

УДК 539.375

## ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

М. В. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан  
E-mail: irakon63@hotmail.com

Построена математическая модель зарождения трещины в полосе (балке), изгибаемой в своей плоскости заданной системой внешних нагрузок (постоянными изгибающими моментами, равномерно распределенным давлением и т. п.). Считается, что по мере нагружения полосы, толщина которой полагается переменной, в ней возникают зоны предразрушения, моделируемые как области ослабленных межчастичных связей материала. Решение задачи о равновесии изотропной полосы переменной толщины с зародышевой трещиной сводится к решению нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения с ядром типа ядра Коши, из которого находятся усилия в зоне зарождения трещины. Условие появления трещины в полосе переменной толщины формулируется с учетом критерия предельного растяжения связей материала.

Ключевые слова: полоса переменной толщины, зона предразрушения, связи между берегами.

**Постановка задачи.** Как правило, для уменьшения массы тонкостенных конструкций используются пластины (стержни) переменной толщины. Это обусловлено тем, что изделия с требуемыми свойствами можно получить, варьируя толщину применяемых листовых материалов. В настоящее время методы оценки несущей способности пластин (полос) переменной толщины при наличии трещин не получили достаточного развития. Для решения практических задач исследование процесса разрушения полос (балок) переменной толщины имеет важное значение.

Рассмотрим однородную изотропную полосу (балку) переменной толщины. Обозначим через  $2c$  и  $2h$  соответственно ширину и толщину полосы (рис. 1). Срединная плоскость  $(x, y)$  является плоскостью симметрии. Полоса переменной толщины находится в обобщенном плоском напряженном состоянии. По мере нагружения полосы в материале возникают зоны предразрушения, которые моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале. Взаимодействие берегов этих областей моделируется путем введения между берегами зоны предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры областей предразрушения зависят от вида материала. Так как указанные зоны (прослойки перенапряженного материала) малы по сравнению с остальной упругой частью полосы, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. Учет этих эффектов в задачах механики разрушения машин и конструкций является важной, но весьма трудной задачей.

В рассматриваемом случае образование зародышевой трещины в полосе переменной толщины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны с ослабленными межчастичными связями материала заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

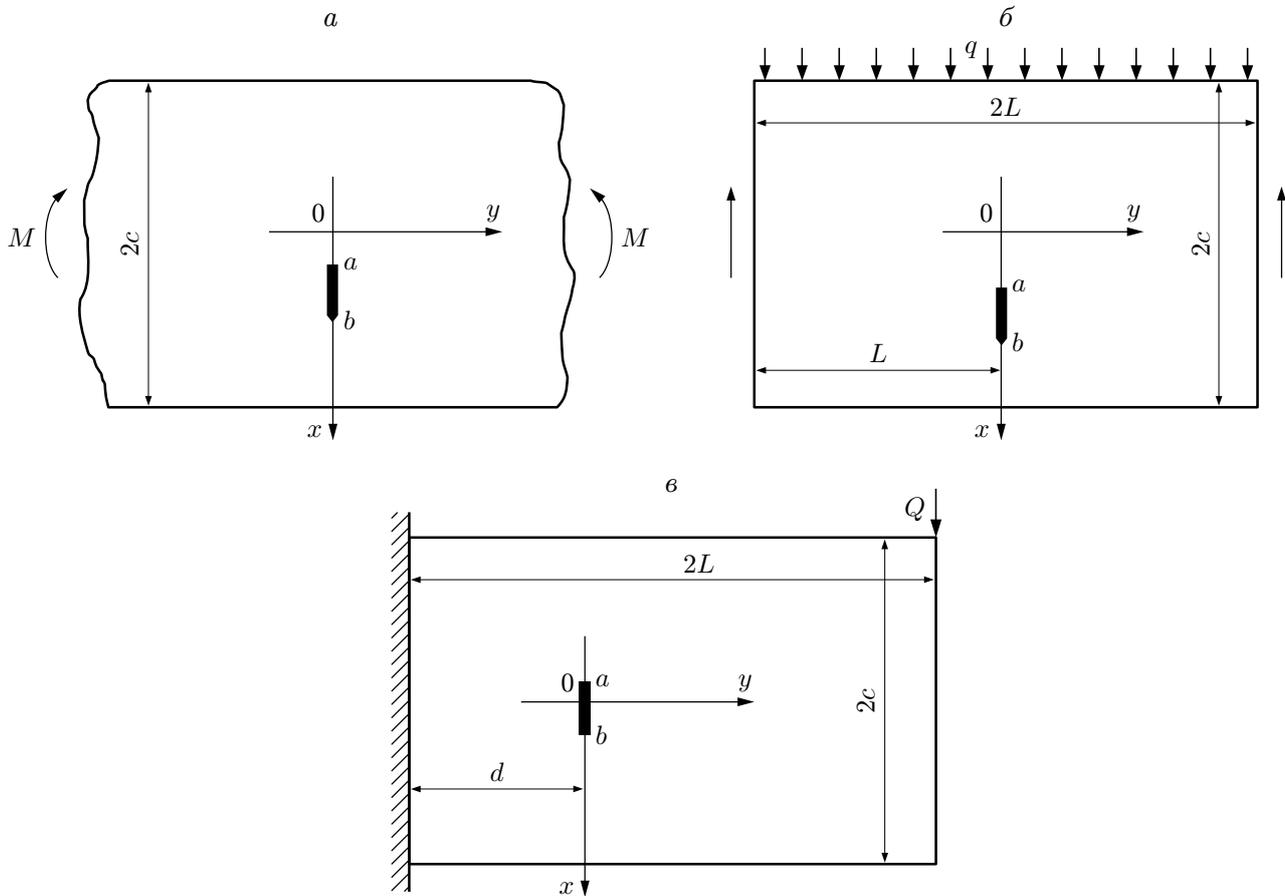


Рис. 1. Схема задачи о зарождении трещины в изгибаемой полосе переменной толщины:

*a* — чистый изгиб; *б* — равномерно распределенная нагрузка; *в* — изгиб консоли сосредоточенной силой *Q*

Как известно, на ранних стадиях разрушения формируются области с нарушенной структурой материала в виде узких слоев, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой зоной [1–3]. Считается, что толщина полосы (балки)  $2h(x, y)$  удовлетворяет условиям  $0 < h_1 \leq h(x, y) \leq h_2$ , где  $h_1, h_2$  — наименьшее и наибольшее значения толщины полосы соответственно.

Функция толщины может быть представлена в виде

$$h(x, y) = h_0[1 + \varepsilon \bar{h}(x, y)],$$

где  $h_0 = (h_1 + h_2)/2$ ;  $\varepsilon = (h_2 - h_1)/(h_2 + h_1)$ ;  $-1 \leq \bar{h}(x, y) \leq 1$  — некоторая известная безразмерная непрерывная функция.

Примем следующие предположения. На полосу действуют внешние нагрузки (изгибающие моменты, равномерно распределенное по длине полосы давление или сосредоточенные силы), расположенные в срединной плоскости полосы (см. рис. 1). Грани полосы, параллельные плоскости  $xy$ , свободны от внешних напряжений. Зона предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений. Ось  $x$  системы координат ( $xy$ ) совпадает с линией, вдоль которой расположена зона предразрушения ( $a \leq x \leq b$ ). Взаимодействие берегов зоны предразрушения (связи между берегами) препятствует зарождению трещины.

Для математического описания взаимодействия берегов зоны предразрушения принимается, что между ними имеются связи, закон деформирования которых задан. При действии силовой нагрузки на полосу в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, в общем случае возникают нормальные  $q_y(x)$  и касательные  $q_{xy}(x)$  усилия. Следовательно, к берегам зоны ослабленных межчастичных связей материала приложены нормальные  $q_y(x)$  и касательные  $q_{xy}(x)$  напряжения. Эти напряжения заранее неизвестны и должны быть определены в процессе решения краевой задачи механики разрушения для полосы.

Запишем уравнения статического деформирования полосы:

— уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0;$$

— закон Гука

$$N_x = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad N_y = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad N_{xy} = \frac{Eh}{1+\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Здесь  $N_x, N_y, N_{xy}$  — нормальные и сдвиговые усилия на единицу длины соответственно;  $u, v$  — компоненты вектора смещений;  $E$  — модуль упругости материала полосы;  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала.

Граничное условие в зоне предразрушения имеет следующий вид:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = q_y - iq_{xy} \quad \text{при} \quad y = 0, \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Основные соотношения рассматриваемой задачи необходимо дополнить соотношением, связывающим раскрытие берегов зоны предразрушения и усилия в связях. Без потери общности это соотношение представим в виде [3]

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) - i(u^+(x, 0) - u^-(x, 0)) = C(x, \sigma)[q_y(x) - iq_{xy}(x)], \quad (2)$$

где функцию  $C(x, \sigma)$  можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения;  $v^+ - v^-$  и  $u^+ - u^-$  — нормальная и касательная составляющие раскрытия берегов зоны предразрушения соответственно;  $\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2}$  — модуль вектора усилий в связях.

**Метод решения.** Решение системы уравнений статического деформирования полосы будем искать в виде

$$\begin{aligned} N_x &= N_x^{(0)} + \varepsilon N_x^{(1)} + \dots, & N_y &= N_y^{(0)} + \varepsilon N_y^{(1)} + \dots, & N_{xy} &= N_{xy}^{(0)} + \varepsilon N_{xy}^{(1)} + \dots, \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, & v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, & a &= a_0 + \varepsilon a_1 + \dots, & b &= b_0 + \varepsilon b_1 + \dots, \\ q_y &= q_y^{(0)} + \varepsilon q_y^{(1)} + \dots, & q_{xy} &= q_{xy}^{(0)} + \varepsilon q_{xy}^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

При построении решения используем процедуру (3) метода возмущений. Уравнения нулевого приближения совпадают с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого приближения представляют собой уравнения плоской задачи теории упругости с объемной силой

$$X_1 = N_x^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}, \quad Y_1 = N_y^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}. \quad (4)$$

Аналогично определяются составляющие объемной силы для второго и последующих приближений.

Граничные условия задачи (1) принимают следующий вид:

— в нулевом приближении

$$N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} = q_y^{*(0)} - iq_{xy}^{*(0)} \quad \text{при } y = 0, \quad a_0 \leq x \leq b_0; \quad (5)$$

— в первом приближении

$$N_y^* - iN_{xy}^* = -\bar{h}(x, 0)(q_y^{*(0)} - iq_{xy}^{*(0)}) + q_y^{*(1)} - iq_{xy}^{*(1)} \quad \text{при } y = 0, \quad a_1 \leq x \leq b_1. \quad (6)$$

Здесь  $q_y^* - iq_{xy}^* = 2h_0(q_y - iq_{xy})$ .

При выводе уравнений первого приближения были приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} N_x^* &= N_x^{(1)} - N_{x_0}^{(1)}, & N_{x_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_x^{(0)}, & N_y^* &= N_y^{(1)} - N_{y_0}^{(1)}, & N_{y_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_y^{(0)}, \\ N_{xy}^* &= N_{xy}^{(1)} - N_{xy_0}^{(1)}, & N_{xy_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_{xy}^{(0)}. \end{aligned}$$

Из соотношения (2) получаем:

— в нулевом приближении

$$v_0^+ - v_0^- - i(u_0^+ - u_0^-) = C(x, \sigma^0)[q_y^{(0)}(x) - iq_{xy}^{(0)}(x)]; \quad (7)$$

— в первом приближении

$$v_1^+ - v_1^- - i(u_1^+ - u_1^-) = C(x, \sigma^1)[q_y^{(1)}(x) - iq_{xy}^{(1)}(x)]. \quad (8)$$

Здесь  $\sigma^j = \sqrt{[q_y^{(j)}]^2 + [q_{xy}^{(j)}]^2}$  ( $j = 0, 1$ ).

Рассмотрим решение в нулевом приближении. В условиях плоской задачи теории упругости компоненты  $N_x^{(0)}$ ,  $N_y^{(0)}$ ,  $N_{xy}^{(0)}$  тензора напряжений и компоненты  $u_0$ ,  $v_0$  вектора смещений выражаются через две аналитические функции  $\Phi^{(0)}(z)$  и  $\Omega^{(0)}(z)$  [4]. Напряженно-деформированное состояние в окрестности зоны предразрушения определим приближенно [4]: на контуре зоны предразрушения выполняются граничные условия задачи (условия (5), (6)), на значительном расстоянии от зоны предразрушения напряженное состояние в полосе совпадает с напряженным состоянием, определяемым функциями

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi^{(0)}(z) &= \Phi_0(z) = A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3, \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega^{(0)}(z) &= \Omega_0(z) = B_0 z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3. \end{aligned} \quad (9)$$

При различных значениях коэффициентов  $A_j$  и  $B_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) эти функции определяют напряженное состояние в полосе (балке) в отсутствие зоны предразрушения. Например, полагая в формулах (9)

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, & A_1 &= 0, & A_2 &= M/(4I), & A_3 &= 0, \\ B_0 &= 0, & B_1 &= 0, & B_2 &= 3M/(4I), & B_3 &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

( $I$  — момент инерции площади сечения полосы), можно показать, что функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  определяют решение задачи о чистом изгибе моментами  $M$  бесконечной полосы (балки) в отсутствие зоны предразрушения (см. рис. 1, а).

Аналогично при

$$\begin{aligned} A_0 &= q/(24I), & A_1 &= 0, & A_2 &= q(L^2 + 3c^2/5)/(8I), & A_3 &= -qc^3/(12I), \\ B_0 &= 7q/(24I), & B_1 &= 0, & B_2 &= q(3L^2 - 11c^2/5)/(8I), & B_3 &= qc^3/(12I) \end{aligned} \quad (11)$$

функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  дают решение задачи об изгибе балки длиной  $2L$  в отсутствие зоны предразрушения при нагружении равномерным давлением интенсивности  $q$  (см. рис. 1, б).

При этом принято, что балка свободно расположена на двух опорах, а опорные реакции определяются как касательные усилия, приложенные к торцам балки. При

$$\begin{aligned} A_0 = 0, \quad A_1 = -iQ/(8I), \quad A_2 = -Q(2L - d)/(4I), \quad A_3 = 0, \\ B_0 = 0, \quad B_1 = 5iQ/(8I), \quad B_2 = -3Q(2L - d)/(4I), \quad B_3 = -iQc^2/(2I) \end{aligned} \quad (12)$$

функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  дают решение задачи об изгибе жесткозашемленной консольной балки в отсутствие зоны предразрушения под действием постоянной поперечной силы  $Q$ , приложенной на ее свободном конце (см. рис. 1, в).

Наличие в полосе зоны предразрушения обуславливает возмущение поля упругих напряжений в окрестности зоны предразрушения. Вдали от зоны предразрушения напряженно-деформированное состояние в полосе при указанных выше нагрузках определяется формулами (9), если значения коэффициентов  $A_j$  и  $B_j$  определены равенствами (10)–(12).

Краевая задача (5) сводится к задаче линейного сопряжения граничных условий функций  $\Phi^{(0)}(z)$  и  $\Omega^{(0)}(z)$  [4]

$$\begin{aligned} [\Phi^{(0)}(t) + \Omega^{(0)}(t)]^+ + [\Phi^{(0)}(t) + \Omega^{(0)}(t)]^- = 2f(t), \\ [\Phi^{(0)}(t) - \Omega^{(0)}(t)]^+ - [\Phi^{(0)}(t) - \Omega^{(0)}(t)]^- = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $a_0 \leq t \leq b_0$ ;  $t$  — аффикс точек контура зоны предразрушения;  $f(t) = q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)}$ .

Решив задачу (13) в классе всюду ограниченных функций, находим

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(z) = \frac{\sqrt{(z - a_0)(z - b_0)}}{2\pi i} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t - a_0)(t - b_0)}(t - z)} + \\ + \sqrt{(z - a_0)(z - b_0)} P_n(z) + \frac{1}{2} [\Phi_0(z) - \Omega_0(z)], \\ \Omega^{(0)}(z) = \frac{\sqrt{(z - a_0)(z - b_0)}}{2\pi i} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t - a_0)(t - b_0)}(t - z)} + \\ + \sqrt{(z - a_0)(z - b_0)} P_n(z) - \frac{1}{2} [\Phi_0(z) - \Omega_0(z)], \end{aligned} \quad (14)$$

где функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  определяются равенствами (9); многочлен  $P_n(z)$  имеет вид

$$P_n(z) = D_n z^n + D_{n-1} z^{n-1} + \dots + D_0. \quad (15)$$

Степень многочлена (15) и его коэффициенты  $D_0, D_1, \dots, D_n$  определяются поведением функций  $\Phi^{(0)}(z)$  и  $\Omega^{(0)}(z)$  в окрестности  $|z| = \infty$ . Функции  $\Phi^{(0)}(z)$  и  $\Omega^{(0)}(z)$  аналитичны в области вне зоны предразрушения и при больших значениях  $|z|$  имеют вид

$$\Phi^{(0)}(z) = \Phi_0(z) + O(1/z^2), \quad \Omega^{(0)}(z) = \Omega_0(z) + O(1/z^2). \quad (16)$$

Для определения коэффициентов  $D_0, D_1, \dots, D_n$  и величин  $a_0, b_0$  функцию  $\Phi^{(0)}(z)$  необходимо разложить в ряд по степеням  $z$  в окрестности точки  $|z| = \infty$  и сопоставить это разложение с выражением (16). Учитывая указанные выше соотношения и выполняя необходимые вычисления, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} D_2 + (A_0 - B_0)/2 &= A_0, & D_1 - (a_0 + b_0)D_2/2 + (A_1 - B_1)/2 &= A_1, \\ D_0 - (a_0 + b_0)D_1/2 - (a_0 - b_0)^2 D_2/8 + (A_2 - B_2)/2 &= A_2, \\ -C_1 - (a_0 + b_0)D_0/2 - (a_0 - b_0)^2 D_1/2 + (A_3 - B_3)/2 &= A_3, \\ (a_0 + b_0)C_1/2 - C_2 - (a_0 - b_0)^2 D_0/8 &= 0, & D_n &= 0, \quad n \geq 3, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a_0)(t-b_0)}}, \quad C_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0}^{b_0} \frac{t f(t) dt}{\sqrt{(t-a_0)(t-b_0)}}.$$

Последние два уравнения в (17) позволяют определить параметры  $a_0, b_0$ .

В формулы (14) и уравнения (17) входят неизвестные напряжения в зоне предразрушения. Условием, определяющим неизвестные напряжения в связях между берегами зоны предразрушения в нулевом приближении, является дополнительное соотношение (7). С помощью решения (14) находим раскрытие противоположных берегов зоны предразрушения

$$2i\mu \frac{\partial}{\partial x} [v_0^+(x, 0) - v_0^-(x, 0) - i(u_0^+(x, 0) - u_0^-(x, 0))] = (1 + \varkappa_0)[\Phi^+(x) - \Phi^-(x)] \quad (18)$$

( $\mu$  — модуль сдвига материала полосы;  $\varkappa_0 = 3 - 4\nu$ ; у комплексного потенциала  $\Phi^{(0)}(z)$  верхний индекс 0 опущен).

Используя формулы Сохоцкого — Племеля [4], с учетом (14) находим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \sqrt{(x-a_0)(x-b_0)} \left( \frac{1}{\pi i} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a_0)(t-b_0)}(t-x)} + 2P_n(x) \right). \quad (19)$$

Подставив выражение (19) в правую часть уравнения (18), с учетом соотношения (7) после ряда преобразований получаем комплексное нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} -\frac{i(1 + \varkappa_0)}{2\mu} \sqrt{(b_0 - x)(x - a_0)} \left( -\frac{1}{\pi} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(b_0 - t)(t - a_0)}(t - x)} + 2P_n(x) \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} [C(x, \sigma^0)(q_y^{(0)}(x) - iq_{xy}^{(0)}(x))]. \quad (20) \end{aligned}$$

В случае чистого изгиба (см. рис. 1, а) и при изгибе полосы под действием равномерно распределенной нагрузки (см. рис. 1, б) вследствие симметрии нагрузки имеем  $q_{xy}^{(0)}(x) = 0$ . При изгибе консоли (см. рис. 1, в) в связях между берегами возникают нормальные  $q_y^{(0)}$  и касательные  $q_{xy}^{(0)}$  усилия.

В общем случае, отделяя в (20) действительные и мнимые части, получим систему нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений относительно  $q_y^{(0)}(x)$  и  $q_{xy}^{(0)}(x)$  с ядром типа ядра Коши. Для решения этих уравнений можно использовать коллокационную схему с аппроксимацией неизвестных функций. С помощью квадратурных

формул типа формул Гаусса интегралы в (17) и (20) заменяются конечными суммами, а производные в правой части уравнения (20) — конечно-разностными аппроксимациями. В результате каждое интегродифференциальное уравнение сводится к системе алгебраических уравнений относительно приближенных значений  $q_y^{(0)}(x)$  и  $q_{xy}^{(0)}(x)$  в узловых точках. Поскольку размер зоны предразрушения даже в частном случае линейно-упругих связей неизвестен, полученные алгебраические системы уравнений оказываются нелинейными. Для решения этих систем уравнений в случае линейных связей используется метод последовательных приближений [5]. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в зоне предразрушения используется также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [6]. Предполагается, что закон деформирования межчастичных связей (сил сцепления) является линейным:  $V \leq V_*$ . Последующие итерации выполняются в случае, когда  $V(x) > V_*$ . Для вычисления таких итераций в каждом приближении решается система уравнений для связей с эффективной податливостью, являющейся переменной вдоль зоны предразрушения и зависящей от модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге расчета. Эффективная податливость определяется аналогично текущему модулю в методе переменных параметров упругости [7]. Предполагается, что процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия в зоне предразрушения, полученные на двух последовательных итерациях, будут различаться незначительно. В каждом приближении алгебраическая система решалась численно методом Гаусса с выбором главного элемента.

Построим решение задачи в первом приближении. При наличии объемных сил решение плоской задачи будем искать в виде

$$N_x^* = N_{x_*}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}, \quad N_y^* = N_{y_*}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}, \quad N_{xy}^* = N_{xy_*}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)},$$

где  $N_{x_*}^{(1)}, N_{y_*}^{(1)}, N_{xy_*}^{(1)}$  — частное решение уравнений плоской теории упругости при наличии объемной силы (4);  $N_{x_1}^{(1)}, N_{y_1}^{(1)}, N_{xy_1}^{(1)}$  — общее решение уравнений плоской теории упругости в отсутствие объемных сил.

Для усилий в первом приближении при наличии объемных сил имеем общие представления [8]

$$\frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} = 4 \operatorname{Re} \left( \Phi^{(1)}(z) - \frac{1}{2(1 + \kappa_0)} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right),$$

$$\frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} = 2 \left( \bar{z} \Phi^{(1)'}(z) + \Psi^{(1)}(z) + \frac{1}{2(1 + \kappa_0)} \frac{\partial}{\partial z} (\kappa_0 \bar{F}_1 - \bar{Q}_1) \right).$$

В эти соотношения входят две аналитические функции  $\Phi^{(1)}(z)$  и  $\Psi^{(1)}(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  и две функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$ , представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \bar{z}} = F, \quad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = \bar{F}, \tag{21}$$

где

$$F = X_1 + iY_1 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + i \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}).$$

Для определения комплексных потенциалов  $\Phi^{(1)}(z)$  и  $\Omega^{(1)}(z)$  имеем задачу линейного сопряжения

$$\begin{aligned} [\Phi^{(1)}(x) + \Omega^{(1)}(x)]^+ + [\Phi^{(1)}(x) + \Omega^{(1)}(x)]^- &= 2f_1(x), \\ [\Phi^{(1)}(x) - \Omega^{(1)}(x)]^+ - [\Phi^{(1)}(x) - \Omega^{(1)}(x)]^- &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $a_1 \leq x \leq b_1$  — аффикс точек берегов зоны предразрушения в первом приближении,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_0(t) - \bar{h}(q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)}) + q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)}, \\ f_0(x) &= \frac{1}{1 + \varkappa_0} \operatorname{Re} \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1 + \varkappa_0)} \left( \varkappa_0 \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial z} \right) \quad \text{при } y = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Общее решение краевых задач имеет вид [4]

$$\Phi^{(1)}(z) = \Omega^{(1)}(z) = \frac{\sqrt{(z - a_1)(z - b_1)}}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(t - a_1)(t - b_1)}(t - z)}. \quad (24)$$

Параметры  $a_1$  и  $b_1$ , определяющие размер зоны предразрушения в первом приближении, находятся из условия разрешимости краевой задачи (22):

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(t - a_1)(t - b_1)}} = 0, \quad \int_{a_1}^{b_1} \frac{t f_1(t) dt}{\sqrt{(t - a_1)(t - b_1)}} = 0. \quad (25)$$

В соотношения (24), (25) входят неизвестные напряжения  $q_y^{(1)}(x)$  и  $q_{xy}^{(1)}(x)$  в связях между берегами зоны предразрушения, для нахождения которых используется дополнительное условие (8).

С помощью решения (24) находим производную раскрытия берегов зоны предразрушения в первом приближении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1^+(x, 0) - v_1^-(x, 0) - i(u_1^+(x, 0) - u_1^-(x, 0))] &= \\ &= -\frac{1 + \varkappa_0}{2\pi\mu} \sqrt{(b_1 - x)(x - a_1)} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(b_1 - t)(t - a_1)}(t - x)}. \end{aligned}$$

Для определения усилий  $q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)}$  в связях в первом приближении получаем комплексное нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} -\frac{i(1 + \varkappa_0)}{2\pi\mu} \sqrt{(b_1 - x)(x - a_1)} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(b_1 - t)(t - a_1)}(t - x)} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [C(x, \sigma^1)(q_y^{(1)}(x) - iq_{xy}^{(1)}(x))]. \end{aligned}$$

Для вычисления значения внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, постановку задачи нужно дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия примем критерий критического раскрытия берегов зоны предразрушения

$$|v^+ - v^- - i(u^+ - u^-)| = \delta_{cr},$$

где  $\delta_{cr}$  — характеристика сопротивления материала полосы трещинообразованию. Это дополнительное условие позволяет найти параметры изгибаемой полосы, при которых появляется трещина.

**Численное решение и анализ результатов.** Как и в нулевом приближении, после ряда преобразований получим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $q_y^{(1)}$  и  $q_{xy}^{(1)}$ :

$$-\frac{1 + \varkappa_0}{2\pi\mu} \sqrt{(b_1 - x)(x - a_1)} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1^*(t) dt}{\sqrt{(b_1 - t)(t - a_1)} (t - x)} = \frac{\partial}{\partial x} [C(x, \sigma^1) q_y^{(1)}(x)]; \quad (26)$$

$$-\frac{1 + \varkappa_0}{2\pi\mu} \sqrt{(b_1 - x)(x - a_1)} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1^{**}(t) dt}{\sqrt{(b_1 - t)(t - a_1)} (t - x)} = \frac{\partial}{\partial x} [C(x, \sigma^1) q_{xy}^{(1)}(x)], \quad (27)$$

где  $f_1^*(t) = \text{Re } f_1(t)$ ;  $f_1^{**}(t) = \text{Im } f_1(t)$ .

Как и в нулевом приближении, каждое из уравнений (26), (27) представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром типа ядра Коши и может быть решено только численно.

Для определения распределения напряжений и размера зоны предразрушения необходимо задать закон изменения толщины в полосе. Функцию  $h(x, y)$  разложим в ряд Тейлора в начале координат и в этом разложении удержим два члена:

$$h(x, y) = h_0[1 + \varepsilon(a_*x + b_*y)] \quad (28)$$

( $2h_0$  — толщина полосы в начале координат;  $a_*$ ,  $b_*$  — некоторые коэффициенты). Тогда выражения для составляющих объемной силы в первом приближении принимают вид

$$X_1 = a_*N_x^{(0)} + b_*N_{xy}^{(0)}, \quad Y_1 = a_*N_{xy}^{(0)} + b_*N_y^{(0)}.$$

С помощью формул

$$\frac{N_x^{(0)} + N_y^{(0)}}{2h_0} = 4 \text{Re } \Phi^{(0)}(z), \quad \frac{N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}}{2h_0} = \Phi^{(0)}(z) + \Omega^{(0)}(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi^{(0)'(z)}}$$

определим компоненты усилий  $N_x^{(0)}$ ,  $N_y^{(0)}$ ,  $N_{xy}^{(0)}$ . Затем по формулам (4) найдем функцию  $F = X_1 + iY_1$ .

Проинтегрировав уравнения (21), получаем

$$F_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} F(z, \bar{z}) d\bar{z}, \quad Q_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} \overline{F(z, \bar{z})} dz.$$

По найденным функциям  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$  согласно (23) определим функцию  $f_0(x)$ . Затем по формулам (24), (25) найдем решение краевой задачи в первом приближении.

Интегральные уравнения (26), (27) с дополнительными условиями (25) заменим алгебраическими уравнениями. Сначала в интегральных уравнениях (26) и (27) и в дополнительных условиях (25) все интервалы интегрирования приведем к одному интервалу  $[-1, 1]$ , выполнив замену переменных

$$t = \frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{b_1 - a_1}{2} \tau, \quad x = \frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{b_1 - a_1}{2} \eta.$$

При такой замене переменных левая часть интегродифференциального уравнения (26) принимает вид

$$-\frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \eta^2} \left( \int_{-1}^1 \frac{q_y^{(1)}(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2} (\tau - \eta)} + \int_{-1}^1 \frac{f_y(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2} (\tau - \eta)} \right), \quad (29)$$

соответственно для левой части уравнения (27) получаем

$$-\frac{1}{\pi} \sqrt{1-\eta^2} \left( \int_{-1}^1 \frac{q_{xy}^{(1)}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\eta)} + \int_{-1}^1 \frac{f_{xy}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\eta)} \right). \quad (30)$$

Здесь  $f_y = f_1^* - q_y^{(1)}$ ;  $f_{xy} = f_1^{**} - q_{xy}^{(1)}$ .

Производные, входящие в правые части уравнений (26), (27), в произвольном внутреннем узле заменим конечно-разностной аппроксимацией [9]. При этом учитываются граничные условия  $q_y^{(1)}(a_1) = q_y^{(1)}(b_1) = 0$ ,  $q_{xy}^{(1)}(a_1) = q_{xy}^{(1)}(b_1) = 0$  при  $\eta_0 = \pm 1$  (что соответствует условиям  $v_1^+(a_1, 0) - v_1^-(a_1, 0) = 0$ ,  $v_1^+(b_1, 0) - v_1^-(b_1, 0) = 0$ ,  $u_1^+(a_1, 0) - u_1^-(a_1, 0) = 0$ ,  $u_1^+(b_1, 0) - u_1^-(b_1, 0) = 0$ ). С помощью квадратурной формулы

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\eta)} = \frac{1}{n \sin \theta} \sum_{k=1}^n g_k \sum_{m=0}^{n-1} \cos \theta_k \sin m\theta,$$

где  $\tau = \cos \theta$ ;  $\eta_m = \cos \theta_m$ ;  $\theta_m = \pi(2m-1)/(2n)$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ), интегралы в (29), (30) заменяются конечными суммами, а производные в правых частях уравнений (26), (27) — конечно-разностными аппроксимациями. Используя приведенные выше формулы, каждое интегродифференциальное уравнение можно заменить системой алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции в узловых точках. Соответствующие алгебраические системы имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^n A_{m\nu} (q_{y,\nu}^{(1)} + f_{y,\nu}) = \frac{(1+\varkappa_0)n}{4\mu(b_1-a_1)} [C(x_{m+1}, \sigma^1) q_{y,m+1}^{(1)} - C(x_{m-1}, \sigma^1) q_{y,m+1}^{(1)}] \\ (m = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{\nu=1}^n A_{m\nu} (q_{xy,\nu}^{(1)} + f_{xy,\nu}) = \frac{(1+\varkappa_0)n}{4\mu(b_1-a_1)} [C(x_{m+1}, \sigma^1) q_{xy,m+1}^{(1)} - C(x_{m-1}, \sigma^1) q_{xy,m+1}^{(1)}] \\ (m = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$q_{y,\nu}^{(1)} = q_y^{(1)}(\tau_\nu), \quad q_{xy,\nu}^{(1)} = q_{xy}^{(1)}(\tau_\nu), \quad f_{y,\nu} = f_y(\tau_\nu), \quad f_{xy,\nu} = f_{xy}(\tau_\nu), \\ x_{m+1} = \frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{b_1 - a_1}{2} \eta_{m+1}, \quad A_{m\nu} = -\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_\nu}{2}$$

(в последнем выражении верхний знак соответствует случаю, когда число  $|m-\nu|$  нечетное, а нижний — случаю, когда оно четное).

Выполним алгебраизацию условий разрешимости краевой задачи (25). Отделяя в этих условиях действительные и мнимые части, выполняя замену переменных и используя квадратурную формулу Гаусса, получим условия разрешимости задачи в виде

$$\frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n f_y(\cos \theta_\nu) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^n \tau_\nu f_y(\tau_\nu) = 0, \\ \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n f_{xy}(\cos \theta_\nu) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^n \tau_\nu f_{xy}(\tau_\nu) = 0.$$

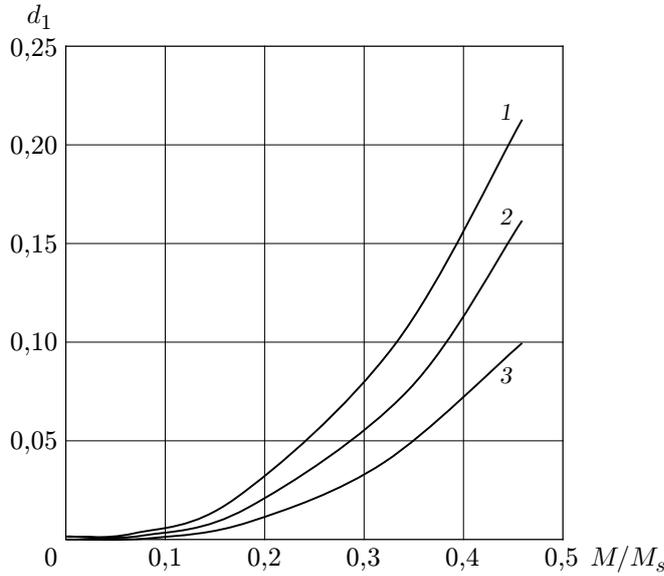


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость длины зоны предразрушения  $d_1$  от безразмерной нагрузки  $M/M_s$  при чистом изгибе полосы:  
 1 —  $h_1/h_0 = 0,5$ ; 2 —  $h_1/h_0 = 0,6$ ; 3 —  $h_1/h_0 = 0,75$

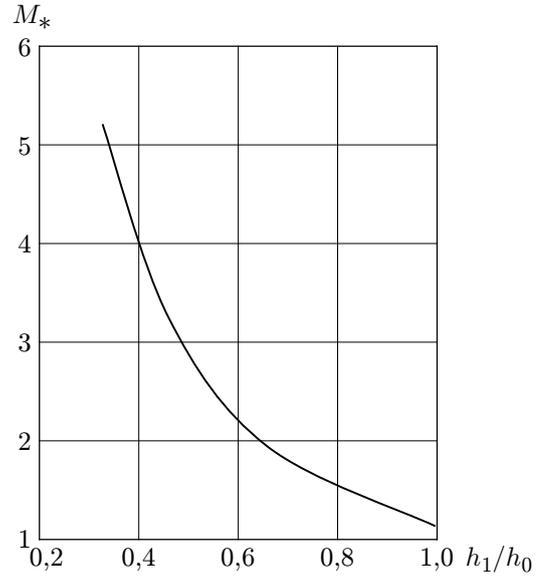


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость безразмерной предельной нагрузки  $M_*$  от относительной толщины полосы  $h_1/h_0$  при чистом изгибе

В результате алгебраизации вместо каждого интегрального уравнения с соответствующими дополнительными условиями получаем  $n+2$  алгебраических уравнения для определения напряжений в узловых точках и размеров зоны предразрушения. О способе решения таких систем сказано выше.

С учетом соотношения (2) предельное условие записывается в виде (при  $x = x_0$ )

$$C(x_0, \sigma(x_0))\sigma(x_0) = \delta_{cr}. \tag{31}$$

Совместное решение полученных уравнений и условия (31) при заданных характеристиках связей позволяет определить критическое значение внешней нагрузки и размер  $l_{cr}$  зоны предразрушения в состоянии предельного равновесия, при которых возникает трещина.

На рис. 2 представлена зависимость длины зоны предразрушения  $d_1 = (b - a)/(2c)$  от безразмерной нагрузки  $M/M_s$  ( $M_s = \sigma_s h_0^2/4$ ;  $\sigma_s$  — предел текучести материала полосы при растяжении) для балки в случае чистого изгиба, толщина которой меняется по закону (28). В расчетах использовались следующие значения параметров:  $\nu = 0,3$ ,  $n = 30$ . На рис. 3 приведена зависимость безразмерной предельной нагрузки

$$M_* = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{M}{h_0 c^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{E \sigma_s \delta_{cr}}}$$

от относительной толщины полосы  $h_1/h_0$ .

Анализ предельно-равновесного состояния полосы переменной толщины, при котором появляется трещина, сводится к параметрическому исследованию полученных алгебраических систем и критерия появления трещины при различных законах деформирования связей, упругих постоянных материала и геометрических характеристиках полосы. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем в каждом приближении определяются усилия в связях и раскрытие берегов зоны предразрушения.

Таким образом, создан эффективный алгоритм решения задач механики разрушения о зарождении трещин в полосе переменной толщины при действии силовой нагрузки, позволяющий единообразно построить решение методом возмущений в каждом приближении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Панасюк В. В.** Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991.
2. **Сох В. N., Marshall D. В.** Concepts for bridged cracks fracture and fatigue // Acta Metall. Material. 1994. V. 42, N 2. P. 341–363.
3. **Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.** Рост трещин по границе соединения материалов // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию со дня рожд. А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 221–238.
4. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
5. **Мирсалимов В. М.** Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.
6. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
7. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51–73.
8. **Угодчиков А. Г.** Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах / А. Г. Угодчиков, М. И. Длугач, А. Е. Степанов. М.: Высш. шк., 1970.
9. **Турчак Л. И.** Основы численных методов. М.: Наука, 1987.

*Поступила в редакцию 20/1 2009 г.*

---