальный множитель реакции. Условие их равенства можно записать в виде

$$\frac{2\mathrm{Bi}\mu_1}{J_0(\mu_1)(\mathrm{Bi}^2+\mu_1^2)r_0}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\mu_1}{r_0}\sqrt{a\tau}\right)+\frac{r_0}{\mu_1\sqrt{\pi a\tau}}\exp\left(-\frac{\mu_1^2}{r_0^2}a\tau\right)\right]\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\lambda E(T_s-T_0)^2}{2RT_s^2Qk_0}\exp\left(\frac{E}{RT_s}\right)} = 1. \tag{4}$$

Уравнение (4) связывает теплофизические и термокинетические свойства зажигаемой среды с условиями теплоотвода.

Согласно (2), градиент температуры со временем стремится к стационарному значению

$$\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ст}} = \frac{2\mathrm{Bi}\mu_1(T_s-T_0)}{J_0(\mu_1)(\mathrm{Bi}^2+\mu_1^2)r_0}. \tag{5}$$

Следовательно, зажигание возможно, если критический градиент не меньше стационарного. Условие (4) для случая равенства критического и стационарного градиентов дает

$$\frac{2\mathrm{Bi}\mu_1}{J_0(\mu_1)(\mathrm{Bi}^2+\mu_1^2)r_0}\sqrt{\frac{\lambda E(T_s-T_0)^2}{2RT_s^2Qk_0}\exp\left(\frac{E}{RT_s}\right)} = 1. \tag{6}$$

Вид (6) с точностью до некоторой функции от RT_0/E (величина которой порядка единицы) согласуется с критическим условием из [1]. Однако сомножитель, учитывающий условия теплоотвода, отличается от приводимого в [1], где $\delta_0 = \mu_1^2$, а в (6) член, учитывающий условия теплоотвода, имеет вид

$$\Delta_0 = \frac{4\mathrm{Bi}^2\mu_1^2}{J_0^2(\mu_1)(\mathrm{Bi}^2+\mu_1^2)^2}. \tag{7}$$

Ниже приведены значения δ_0 и Δ_0 в зависимости от Bi:

Bi	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	25	50	100	∞
δ_0	0,195	0,381	0,885	1,57	2,56	3,96	4,71	5,34	5,57	5,66	5,78
Δ_0	0,205	0,418	1,099	2,30	4,58	8,98	11,67	13,44	14,21	14,54	14,84

Как видно, различие между δ_0 и Δ_0 возрастает по мере увеличения Bi. Можно показать, что $\Delta_0 = \delta_0$ при Bi = 0. Разные зависимости Δ_0 и δ_0 от Bi связаны с разными приближениями, используемыми в настоящей работе и в [1].

Теперь становится ясным физический смысл критического условия (6) (и критического условия из [1, 3]). Он заключается в том, что зажигание возможно только в том случае, если критический градиент для зажигаемой системы не меньше стационарного в данных условиях теплоотвода.

Сравнивая (4) и (6), находим

$$\Delta_0^2 = \left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ст}} \frac{r_0}{T_s - T_0},$$

т. е. параметр, учитывающий условия теплоотвода, является функцией стационарного градиента и радиуса и, следовательно, возможность зажигания поджигаемой среды определяется ее теплофизическими свойствами и не зависит от термокинетических параметров.

При $\mathrm{Bi} \to 0$ из (4) получаем явное выражение для времени задержки зажигания

$$\tau = \frac{\lambda E (T_s - T_0)^2}{2\pi a R T_s^2 Q k_0} \exp\left(\frac{E}{RT_s}\right),$$

которое совпадает с приводимым в [3] для этого случая.

Таким образом, на основе нестационарного рассмотрения задачи о зажигании в условиях теплоотвода получены критические условия зажигания и зависимости для времен задержки зажигания. Результаты согласуются с данными, полученными в рамках стационарной тепловой теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Барзыкин В. В., Худяев С. И.** Докл. АН СССР, 1966, **169**, 6, 1366.
2. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Изд-во АН СССР, 1947.
3. **Вилюнов В. Н.** Теория зажигания конденсированных веществ.— Новосибирск: Наука, 1984.
4. **Аверсон А. Э.** Тепломассообмен в процессах горения.— Черноголовка, 1980, 16.
5. **Зельдович Я. Б.** Докл. АН СССР, 1963, **150**, 2, 283.
6. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности.— М.: ГИТТЛ, 1952.
7. **Воробьев Н. Н.** Теория рядов.— М.: Наука, 1979.

г. Москва *Поступила в редакцию 15/VI 1988*

УДК 542.57

С. О. Гладков, А. М. Токарев

К ТЕОРИИ ИМПУЛЬСНОГО ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ТВЕРДОЕ ГОРЮЧЕЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Изучение влияния тепловой нагрузки и различного рода излучений на многослойные цилиндрические и другие типы поверхностей позволяет провести оценку времени установления теплового равновесия в веществах для определенных режимов нагрева (см., например, [1—8]). Основная задача, с которой при этом приходится сталкиваться, заключается в решении уравнения теплопроводности с заданными граничными и начальными условиями. Как известно [9], зависимость температуры от координат находится с помощью метода разделения переменных. Весьма громоздкое решение в этом случае записывается в виде ряда по всем суперпозициям тепловых волн в веществе.

Задача, которая решается в настоящей работе, не относится к вопросу о распределении тепла в образце за счет теплопроводности. С физической точки зрения интерес представляет нестационарный и неоднородный процесс горения топлива при тепловом одномерном облучении цилиндрической оболочки массивного тела (рис. 1). При этом возникает вполне резонный вопрос: каким способом можно описать распространение контура горения (на рис. 1, *а* — контур C_2) как функцию времени