УДК 539.371

ОБ УРАВНЕНИЯХ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

В. И. Кондауров

(Москва)

Рассматриваются нестационарные уравнения теории течения конечно-деформированных упруговязкопластических материалов. Анализируются два подхода к кинематике таких сред. Изучаются ограничения, налагаемые на определяющие уравнения неравенством энтропии и требованиями инвариантности относительно ортогональных преобразований актуальной, разгруженной и начальной конфигураций. Полная система уравнений записывается в дивергентной форме, что позволяет получить все допустимые соотношения на сильных разрывах. В адиабатическом приближении система уравнений приводится к симметричному виду, формулируются достаточные условия гиперболичности.

1. Кинематика. Пусть ξ — радиус-вектор частицы среды в начальной конфигурации тела, $\mathbf{x}$ — в актуальной, текущей конфигурации. Начальную конфигурацию будем считать естественной конфигурацией [1, 2] с постоянной температурой $\Theta = \Theta_0$ и плотностью $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$. Обозначим через $\overset{\circ}{\text{э}}_i$, $\hat{\text{э}}_j$ векторы базиса начальной и сопутствующей лагранжевой системы координат [1] и э_k — базис пространственной декартовой системы координат, такие, что

$$d\xi = d\xi^i \overset{\circ}{\text{э}}_i, \quad d\mathbf{x} = dx^k \text{э}_k = d\xi^j \hat{\text{э}}_j. \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что отображение (деформация) начальной конфигурации в актуальную

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t), \tag{1.2}$$

где t — время, является взаимно-однозначным и непрерывно дифференцируемым нужное число раз. При фиксированном t из (1.2) следует

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\cdot d\xi = \left(\overset{\circ}{\text{э}}_a F^{a\cdot}_{\cdot b} \overset{\circ}{\text{э}}{}^b\right)\cdot\left(\overset{\circ}{\text{э}}_j d\xi^j\right) = \overset{\circ}{\text{э}}_a F^{a\cdot}_{\cdot j} d\xi^j, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{F}$ — тензор градиента полной деформации. Сравнивая (1.1) и (1.3), видим, что

$$\hat{\text{э}}_j = \overset{\circ}{\text{э}}_i F^{i\cdot}_{\cdot j}, \tag{1.4}$$

т. е. матрица $F^{i\cdot}_{\cdot j}$ представляет собой линейное преобразование как $d\xi$ в $d\mathbf{x}$, так и базиса $\overset{\circ}{\text{э}}_i$ в базис $\hat{\text{э}}_j$.

Используя определение вектора скорости $\mathbf{v} = \partial \mathbf{x}(\xi, t)/\partial t|_\xi$ и соотношение (1.4), получим

$$d\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} = d\xi^i \frac{\partial \hat{\text{э}}_i}{\partial t}\bigg|_{\xi^m} = d\xi^i \frac{\partial F^{k\cdot}_{\cdot j}}{\partial t}\bigg|_{\xi^m} \overset{\circ}{\text{э}}_k = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\bigg|_\xi \cdot d\xi,$$

откуда в силу произвольности $d\mathbf{x}$ следует кинематическое соотношение [1, 2]

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \nabla\mathbf{v}, \quad \dot{F}^{i\cdot}_{\cdot j} = F^{k\cdot}_{\cdot j}\partial v^i/\partial x^k. \tag{1.5}$$

Точка здесь и далее обозначает дифференцирование по t при $\xi = \mathrm{const}$. Как показано в [3], соотношение (1.5), являющееся условием совместности полей деформаций и скоростей, может быть приведено к дивергентной форме:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\Delta} F^{i\cdot}_{\cdot j}\right)}{\partial t}\bigg|_{x^m} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\frac{1}{\Delta}\left(v^k F^{i\cdot}_{\cdot j} - v^i F^{k\cdot}_{\cdot j}\right)\right\} = 0; \quad \Delta = \det\left\| F^{i\cdot}_{\cdot j}\right\|$$

или с учетом закона сохранения массы $\rho\Delta = \rho_0$ для тел с кусочно-постоянной плотностью в начальной конфигурации к форме:

$$\frac{\partial\left(\rho F^{i\cdot}_{\cdot j}\right)}{\partial t}\bigg|_{x^m} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\rho v^k F^{i\cdot}_{\cdot j} - \rho v^i F^{k\cdot}_{\cdot j}\right\} = 0. \tag{1.6}$$

Введем теперь, кроме начальной и актуальной конфигураций тела, еще и разгруженную промежуточную конфигурацию [1] с температурой $\Theta = \Theta_0$. Обозначим радиус-вектор частицы в разгруженном состоянии $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\xi, t)$ и предположим, как это делается в большинстве современных работ по конечным деформациям упругопластической среды (см., например, обзор [4]), что дифференциалы $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$ и $d\xi$ при $t=\mathrm{const}$ связаны между собой соотношениями

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\cdot d\xi,\ d\mathbf{y} = \mathbf{P}\cdot d\xi,\ d\mathbf{x} = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{y}. \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{P}, \tag{1.8}$$

где $\mathbf{E}$ — градиент упругой деформации, исчезающий после снятия напряжений с поверхности бесконечно малого объема; $\mathbf{P}$ — градиент пластической, остаточной деформации, $\det\mathbf{P} > 0$, $\det\mathbf{E} > 0$, $\mathbf{EP} \neq \mathbf{PE}$.

Пусть теперь $\overset{*}{\text{э}}_i$ — базис лагранжевой системы координат в пространстве разгруженной конфигурации, такой, что

$$d\mathbf{y} = d\xi^i\, \overset{*}{\text{э}}_i. \tag{1.9}$$

Здесь и далее звездочкой помечены величины, относящиеся к состоянию разгрузки.

Покажем, что в отличие от матрицы $\mathbf{F}$, которая является матрицей преобразования как $d\xi$ в $d\mathbf{x}$, так и $\overset{\circ}{\text{э}}_i$ в $\widehat{\text{э}}_j$, матрица упругого градиента $\mathbf{E}$ уже не является матрицей преобразования базиса $\overset{*}{\text{э}}_i$ разгруженной конфигурации в базис $\widehat{\text{э}}_j$ актуальной конфигурации. Определим матрицы $\mathscr{P}^{a\cdot}_{\cdot b}$ и $\mathscr{E}^{m\cdot}_{\cdot n}$ следующим образом:

$$\overset{*}{\text{э}}_i = \overset{\circ}{\text{э}}_a \mathscr{P}^{a\cdot}_{\cdot i},\ \widehat{\text{э}}_j = \overset{*}{\text{э}}_i \mathscr{E}^{i\cdot}_{\cdot j} = \overset{\circ}{\text{э}}_a \mathscr{P}^{a\cdot}_{\cdot i}\mathscr{E}^{i\cdot}_{\cdot j} = \overset{\circ}{\text{э}}_a F^{a\cdot}_{\cdot j}. \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует

$$\mathbf{F} = \vec{\mathscr{P}}\cdot\vec{\mathscr{E}},\ F^{i\cdot}_{\cdot j} = \mathscr{P}^{i\cdot}_{\cdot a}\mathscr{E}^{a\cdot}_{\cdot j}. \tag{1.11}$$

Подставляя (1.10) в (1.9), получим

$$d\mathbf{y} = \overset{*}{\text{э}}_i d\xi^i = \overset{\circ}{\text{э}}_a \mathscr{P}^{a\cdot}_{\cdot i} d\xi^i = \left(\overset{\circ}{\text{э}}_a \mathscr{P}^{a\cdot}_{\cdot b} \overset{\circ}{\text{э}}{}^b\right)\cdot\left(\overset{\circ}{\text{э}}_i d\xi^i\right) = \vec{\mathscr{P}}\cdot d\xi.$$

С другой стороны, $d\mathbf{y} = \mathbf{P}\cdot d\xi$, и, следовательно, $\vec{\mathscr{P}} = \mathbf{P}$. Сравнивая композиции (1.8) и (1.11), находим с учетом $\vec{\mathscr{P}} = \mathbf{P}$ $\mathbf{E} = \vec{\mathscr{P}}\vec{\mathscr{E}}\vec{\mathscr{P}}^{-1}$, $\vec{\mathscr{E}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{EP}$, откуда видно, что $\mathbf{E}$ не является в общем случае матрицей преобразования базисных векторов $\overset{*}{\text{э}}_i$ в $\widehat{\text{э}}_i$.

Аналогичный результат получается, если исходить из представлений [5]:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\cdot d\xi,\ d\mathbf{y} = \mathbf{E}\cdot d\xi,\ d\mathbf{x} = \mathbf{P}\cdot d\mathbf{y},\ \mathbf{F} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{E},$$

$$\widehat{\text{э}}_i = \overset{\circ}{\text{э}}_a F^{a\cdot}_{\cdot i},\ \overset{*}{\text{э}}_j = \overset{\circ}{\text{э}}_b \mathscr{E}^{b\cdot}_{\cdot j},\ \widehat{\text{э}}_i = \overset{*}{\text{э}}_m \mathscr{P}^{m\cdot}_{\cdot i},\ \mathbf{F} = \vec{\mathscr{E}}\cdot\vec{\mathscr{P}}.$$

В этом случае $\vec{\mathscr{E}} = \mathbf{E}$, $\mathbf{P} = \vec{\mathscr{E}}\vec{\mathscr{P}}\vec{\mathscr{E}}^{-1}$, $\vec{\mathscr{P}} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{PE}$.

Как видно из приведенных рассуждений, в случае упругопластических тел необходимо различать, что именно предполагается мерой упругих и пластических деформаций: преобразования дифференциалов радиусов-векторов при переходе от одной конфигурации к другой или преобразования базисных реперов. В случае нелинейно-упругих материалов эти преобразования тождественно совпадают.

Рассмотрим теперь, как преобразуются тензоры $\mathbf{F}$ и $\mathbf{P}$ при ортогональных преобразованиях конфигураций. Обозначим тильдой значения величин после смены системы отсчета или, что то же самое, после наложения на актуальную конфигурацию переноса и вращения как жесткого целого при фиксированной начальной и разгруженной конфигурации. Из формул (1.7) и соотношения, определяющего смену системы отсчета [2],

$$\check{\mathbf{x}} = \mathbf{z}(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{z}_0), \tag{1.12}$$

где $\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_0$ — вектор переноса; $\mathbf{z}_0$ — радиус-вектор точки, относительно которой происходит вращение, определяемое ортогональным тензором $\mathbf{Q}(t)$, следует

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F},\ \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}. \tag{1.13}$$

Пусть $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t)$ — тензор преобразования, не меняющего метрику разгруженной конфигурации. Тогда

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F},\ \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{Y}\cdot\mathbf{P}, \tag{1.14}$$

где черта обозначает значение величины после преобразования $\mathbf{Y}(t)$ при фиксированной актуальной и начальной конфигурации.

Пусть, наконец, $\mathbf{K} = \mathrm{const}$ — ортогональный тензор преобразования начальной конфигурации. При фиксированной актуальной и разгруженной конфигурации имеем

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{K},\ \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{K}, \tag{1.15}$$

где двойная черта означает величину после указанного преобразования.

Рассмотрим полярные разложения

$$\mathbf{F}=\mathbf{RU}=\mathbf{VR},\ \mathbf{P}=\mathbf{HW}=\mathbf{MH}, \tag{1.16}$$

где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{H}$— ортогональные тензоры; $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$, $\mathbf{M}$ — симметричные положительно определенные тензоры. Используя теорему о единственности полярного разложения, из (1.13)—(1.16) получим

$$\tilde{\mathbf{R}}=\mathbf{QR},\ \tilde{\mathbf{U}}=\mathbf{U},\ \tilde{\mathbf{V}}=\mathbf{QVQ}^T,\ \tilde{\mathbf{H}}=\mathbf{H},\ \tilde{\mathbf{W}}=\mathbf{W},\ \tilde{\mathbf{M}}=\mathbf{M}; \tag{1.17}$$

$$\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{R},\ \bar{\mathbf{U}}=\mathbf{U},\ \bar{\mathbf{V}}=\mathbf{V},\ \bar{\mathbf{H}}=\mathbf{YH},\ \bar{\mathbf{W}}=\mathbf{W},\ \bar{\mathbf{M}}=\mathbf{YMY}^T; \tag{1.18}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{R}}}=\mathbf{RK},\ \bar{\bar{\mathbf{U}}}=\mathbf{K}^T\mathbf{UK},\ \bar{\bar{\mathbf{V}}}=\mathbf{V},\ \bar{\bar{\mathbf{H}}}=\mathbf{HK},\ \bar{\bar{\mathbf{W}}}=\mathbf{K}^T\mathbf{WK},\ \bar{\bar{\mathbf{M}}}=\mathbf{M}. \tag{1.19}$$

2. **Определяющие уравнения**. Рассмотрим определяющие соотношения дифференциального типа для безмоментных однородных изотропных упругопластических сред, чувствительных к скорости деформирования. Такие уравнения являются достаточно хорошим приближением для описания основных эффектов, наблюдаемых при упругопластической деформации материалов, и автоматически удовлетворяют принципам детерминизма и локального действия [1, 2]. Далее изучим ограничения, которые налагаются на определяющие уравнения требованиями инвариантности, и ограничения, обусловленные неравенством энтропии.

Термодинамическое состояние частицы будем считать полностью определенным, если заданы внешние переменные: тензор $\mathbf{F}$, температура $\Theta > 0$ и градиент температуры $\mathbf{g} = \nabla\Theta$, а также внутренние переменные, характеризующие изменение внутренней структуры материала при пластической деформации: тензор $\mathbf{P}$ и параметр упрочнения χ. Обозначим для удобства $\pi_\alpha = \{\mathbf{F}, \mathbf{P}, \Theta, \chi, \mathbf{g}\}$ и постулируем определяющие уравнения в наиболее простом, функциональном виде

$$A = A(\pi_\alpha),\ \boldsymbol{\sigma} = \Sigma(\pi_\alpha),\ \eta = \eta(\pi_\alpha),\ \mathbf{q} = \mathrm{S}(\pi_\alpha); \tag{2.1}$$

$$\Phi(\dot{\mathbf{P}},\ \dot{\chi},\ \pi_\alpha) = 0,\ \varphi(\dot{\mathbf{P}},\ \dot{\chi},\ \pi_\alpha) = 0,\ \partial(\Phi_{ij},\ \varphi)/\partial(\dot{P}_{mn},\ \dot{\chi}) \neq 0, \tag{2.2}$$

где A — плотность свободной энергии; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор Коши; η — плотность энтропии; $\mathbf{q}$ — тепловой поток. Функции $A(\pi_\alpha)$, $\Sigma(\pi_\alpha)$, $\eta(\pi_\alpha)$ и $\mathrm{S}(\pi_\alpha)$ считаются достаточно гладкими. Эволюционные уравнения (2.2), где Φ — тензорная, а φ — скалярная функции своих аргументов, предполагаются разрешимыми относительно $\dot{\mathbf{P}}$ и $\dot{\chi}$.

Рассмотрим теперь ортогональное преобразование и параллельный перенос начальной конфигурации при фиксированной разгруженной и актуальной. Учитывая, что при этом преобразовании справедливы, помимо соотношений (1.19), формулы

$$\dot{\bar{\bar{\mathbf{P}}}} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{K},\ \dot{\bar{\bar{\chi}}} = \dot{\chi}, \tag{2.3}$$

найдем, что необходимым и достаточным условием изотропности и однородности упруговязкопластического материала является

$$A = A(\mathbf{V},\ \mathbf{PR}^T),\ \boldsymbol{\sigma} = \Sigma(\mathbf{V},\ \mathbf{PR}^T),\ \eta = \eta(\mathbf{V},\ \mathbf{PR}^T),\ \mathbf{q} = \mathrm{S}(\mathbf{V},\ \mathbf{PR}^T), \tag{2.4}$$

$$\Phi(\mathbf{V},\ \mathbf{PR}^T,\ \dot{\mathbf{P}}\mathbf{R}^T,\ \dot{\chi}) = 0,\ \varphi(\mathbf{V},\ \mathbf{PR}^T,\ \dot{\mathbf{P}}\mathbf{R}^T,\ \dot{\chi}) = 0,$$

где для краткости опущены аргументы Θ, χ и $\mathbf{g}$, не изменяющиеся при рассматриваемом преобразовании. Необходимость (2.4) легко проверить, если положить для фиксированной частицы и фиксированного момента времени произвольный постоянный ортогональный тензор $\mathbf{K}$ равным тензору $\mathbf{R}^T$. Подстановкой (1.19), (2.3) в (2.4) можно выяснить, что (2.4) является достаточным условием.

Если рассмотреть условие инвариантности определяющих уравнений (2.4) относительно ортогональных преобразований разгруженной конфигурации, то получим

$$A = A(\mathbf{V},\ \mathbf{B}),\ \boldsymbol{\sigma} = \Sigma(\mathbf{V},\ \mathbf{B}),\ \eta = \eta(\mathbf{V},\ \mathbf{B}),\ \mathbf{q} = \mathrm{S}(\mathbf{V},\ \mathbf{B}), \tag{2.5}$$

$$\Phi(\mathbf{V},\ \mathbf{B},\ \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}\mathbf{R}^T,\ \dot{\chi}) = 0,\ \varphi(\mathbf{V},\ \mathbf{B},\ \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}\mathbf{R}^T,\ \dot{\chi}) = 0,$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{RWR}^T$.

Условие инвариантности уравнений относительно преобразований разгруженной конфигурации, как нам представляется, полностью снимает вопрос о неоднозначности разложения $\mathbf{F} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{P}$, многократно обсуждавшийся, начиная с работы [6], и является естественным обобщением различных предположений о взаимной связи актуальной и разгруженной конфигураций.

Для доказательства необходимости зафиксируем частицу ξ в момент времени $t = t_0$. Пусть теперь преобразование $\mathbf{Y}(t)$ для $0 \leqslant \tau \leqslant t_0$ таково, что

$$\mathbf{Y}(\tau) = \mathbf{R}(t_0)\mathbf{H}^T(\tau),\ \dot{\mathbf{Y}}(\tau) = \mathbf{R}(t_0)\dot{\mathbf{H}}^T(\tau). \tag{2.6}$$

В момент времени $\tau = t_0$ с учетом (1.18), (2.6) имеем

$$\overline{\mathbf{PR}^T} = \mathbf{RWR}^T,\ \overline{\dot{\mathbf{P}}\mathbf{R}^T} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}\mathbf{R}^T,\ \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V},$$

откуда и следует необходимость (2.5). Доказательство достаточности (2.5) получается, если в них подставить соотношения (1.18).

Выясним ограничения, налагаемые на (2.5) требованием инвариантности относительно ортогональных преобразований (1.12) актуальной конфигурации. Тогда, учитывая, что A, $\boldsymbol{\sigma}$, η и $\mathbf{q}$ являются объективными [2] величинами, получим, принимая во внимание (1.17):

$$A(\mathbf{QVQ}^T,\ \mathbf{QBQ}^T,\ \mathbf{Qg}) = A(\mathbf{V},\ \mathbf{B},\ \mathbf{g}), \tag{2.7}$$

$$\Sigma(\mathbf{QVQ}^T,\ \mathbf{QBQ}^T,\ \mathbf{Qg}) = \mathbf{Q}\Sigma(\mathbf{V},\ \mathbf{B},\ \mathbf{g})\mathbf{Q}^T,$$

$$\eta(\mathbf{QVQ}^T,\ \mathbf{QBQ}^T,\ \mathbf{Qg}) = \eta(\mathbf{V},\ \mathbf{B},\ \mathbf{g}),\ \mathbf{S}(\mathbf{QVQ}^T,\ \mathbf{QBQ}^T,\ \mathbf{Qg}) = \mathbf{QS}(\mathbf{V},\ \mathbf{B},\ \mathbf{g}),$$

$$\mathbf{QR\dot{W}R}^T\mathbf{Q}^T = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{QVQ}^T,\ \mathbf{QBQ}^T,\ \mathbf{Qg}) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{V},\ \mathbf{B},\ \mathbf{g})\mathbf{Q}^T,$$

$$\dot{\chi} = \psi(\mathbf{QVQ}^T,\ \mathbf{QBQ}^T,\ \mathbf{Qg}) = \psi(\mathbf{V},\ \mathbf{B},\ \mathbf{g}),$$

где используется разрешенная форма законов пластического течения и упрочнения

$$\mathbf{R\dot{W}R}^T = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{V},\ \mathbf{B},\ \mathbf{g}),\ \dot{\chi} = \psi(\mathbf{V},\ \mathbf{B},\ \mathbf{g}). \tag{2.8}$$

Из (2.7) следует, что функции A, Σ, η, $\mathbf{S}$, $\boldsymbol{\Psi}$ и ψ являются изотропными функциями своих аргументов. Полагая, в частности, $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$, получим

$$A = A(\mathbf{U},\ \mathbf{W},\ \mathbf{R}^T\mathbf{g}),\ \eta = \eta(\mathbf{U},\ \mathbf{W},\ \mathbf{R}^T\mathbf{g}),\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}\Sigma(\mathbf{U},\ \mathbf{W},\ \mathbf{R}^T\mathbf{g})\mathbf{R}^T, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{RS}(\mathbf{U},\ \mathbf{W},\ \mathbf{R}^T\mathbf{g}),\ \dot{\mathbf{W}} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{U},\ \mathbf{W},\ \mathbf{R}^T\mathbf{g}),\ \dot{\chi} = \psi(\mathbf{U},\ \mathbf{W},\ \mathbf{R}^T\mathbf{g}).$$

Сформулированные необходимые и достаточные условия инвариантности не дают, конечно, однозначного ответа на вопрос, какие меры деформаций и скоростей деформаций должны использоваться и каков конкретный вид определяющих уравнений упруговязкопластической среды, но существенно сужают класс допустимых уравнений состояния.

Выясним, какие ограничения на вид определяющих уравнений (2.9) накладывает второй закон термодинамики, который будем использовать в виде неравенства Клаузиуса — Дюгема [2]: $\rho\dot{\eta} - \operatorname{div}((1/\Theta)\mathbf{q}) - (1/\Theta)\rho r \geqslant 0$.

С учетом соотношения $A = \varepsilon - \eta\Theta$, где ε — плотность внутренней энергии, приведенного уравнения баланса энергии $\rho\dot{\varepsilon} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\mathbf{v}) + \operatorname{div}\mathbf{q} + \rho r$ и кинематического уравнения (1.5) неравенство энтропии может быть записано в форме

$$-\operatorname{tr}\left(\frac{\partial A}{\partial \mathbf{U}}\dot{\mathbf{U}}\right) - \operatorname{tr}\left(\frac{\partial A}{\partial \mathbf{W}}\dot{\mathbf{W}}\right) - \frac{\partial A}{\partial \chi}\dot{\chi} - \frac{\partial A}{\partial \Theta}\dot{\Theta} - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{g}}\dot{\mathbf{g}} - \eta\dot{\Theta} + \tag{2.10}$$

$$+\frac{1}{\rho}\operatorname{tr}\left\{(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R})\,\dot{\mathbf{U}}\right\} + \frac{1}{\rho\Theta}\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \geqslant 0.$$

Для рассматриваемого упруговязкопластического материала постулируется, что в пространстве $(\mathbf{U},\ \mathbf{W},\ \Theta,\ \chi,\ \mathbf{g})$ существует поверхность

$$f(\mathbf{U},\ \mathbf{W},\ \Theta,\ \chi,\ \mathbf{g}) = 0, \tag{2.11}$$

называемая статическим условием пластичности и разделяющая открытые области упругости, где $\boldsymbol{\Psi} \equiv 0$, $\psi \equiv 0$, и пластичности, где $\boldsymbol{\Psi} \neq 0$, $\psi \neq 0$.

Значения функций и их производных, определенных в упругой и пластической областях, предполагаются непрерывными во всем пространстве, включая поверхность (2.11). Стандартным образом [2] построив локальное продолжение процесса, удовлетворяющего закону пластического течения и упрочнения, получим из (2.10)

$$A = A(\mathbf{U},\ \mathbf{W},\ \chi,\ \Theta),\ \partial A/\partial\mathbf{g} = 0,\ \eta = -\partial A/\partial\Theta, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\rho\mathbf{F}\partial A/\partial\mathbf{U})\mathbf{R}^T = \rho\mathbf{V}\partial A/\partial\mathbf{V} = \rho\mathbf{F}\partial A/\partial\mathbf{F}^T;$$

$$\delta = \mathbf{h}\cdot\mathbf{g} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Psi}) + b\psi \geqslant 0,\ \text{где} \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\partial A/\partial\mathbf{W} = -(\mathbf{R}^T\cdot\partial A/\partial\mathbf{B})\cdot\mathbf{R},\ b = -\partial A/\partial\chi,\ \mathbf{h} = (1/\rho\Theta)\mathbf{q}. \tag{2.14}$$

В случае, если рассматривается изотермическое ($\mathbf{g} \equiv 0$) или адиабатическое ($\mathbf{q} \equiv 0$) приближение, неравенство Клаузиуса — Дюгема превращается в неравенство Планка для внутренней механической диссипации и (2.13) принимает вид $\delta_м = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Psi}) + b\psi \geqslant 0$. Если материал находится в упругом состоянии, то $\boldsymbol{\Psi} = 0$, $\psi = \delta_м \equiv 0$ и (2.13) является неравенством Фурье для тепловой диссипации: $\delta_T = \mathbf{h}\cdot\mathbf{g} \geqslant 0$.

3. Полная система уравнений. Будем рассматривать в качестве вектора решения совокупность величин

$$\mathbf{u} = \{\Theta,\ v_i,\ F^{i}_{\cdot j},\ W_{ij},\ \chi\} = \{u_\alpha\},\ \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ 20$$

В эйлеровых координатах x^i с ортонормированным базисом $\mathbf{э}_i$ полная система уравнений может быть записана тогда в виде дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Theta}{dt}=\frac{\Theta}{\rho c_F}\frac{\partial\sigma_i^k}{\partial\Theta}\frac{\partial v^i}{\partial x^k}+\frac{1}{\rho c_F}\frac{\partial q^k}{\partial x^k}+\frac{1}{c_F}\left(r+r^{(p)}\right), \tag{3.1}$$

$$\frac{dv^i}{dt}=F_a^k\frac{\partial^2 A}{\partial F_a^i\partial F_n^m}\frac{\partial F_n^m}{\partial x^k}-F_a^k\frac{\partial\tau^{mn}}{\partial F_a^i}\frac{\partial W_{mn}}{\partial x^k}-F_a^k\frac{\partial b}{\partial F_a^i}\frac{\partial\chi}{\partial x^k}-F_a^k\frac{\partial\eta}{\partial F_a^i}\frac{\partial\Theta}{\partial x^k}+b_i,$$

$$\frac{dF_j^i}{dt}=\frac{\partial v^i}{\partial x^k}F_j^k,\quad \frac{dW_{ij}}{dt}=\Psi_{ij}\left(u_\alpha\right),\quad \frac{d\chi}{dt}=\psi\left(u_\alpha\right)$$

и конечных соотношений

$$A=A\left(U_{mn},W_{mn},\Theta,\chi\right),\quad \sigma_j^i=\rho F_m^i\frac{\partial A}{\partial F_m^j}, \tag{3.2}$$

$$q^k=q^k\left(U_{mn},W_{mn},\Theta,\chi,\partial\Theta/\partial x^m\right),$$

$$\eta=-\frac{\partial A}{\partial\Theta},\quad c_F=\Theta\frac{\partial\eta}{\partial\Theta},\quad F_j^i=R^{im}U_{mj},$$

$$\tau^{mn}=-\frac{\partial A}{\partial W_{mn}},\quad b=-\frac{\partial A}{\partial\chi},\quad \rho=\rho_0/\det\left\|F_j^i\right\|,$$

$$r^{(p)}=\left(\tau^{mn}-\Theta\frac{\partial\tau^{mn}}{\partial\Theta}\right)\Psi_{mn}+\left(b-\Theta\frac{\partial b}{\partial\Theta}\right)\psi,$$

где b_i — массовая сила; c_F — теплоемкость при постоянных деформациях; $r^{(p)}$ — плотность источников тепла за счет работы на необратимых деформациях. В уравнениях (3.1) предполагается, что градиент температуры $\mathbf{g}=\nabla\Theta$ оказывает пренебрежимо малое влияние на пластические свойства материала, так что $\Psi_{mn}=\Psi_{mn}(u_\alpha)$, $\psi=\psi(u_\alpha)$.

Используя уравнение для температуры в виде дифференциального закона сохранения полной энергии, уравнение движения — в виде закона сохранения импульса, кинематическое уравнение для F_j^i — в виде закона сохранения совместности деформаций (1.7) и уравнения теории течения (2.9), систему уравнений (3.1) можно записать в виде полной системы дивергентных форм:

$$\partial\varphi_\alpha^0\left(u_\beta\right)/\partial t+\partial\varphi_\alpha^k\left(u_\beta\right)/\partial x^k=f_\alpha\left(u_\beta\right), \tag{3.3}$$

где $E=\varepsilon+v_iv^i/2$; $\alpha,\beta=1,2,\ldots,20$; $k=1,2,3$;

$$\varphi_\alpha^0=\begin{Bmatrix}\rho E\\ \rho v^i\\ \rho F_j^i\\ \rho W_{ij}\\ \rho\chi\end{Bmatrix};\quad \varphi_\alpha^k=\begin{Bmatrix}\rho Ev^k-\sigma^{ik}v_i-q^k\\ \rho v^iv^k-\sigma^{ik}\\ \rho v^kF_j^i-\rho v^iF_j^k\\ \rho v^kW_{ij}\\ \rho v^k\chi\end{Bmatrix};\quad f_\alpha=\begin{Bmatrix}\rho\left(r+b^iv_i\right)\\ \rho b^i\\ 0\\ \rho\Psi_{ij}\\ \rho\psi\end{Bmatrix}. \tag{3.4}$$

Запись системы уравнений упруговязкопластической среды в виде полной системы дифференциальных законов сохранения позволяет определить не только классическое, но и обобщенное решение [7], получить все допустимые соотношения на волнах сильного разрыва, применить для рассматриваемого материала консервативные методы численного расчета [8]. Подчеркнем, что для системы уравнений теории течения упругопластического материала, нечувствительного к скорости деформирования, набор независимых дивергентных форм исчерпывается законами сохранения энергии, импульса и совместности деформаций.

Дивергентная запись полной системы уравнений особенно просто выглядит в случае лагранжевых координат ξ^k:

$$\dot{E}-\frac{\partial}{\partial\xi^m}\left\{T^{mi}v_i+\frac{1}{\rho}F_k^{-1m}q^k\right\}=r+b^iv_i, \tag{3.5}$$

$$\dot{v}^i-\frac{\partial T^{mi}}{\partial\xi^m}=b^i,\quad \dot{F}_j^i-\frac{\partial\left(v^i\delta_j^m\right)}{\partial\xi^m}=0,\quad \dot{W}_{ij}=\Psi_{ij},\quad \dot{\chi}=\psi,\ \text{где}\ T^{mi}=$$

$$=\frac{1}{\rho}F_k^{-1m}\sigma^{ki},\quad T^{mi}\neq T^{im}.$$

В адиабатическом приближении ($q^k = 0$) система (3.5) может быть симметризована. Чтобы показать это, получим как следствие (3.5) уравнение

$$\dot{\eta} = r/\Theta + \delta,\ \delta = \tau^{mn}\Psi_{mn} + b\psi \tag{3.6}$$

для скорости изменения энтропии. Выражение (3.6) представляет собой дополнительный закон сохранения, справедливый в областях гладких течений. Для вывода (3.6) умножим первое уравнение (3.5) на неизвестный пока множитель $\alpha = \alpha(u_\alpha)$, второе — на β_i, третье — на γ_i^j, четвертое — на λ^{ji}, пятое — на ζ и сложим все уравнения. В результате получим систему

$$\begin{gathered} \dot{\eta} = \alpha\dot{E} + \beta_i\dot{v}^i + \gamma_i^j\dot{F}_j^i + \lambda^{ji}\dot{W}_{ij} + \zeta\dot{\chi}, \\ \frac{1}{\Theta}\left(r + \tau^{mn}\Psi_{mn} + b\psi\right) = \alpha r + \alpha b^i v_i + \beta_i b^i + \lambda^{mn}\Psi_{mn} + \zeta\psi, \\ \alpha\frac{\partial}{\partial\xi^m}\left(T^{mi}v_i\right) + \beta_i\frac{\partial T^{mi}}{\partial\xi^m} + \gamma_i^j\frac{\partial\left(v^i\delta_j^m\right)}{\partial\xi^m} = 0, \end{gathered} \tag{3.7}$$

из которой находим

$$\alpha = \frac{1}{\Theta},\ \beta_i = -\frac{v_i}{\Theta},\ \gamma_i^j = -\frac{1}{\Theta}T^{j\cdot}_{\cdot i},\ \lambda^{ji} = \frac{1}{\Theta}\tau^{ji},\ \zeta = \frac{1}{\Theta}b. \tag{3.8}$$

С учетом тождества $dA = T^{m\cdot}_{\cdot i}dF^{i\cdot}_{\cdot m} - \tau^{mn}dW_{mn} - b\,d\chi - \eta d\Theta$, эквивалентного соотношениям (2.12), (2.14), можно проверить, что выражения (3.8) удовлетворяют и более сильным по сравнению с (3.7) условиям:

$$\begin{gathered} d\eta = \alpha dE + \beta_i dv^i + \gamma_i^j dF_j^i + \lambda^{ji}dW_{ij} + \zeta d\chi, \\ \alpha d\left(T^{mi}v_i\right) + \beta_i dT^{mi} + \gamma_i^j d\left(v^i\delta_j^m\right) = 0. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Записывая (3.9) в форме

$$\begin{gathered} d\left(\alpha E + \beta_i v^i + \gamma_i^j F_j^i + \lambda^{ji}W_{ij} + \zeta\chi - \eta\right) = E d\alpha + v^i d\beta_i + W_{ij}d\lambda^{ji} + \chi d\zeta, \\ d\left(\alpha T^{mi}v_i + \beta_i T^{mi} + \gamma_i^m v^i\right) = T^{mi}v_i d\alpha + T^{mi}d\beta_i + v^i d\gamma_i^m \end{gathered}$$

и обозначая $L^0 = -\alpha E - \beta_i v^i - \gamma_i^j F_j^i - \lambda^{ji}W_{ij} - \zeta\chi + \eta =$

$$= \frac{1}{\Theta}\left(\frac{1}{2}v_i v^i + \frac{1}{\rho}\sigma_k^k - \tau^{ij}W_{ij} - b\chi - A\right),\ L^m = -(1/\Theta)\,T^{m}_{\cdot i}v_i,$$

получим

$$\begin{gathered} E = -\partial L^0/\partial\alpha,\ v^i = -\partial L^0/\partial\beta_i,\ F_j^i = -\partial L^0/\partial\gamma_i^j,\ W_{ij} = -\partial L^0/\partial\lambda^{ji},\ \chi = -\partial L^0/\partial\zeta, \\ T^{mi}v_i = \partial L^m/\partial\alpha,\ T^{mi} = \partial L^m/\partial\beta_i,\ v^i\delta_j^m = \partial L^m/\partial\gamma_i^j. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Соотношения (3.10) позволяют записать систему (3.5) в симметричном виде

$$\frac{\partial L^0_{q_\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial L^m_{q_\alpha}}{\partial\xi^m} = L^0_{q_\alpha q_\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial t} + L^m_{q_\alpha q_\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial\xi^m} = -\frac{1}{\rho}f_\alpha, \tag{3.11}$$

где $q_\alpha = \{\alpha, \beta_i, \gamma_i^j, \lambda^{ji}, \zeta\}$; $L^{0,m}_{q_\alpha} = \partial L^{0,m}/\partial q_\alpha$; $L^{0,m}_{q_\alpha q_\beta} = \partial^2 L^{0,m}/\partial q_\alpha\partial q_\beta$, при условии, что $\det\|\partial q_\alpha/\partial u_\beta\| \neq 0$. Если матрица $L^0_{q_\alpha q_\beta}$ является положительно определенной, то система (3.11) будет заведомо гиперболической [9]. Условие положительной определенности матрицы $L^0_{q_\alpha q_\beta}$ эквивалентно условию выпуклости функции внутренней энергии ε по своим аргументам: $(\partial^2\varepsilon(p_\alpha)/\partial p_\alpha\partial p_\beta)\lambda^\alpha\lambda^\beta > 0$, $\forall\lambda^\alpha \neq 0$, α, $\beta = 1, 2, \ldots, 20$, где $p_\alpha = \{F_j^i, \bar{W}_{ij}, \chi, \eta\}$. Доказательство эквивалентности аналогично приведенному в [3] для случая нелинейной упругости.

Отметим, что достаточное условие гиперболичности существенно более сильное по сравнению с необходимым условием

$$\left(F_a^k n_k\right)\frac{\partial^2\varepsilon\left(F_n^m, W_{mr}, \chi, \eta\right)}{\partial F_a^i\partial F_b^j}\left(F_b^s n_s\right)\lambda^i\lambda^j > 0,\ \forall\lambda^i \neq 0,$$

которое, как можно показать, имеет место для изучаемой системы уравнений.

Рассмотрим в заключение соотношения на сильных разрывах в упруговязкопластической среде. Пусть $D = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big/\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\right)^{1/2}$ — скорость поверхности разрыва $\varphi(x^m, t) = 0$, $n_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\Big/\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\right)^{1/2}$ — компоненты единичной пространственной нормали, направленной в сторону движения. Тогда на сильном разрыве для системы уравнений (3.3) имеют место соотношения [7] $-D\left[\varphi_\alpha^0\right] + n_i\left[\varphi_\alpha^i\right] = 0$, где $[a] = a^+ - a^-$ — скачок величины a. Индексами $(\pm)$ обозначено состояние частицы после и перед фронтом. Обозначая через $G = D - n_i v^i$ скорость распространения поверхности $\varphi = 0$ относительно частиц среды и используя (3.4), получим

$$[\rho GE] + [\sigma^{ik}v_i]n_k + [q^k]n_k = 0,\quad [\rho Gv^i] + [\sigma^{ik}]n_k = 0, \tag{3.12}$$

$$\left[\rho GF_j^i\right] + \left[\rho v^i F_j^k\right]n_k = 0,\quad [\rho GW_{ij}] = 0,\quad [\rho G\chi]=0.$$

Сворачивая уравнение для скачка F_j^i с нормалью n_i, находим, что при $D \neq 0$

$$\left[\rho F_j^k\right]n_k = 0. \tag{3.13}$$

Смысл соотношения (3.13) становится ясным, если принять во внимание связь между компонентами нормали к поверхности $\varphi = 0$ в начальной и актуальной конфигурациях

$$\overset{\circ}{n}_j = \frac{dS}{d\overset{\circ}{S}}\frac{\rho}{\overset{\circ}{\rho}}F_j^k n_k,$$

где dS, $d\overset{\circ}{S}$ — элементарные площадки на поверхности разрыва в рассматриваемых конфигурациях. Отсюда следует, что (3.13) выражает собой непрерывность нормали $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ в начальной конфигурации.

Используя (3.13), можно показать [3], что имеет место условие непрерывности потока массы

$$[\rho G] = 0. \tag{3.14}$$

Формулы (3.13), (3.14) дают возможность записать уравнение для скачка F_j^i в виде

$$\left[F_j^i\right] = h^i\rho F_j^k n_k,\quad h^i = -\frac{1}{\rho G}[v^i],$$

после чего остальные уравнения (3.12) представим в форме

$$\rho G\left\{[\varepsilon] - \frac{1}{2}\left(\sigma_i^{k+} + \sigma_i^{k-}\right)h^i n_k\right\} + [q^k]n_k = 0, \tag{3.15}$$

$$[\sigma^{ik}]n_k - (\rho G)^2 h^i = 0,\quad \rho G[W_{ij}] = 0,\quad \rho G[\chi] = 0.$$

На контактном разрыве ($G = 0$) $[v^i] = [\sigma^{ik}]n_k = [q^k]n_k = 0$, а величины $[W_{ij}]$, $[\chi]$, $[\varepsilon]$ и $\left[F_j^i\right]$ являются произвольными. В случае ударной волны ($G \neq 0$) из (3.15) следует, что симметричная часть W_{ij} пластического градиента и параметр упрочнения χ непрерывны, а все остальные величины терпят разрыв.

Поступила 20 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
2. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
3. **Кондауров В. И.** О законах сохранения и симметризации уравнений нелинейной теории термоупругости.— ДАН СССР, 1981, т. 256, № 4.
4. **Кукуджанов В. Н., Кондауров В. И.** Численное решение неодномерных задач динамики твердого тела.— В сб.: Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975.
5. **Clifton R. J.** On the equivalence of F^eF^p and $\overline{F}^pF^e$.— J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, N 1.
6. **Lee E. H.** Elastic-plastic deformation at finite strains.— J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, ser. E, N 1.
7. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
8. **Годунов С. К., Рябенький В. С.** Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
9. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.