УДК 539.3

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО НЕСЖИМАЕМОГО ТЕЛА

Б. Д. Аннин, В. Д. Бондарь*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
*Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: bond@hydro.nsc.ru

В нелинейной постановке в актуальных переменных исследовано напряженно-деформированное состояние несжимаемого цилиндрического упругого тела при антиплоском деформировании при действии потенциальных сил и поверхностной нагрузки, постоянных вдоль тела. Напряжения выражены через давление и независимые деформации, давление — через силовой и упругий потенциалы, для деформаций (и перемещения) получены нелинейные краевые задачи. Развиты различные методы решения этих задач. Для полученных нелинейных уравнений указан ряд аналитических решений, содержащих свободные параметры, которые могут служить основой при решении частных задач.

Ключевые слова: напряжения, деформации, перемещение, потенциал, нелинейная задача, преобразование Лежандра, плоскость деформаций.

Исследование ряда актуальных проблем упругости приводит к необходимости учета больших деформаций тела и нелинейного поведения материала. В этих условиях линейная теория упругости не обеспечивает требуемой точности и должна быть заменена нелинейной теорией, учитывающей геометрическую и физическую нелинейности.

Рассмотрим антиплоское деформирование изотропного цилиндрического тела при действии потенциальных сил на основе нелинейной модели несжимаемого тела. Определяющими уравнениями этой модели являются уравнения равновесия, закон Мурнагана, условие несжимаемости, зависимость упругого потенциала от базисных инвариантов деформации, выражения инвариантов через компоненты деформации и компонент деформации через перемещение. В переменных актуального состояния x_1, x_2, x_3 ($x_1 = x$, $x_2 = y$ — поперечные координаты; x_3 — продольная координата) эти соотношения имеют вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(P_{kl} - V\delta_{kl}) = 0, \qquad P_{kl} = -q_*\delta_{kl} + (\delta_{kn} - 2E_{kn})\frac{\partial U}{\partial E_{ln}}, \qquad U = U(E, E_2, E_3),$$
$$E = E_{nn}, \qquad 2E_2 = E_{nn}E_{mm} - E_{nm}E_{mn}, \qquad E_3 = |E_{kl}|, \tag{1}$$
$$2E_{kl} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_n}{\partial x_k}\frac{\partial u_n}{\partial x_l}, \qquad E - 2E_2 + 4E_3 = 0,$$

где q_*, U, V — лагранжев множитель, упругий и силовой потенциалы; E, E_2, E_3 — инварианты деформации; u_k, P_{kl}, E_{kl} — компоненты перемещения, напряжений Коши и деформаций Альманси; δ_{kl} — символ Кронекера (индексы принимают значения 1, 2, 3, по повторяющимся индексам проводится суммирование).

Работа выполнена в рамках Программы специализированных отделений РАН № 4.11.2 “Разработка моделей сложных нелинейных сред и эффективных методов численной реализации”.

Будем считать, что для цилиндра сечения S с контуром L, подверженного антиплоской деформации вдоль тела [2], заданы упругий и силовой потенциалы, боковая нагрузка p_k и продольная составляющая P_3 результирующей торцевой нагрузки:

$$u_1 = u_2 = 0, \qquad u_3 = w(x, y), \qquad U = U(E, E_2, E_3), \qquad V = V(x, y); \tag{2}$$

$$p_k\big|_L = p_k(x, y), \qquad P_3 = \int\limits_S p_3\, dS. \tag{3}$$

Согласно (1), (2) деформации нелинейно представляются через перемещение (геометрическая нелинейность) и могут быть выражены через две независимые компоненты E_{31}, E_{32}, связанные между собой дифференциальным условием совместности

$$\frac{\partial E_{32}}{\partial x} - \frac{\partial E_{31}}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Инварианты деформации неположительны, выражаются через линейный инвариант E и удовлетворяют условию несжимаемости (что оправдывает использование модели несжимаемого тела). Упругий потенциал выражается через линейный инвариант в виде $U = f(E)$, поэтому из закона Мурнагана следует квазилинейная зависимость напряжений от деформаций (физическая нелинейность) и давления q, допускающая представление напряжений через давление и независимые деформации:

$$\begin{gathered} P_{11} = -q + 4f'(E)E_{31}^2, \qquad P_{22} = -q + 4f'(E)E_{32}^2, \qquad P_{33} = -q, \\ P_{12} = 4f'(E)E_{31}E_{32}, \qquad P_{31} = -2f'(E)E_{31}, \qquad P_{32} = -2f'(E)E_{32}, \\ q = q_* - f'(E), \qquad E = -2(E_{31}^2 + E_{32}^2). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь штрих обозначает производную функции $f(E)$ по аргументу.

В силу (1) имеют место формулы $2E_{31} = \partial w/\partial x$, $2E_{32} = \partial w/\partial y$, следовательно, перемещение выражается через деформации в виде

$$w = 2 \int\limits_{(x_*, y_*)}^{(x,y)} (E_{31}\, dx + E_{32}\, dy) + w_*, \qquad w_* = w(x_*, y_*), \quad (x_*, y_*) \in L, \tag{6}$$

где интеграл в силу (4) не зависит от пути интегрирования, а аддитивная постоянная определена задаваемым перемещением в граничной точке. Тем самым напряжения (5) и перемещение (6) определяются давлением и независимыми деформациями.

В первом и втором уравнениях равновесия в (1) давление выражается через силовой и упругий потенциалы интегралом уравнений, постоянная интегрирования в котором вычисляется по интегральному условию в (3):

$$q = h - V - f, \qquad h = \frac{1}{S}\Big(\int (V + f)\, dS - P_3\Big). \tag{7}$$

В частности, в случае, когда осевая составляющая результирующей торцевой нагрузки равна нулю, эта постоянная равна среднему значению суммы силового и упругого потенциалов в сечении тела, а давление равно отклонению суммы потенциалов от ее среднего значения.

Независимые деформации определяются нелинейной системой уравнений, состоящей из третьего уравнения равновесия в (1) и условия совместности деформаций (4):

$$\frac{\partial\,(f'E_{31})}{\partial x} + \frac{\partial\,(f'E_{32})}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial E_{32}}{\partial x} - \frac{\partial E_{31}}{\partial y} = 0, \tag{8}$$

$$f' = f'(E), \qquad E = -2(E_{31}^2 + E_{32}^2).$$

Условие $f''/f' \leqslant 0$, достаточное для эллиптичности этой системы, будем считать выполненным, поэтому для системы (8) корректна краевая задача с заданными граничными деформациями.

Граничные условия в (3), записанные в естественном базисе контура L (нормали n, касательной t и бинормали b) [3]:

$$\begin{gathered} p_n = V + f - h + 4f'e_n^2, \qquad p_t = 4f'e_ne_t, \qquad p_b = -2f'e_n, \\ e_n = E_{31}n_1 + E_{32}n_2, \qquad e_t = -E_{31}n_2 + E_{32}n_1, \\ E = -2(e_n^2 + e_t^2) \qquad \text{на} \quad L, \end{gathered} \tag{9}$$

определяют ограничение на нагрузку (первое равенство в (9)) и граничные значения независимых деформаций

$$\begin{gathered} E_{31}\big|_L = e_nn_1 - e_tn_2, \qquad E_{32}\big|_L = e_nn_2 + e_tn_1, \\ e_t = p_t/(2p_b), \qquad p_b + 2e_nf'(E) = 0, \qquad E = -2e_n^2 - p_t^2/(2p_b^2). \end{gathered} \tag{10}$$

Из соотношений (7), (8) и (10) следует, что потенциальные силы оказывают влияние на давление и не влияют на деформации. Следовательно, согласно (5) они влияют на напряжения растяжения-сжатия и не влияют на напряжения сдвига.

В цилиндрических координатах s, v, z (z изменяется вдоль тела, s, v — в плоскости поперечного сечения) напряжения выражаются через давление q и независимые деформации E_{zs}, E_{zv}:

$$\begin{gathered} P_{ss} = -q + 4f'E_{zs}^2, \qquad P_{vv} = -q + 4f'E_{zv}^2, \qquad P_{zz} = -q, \qquad P_{sv} = 4f'E_{zs}E_{zv}, \\ P_{zs} = -2f'E_{zs}, \qquad P_{zv} = -2f'E_{zv}, \qquad f' = f'(E), \qquad E = -2(E_{zs}^2 + E_{zv}^2). \end{gathered} \tag{11}$$

В (11) давление определяется формулой (7), а независимые деформации являются решением краевой задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial(sf'E_{zs})}{\partial s} + \frac{\partial(f'E_{zv})}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial(sE_{zv})}{\partial s} - \frac{\partial E_{zs}}{\partial v} = 0, \\ f' = f'(E), \qquad E = -2(E_{zs}^2 + E_{zv}^2), \\ E_{zs} = e_nn_s - e_tn_v, \qquad E_{zv} = e_nn_v + e_tn_s \qquad \text{на} \quad L, \end{gathered} \tag{12}$$

где e_n, e_t определены в (10). В ряде случаев эта система уравнений допускает аналитические решения.

В случае, когда деформации зависят только от полярного радиуса: $E_{zs}(s)$, $E_{zv}(s)$, согласно (12) имеем также зависимости $E(s)$, $f'(s)$, и уравнения (12) принимают вид

$$\frac{d(sf'E_{zs})}{ds} = 0, \qquad \frac{d(sE_{zv})}{ds} = 0.$$

При произвольном упругом потенциале эти уравнения имеют решение с двумя произвольными постоянными:

$$sE_{zv} = A, \qquad sf'E_{zs} = C, \qquad A = \mathrm{const}, \qquad C = \mathrm{const}\,. \tag{13}$$

При квадратичном потенциале Ривлина — Сондерса, моделирующем большие упругие деформации резиноподобных материалов [2]:

$$\begin{gathered} f = aE^2 - bE + c, \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad E < 0, \\ f' = -b(1 + 4k(E_{zs}^2 + E_{zv}^2)), \qquad f'' = 2a, \qquad k = a/b, \end{gathered} \tag{14}$$

компонента E_{zv} определяется первым равенством в (13), а компонента E_{zs} — кубическим уравнением, имеющим одно вещественное решение [4]:

$$E_{zs}^3 + mE_{zs} + h = 0, \quad m = \frac{s^2 + 4kA^2}{4ks^2}, \quad h = \frac{B}{4ks} \quad \Big(C = bB, \quad H = \frac{m^3}{27} + \frac{h^2}{4} > 0\Big),$$
$$E_{zs} = \sqrt[3]{-h/2 + \sqrt{H}} + \sqrt[3]{-h/2 - \sqrt{H}}, \qquad E_{zv} = A/s. \tag{15}$$

Для потенциала Ривлина — Сондерса выполняется условие эллиптичности $f''/f' \leqslant 0$.

При слабой физической нелинейности, когда в потенциале (14) коэффициент при квадратичном члене существенно меньше коэффициента при линейном ($a/b = k \ll 1$), независимые деформации (15) в линейном по k приближении равны

$$E_{zv} = \frac{A}{s}, \quad E_{zs} = -\frac{B}{s}\Big(1 - 4k\,\frac{A^2 + B^2}{s^2}\Big), \quad A = \text{const}, \quad B = \text{const}, \quad k \ll 1.$$

В случае, когда деформации зависят только от полярного угла: $E_{zs}(v)$, $E_{zv}(v)$, согласно (12) имеем также зависимости $E(v)$, $f'(v)$, и система (12) сводится к уравнению для одной компоненты E_{zs}:

$$E_{zv} = \frac{dE_{zs}}{dv}, \quad f'E_{zs} + \frac{d}{dv}\Big(f'\,\frac{dE_{zs}}{dv}\Big) = 0, \quad f' = f'(E), \quad E = -2\Big(E_{zs}^2 + \Big(\frac{dE_{zs}}{dv}\Big)^2\Big).$$

Для квадратичного упругого потенциала (14) это уравнение имеет вид

$$\Big[1 + 4k\Big(E_{zs}^2 + 3\Big(\frac{dE_{zs}}{dv}\Big)^2\Big)\Big]\Big(E_{zs} + \frac{d^2E_{zs}}{dv^2}\Big) = 0$$

и сводится к равенству нулю второго сомножителя. Из вида общего решения этого уравнения следует, что независимые деформации являются периодическими функциями полярного угла с двумя произвольными постоянными, имеющими смысл амплитуды и начальной фазы:

$$E_{zs} = C\sin(v + D), \qquad E_{zv} = C\cos(v + D), \qquad C = \text{const}, \qquad D = \text{const}.$$

Система уравнений для деформаций (8) с учетом (6) может быть записана в виде одного уравнения относительно продольного смещения $w = w(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[f'(E)\,\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[f'(E)\,\frac{\partial w}{\partial y}\Big] = 0, \qquad E = -\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]. \tag{16}$$

Вместе с перемещением (6) на границе

$$w\big|_L = 2\int_0^s \big(E_{31}(s)x'(s) + E_{32}(s)y'(s)\big)\,ds + w_*$$

уравнение (16) составляет краевую задачу для перемещения. Представим это нелинейное уравнение в виде линейного уравнения [5. С. 46], применив преобразование Лежандра к функции $w = w(x, y)$, т. е. введем новые независимые переменные ξ, η и новую неизвестную функцию $\Phi = \Phi(\xi, \eta)$ по формулам

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \eta = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \Phi = x\xi + y\eta - w. \tag{17}$$

Предположим, что якобиан преобразования (17)

$$\Delta \equiv \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\Big)^2$$

не равен нулю. Обозначим через r и θ полярные координаты в плоскости (ξ, η). Тогда для функции $\Phi = \Phi(r, \theta)$ получим линейное уравнение

$$g(r) r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + r\,\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0, \tag{18}$$

где

$$g(r) = (1 - r^2 f''/f')^{-1}, \qquad f = f(E), \qquad E = -r^2/2. \tag{19}$$

Условие $r^2 f''/f' < 1$ обеспечивает эллиптичность уравнения (18). Имеют место формулы обратного преобразования

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\sin\theta, \qquad y = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\cos\theta, \qquad w = r\,\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Phi. \tag{20}$$

Формулы (20) для решения $\Phi(r, \theta)$ уравнения (18) определяют в параметрической форме перемещение в физической плоскости (x, y).

Если в уравнении (18) положить

$$\Phi_m(r, \theta) = Z_m(r)\,\mathrm{e}^{im\lambda\theta}, \qquad i^2 = -1, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \lambda = \mathrm{const}, \tag{21}$$

то функция $Z_m(r)$ будет удовлетворять уравнению

$$g(r) r^2\,\frac{d^2 Z_m(r)}{dr^2} + r\,\frac{dZ_m(r)}{dr} - \lambda^2 m^2 Z_m(r) = 0. \tag{22}$$

Зная решение этого уравнения и учитывая выражение (21), можно строить классы частных решений уравнения (18) вида

$$\sum_m Z_m(r)(a_m \cos(m\lambda\theta) + b_m \sin(m\lambda\theta)),$$

где a_m, b_m — произвольные постоянные.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Пусть $\lambda = 1$, $m = 1$, $f = A\ln(1 - 2\alpha E)$, где $A > 0$, $\alpha > 0$ — постоянные, $E < 0$. Тогда условие эллиптичности $r^2 f''/f' < 1$ принимает вид $\alpha r^2 < 1$. В этом случае согласно (19)

$$g(r) = \frac{1 + \alpha r^2}{1 - \alpha r^2}$$

и уравнение (22) для функции $Z_1(r) = Z(r)$ принимает вид

$$(1 + \alpha r^2) r^2\,\frac{d^2 Z(r)}{dr^2} + (1 - \alpha r^2) r\,\frac{dZ(r)}{dr} - (1 - \alpha r^2) Z(r) = 0. \tag{23}$$

Частными решениями этого уравнения являются функции

$$Z_1 = r, \qquad Z_2 = 2\alpha r \ln r - 1/r,$$

следовательно, общее решение уравнения (23) имеет вид

$$Z_m(r) = C_1 Z_1 + C_2 Z_2 = r[C_1 + C_2(2\alpha \ln r - 1/r^2)], \qquad C_1 = \mathrm{const}, \quad C_2 = \mathrm{const}.$$

Пример 2. Пусть $f = AE^{2k} + B$, где A, B, k — положительные постоянные (причем $k = 1, 2, \ldots$), $E < 0$. Тогда $r^2 f''/f' = -2(2k - 1)$ и условие эллиптичности $r^2 f''/f' < 1$ выполнено. В данном случае в соответствии с (19)

$$g(r) = (4k - 1)^{-1} = n^{-1} \qquad (n = 4k - 1),$$

поэтому уравнение (22) принимает вид

$$r^2 \frac{d^2 Z_m(r)}{dr^2} + nr \frac{dZ_m(r)}{dr} - n\lambda^2 m^2 Z_m(r) = 0.$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$Z_m(r) = C_1 r^{n_1} + C_2 r^{n_2},$$

$$n_1 = (1-n)/2 + \sqrt{(1-n)^2/4 + n\lambda^2 m^2}, \qquad n_2 = (1-n)/2 - \sqrt{(1-n)^2/4 + n\lambda^2 m^2},$$

$$C_1 = \mathrm{const}, \qquad C_2 = \mathrm{const}\,.$$

Уравнения для независимых деформаций (8) при квадратичном потенциале (14) можно исследовать также с использованием потенциалов деформации. Перейдем от деформаций E_{31}, E_{32} к потенциалам (перемещению w и функции деформации v) согласно формулам

$$2E_{31} f' = -b \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad 2E_{32} f' = b \frac{\partial v}{\partial x}; \tag{24}$$

$$2E_{31} = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2E_{32} = \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{25}$$

Тогда в системе (8) первое уравнение будет удовлетворено в силу (24), а второе — в силу (25). Исключив из (24), (25) деформации, получим нелинейные зависимости между потенциалами

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{f'_*} \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{f'_*} \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f'_* = -\frac{f'}{b} = 1 + k\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]. \tag{26}$$

С помощью дифференцирования из (26) можно исключить один из потенциалов, а для другого получить дифференциальное уравнение второго порядка. В частности, уравнение для перемещения имеет вид (16).

В комплексных переменных плоскости (x, y)

$$z = x + iy, \qquad \bar z = x - iy, \qquad \partial_x = \partial_z + \partial_{\bar z}, \qquad \partial_y = i(\partial_z - \partial_{\bar z})$$

соотношения (24)–(26) имеют вид

$$\begin{gathered} E^{31} = E_{31} + iE_{32} = g\,\mathrm{e}^{ih}, \qquad E^{31} f'_* = -i \frac{\partial v}{\partial \bar z}, \qquad E^{31} = \frac{\partial w}{\partial \bar z}, \\ \frac{\partial w}{\partial \bar z} = -\frac{i}{f'_*} \frac{\partial v}{\partial \bar z}, \qquad f'_* = 1 + 4k \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar z} = 1 + 4k E^{31} \bar E^{31} = 1 + 4kg^2, \end{gathered} \tag{27}$$

где g, h — полярные координаты; E^{31}, $\bar E^{31}$ — комплексные координаты в плоскости деформаций (E_{31}, E_{32}).

Нелинейность четвертого уравнения в (27) обусловлена величиной f'_*, зависящей от полярного радиуса g. Для того чтобы получить линейное уравнение, перейдем от переменных z, $\bar z$ к переменным g, h $(E^{31}, \bar E^{31})$:

$$g = \sqrt{E^{31} \bar E^{31}}, \qquad h = \frac{1}{2i} \ln \frac{E^{31}}{\bar E^{31}}.$$

Для этого, полагая $w = w(z, \bar z)$, $v = v(z, \bar z)$ и используя (27), рассмотрим выражение

$$\frac{1}{2}\,dw + \frac{i}{2f'_*}\,dv = \frac{dz}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{i}{f'_*} \frac{\partial v}{\partial z}\Big) + \frac{d\bar z}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial \bar z} + \frac{i}{f'_*} \frac{\partial v}{\partial \bar z}\Big) = \bar E^{31}\,dz = g\,\mathrm{e}^{-ih}\,dz,$$

откуда (при $g \neq 0$) находим

$$dz = \frac{\mathrm{e}^{ih}}{2g}\Big(dw + \frac{i}{f'_*}\,dv\Big). \tag{28}$$

Полагая далее w, v, z функциями g, h, из (28) найдем

$$\frac{\partial z}{\partial g} = \frac{\mathrm{e}^{ih}}{2g}\Big(\frac{\partial w}{\partial g} + \frac{i}{f'_*}\,\frac{\partial v}{\partial g}\Big), \qquad \frac{\partial z}{\partial h} = \frac{\mathrm{e}^{ih}}{2g}\Big(\frac{\partial w}{\partial h} + \frac{i}{f'_*}\,\frac{\partial v}{\partial h}\Big). \tag{29}$$

Исключив в этих равенствах z, приравняв смешанные производные $\partial^2 z/\partial g\,\partial h$ и $\partial^2 z/\partial h\,\partial g$, отделив в полученном равенстве действительные и мнимые части, с учетом (27) получим линейные уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial h} = \frac{g}{1+4kg^2}\,\frac{\partial v}{\partial g}, \qquad \frac{\partial v}{\partial h} = -\frac{g(1+4kg^2)^2}{1+12kg^2}\,\frac{\partial w}{\partial g}. \tag{30}$$

При слабой физической нелинейности ($k \ll 1$) коэффициенты при производных в правых частях уравнений (30) в линейном по k приближении различаются только знаком:

$$\frac{\partial w}{\partial h} = g(1-4kg^2)\,\frac{\partial v}{\partial g}, \qquad \frac{\partial v}{\partial h} = -g(1-4kg^2)\,\frac{\partial w}{\partial g}. \tag{31}$$

Заменой переменной g на t:

$$t = \frac{1}{2}\,\ln\frac{1-4kg^2}{g^2} \qquad (g = \mathrm{e}^{-3t}(\mathrm{e}^{2t} - 2k)) \tag{32}$$

уравнения (31) преобразуются к уравнениям Коши — Римана

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial h}, \qquad \frac{\partial w}{\partial h} = -\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{33}$$

Если в плоскости (t,h) ввести комплексную функцию u комплексных переменных Z, $\bar{Z}$:

$$\begin{gathered} u = w(Z,\bar{Z}) + iv(Z,\bar{Z}), \qquad Z = t+ih, \quad \bar{Z} = t-ih, \\ 2\,\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial t} - i\,\frac{\partial}{\partial h}, \qquad 2\,\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} = \frac{\partial}{\partial t} + i\,\frac{\partial}{\partial h}, \end{gathered} \tag{34}$$

то уравнения (33) можно записать в комплексной форме

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{Z}} = 0.$$

Отсюда в результате интегрирования находим u как произвольную функцию W переменной Z (комплексный потенциал), а также w и v как действительную и мнимую части функции W:

$$u = W(Z), \qquad w = \operatorname{Re} W, \qquad v = \operatorname{Im} W. \tag{35}$$

Задание контура L уравнениями $x = x(s)$, $y = y(s)$ (s — дуга L) и граничных условий для деформаций $E_{31}(s)$, $E_{32}(s)$ (см. (10)) определяет согласно (6) граничное смещение

$$w(s) = 2\int\limits_{s_*}^{s} \big[E_{31}(s)x'(s) + E_{32}(s)y'(s)\big]\,ds + w_*, \tag{36}$$

а также (в соответствии с (27), (32), (34)) величины $g(s)$, $h(s)$, $t(s)$, $Z(s)$, $\bar{Z}(s)$. Используя представление (35) перемещения через комплексный потенциал и его значение (36) на границе области, получим стандартную краевую задачу для потенциала [6]

$$\operatorname{Re} W(Z)\big|_L = w(s). \tag{37}$$

Найденный из (37) потенциал $W(Z)$ определяет перемещение (35) как функцию Z, $\bar{Z}$: $w(Z,\bar{Z}) = (W(Z) + \bar{W}(\bar{Z}))/2$, которую можно записать в переменных z, $\bar{z}$. Для этого с учетом (34), (35) и соотношений

$$g = \mathrm{e}^{-t}(1 - 2k\,\mathrm{e}^{-2t}), \qquad f'_* = 1 + 4k\,\mathrm{e}^{-2t}, \qquad t = \frac{Z+\bar{Z}}{2}, \qquad h = \frac{Z-\bar{Z}}{2i} \qquad (k \ll 1)$$

равенство (28) представим в виде

$$dz = (1/2)\,\mathrm{e}^{t+ih}(1 + 2k\,\mathrm{e}^{-2t})[(1 - 2k\,\mathrm{e}^{-2t})\,dW + 2k\,\mathrm{e}^{-2t}\,d\bar{W}] =$$
$$= (1/2)\,\mathrm{e}^{Z}\,W'(Z)\,dZ + k\,\mathrm{e}^{-\bar{Z}}\,\bar{W}'(\bar{Z})\,d\bar{Z}.$$

В результате интегрирования получим

$$z = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{Z}\,W'(Z)\,dZ + k\int \mathrm{e}^{-\bar{Z}}\,\bar{W}'(\bar{Z})\,d\bar{Z} + D, \qquad D = \mathrm{const}\,. \tag{38}$$

Добавив к (38) комплексно-сопряженное равенство, получим зависимости

$$z = z(Z,\bar{Z}), \qquad \bar{z} = \bar{z}(Z,\bar{Z}). \tag{39}$$

Якобиан этого преобразования, вычисленный с учетом соотношений (32), (34), отличен от нуля:

$$\frac{\partial(z,\bar{z})}{\partial(Z,\bar{Z})} = \frac{\partial(z,\bar{z})}{\partial(g,h)}\,\frac{\partial(g,h)}{\partial(t,h)}\,\frac{\partial(t,h)}{\partial(Z,\bar{Z})} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2i(1 + 6k\,\mathrm{e}^{-2t})}\,\frac{\partial(z,\bar{z})}{\partial(g,h)} \neq 0,$$

так как согласно (29), (30) и (27)

$$\frac{\partial(z,\bar{z})}{\partial(g,h)} = \frac{i}{2g^2 f'_*}\Big(\frac{\partial w}{\partial h}\,\frac{\partial v}{\partial g} - \frac{\partial w}{\partial g}\,\frac{\partial v}{\partial h}\Big) = \frac{i}{2g^2}\Big[\frac{1}{g}\Big(\frac{\partial w}{\partial h}\Big)^2 + g\,\frac{1 + 4kg^2}{1 + 12kg^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial g}\Big)^2\Big] \neq 0.$$

Следовательно, преобразование (39) может быть обращено: $Z = Z(z,\bar{z})$, $\bar{Z} = \bar{Z}(z,\bar{z})$. Найденную функцию $w(Z,\bar{Z})$ можно представить в виде $w(Z(z,\bar{z}),\bar{Z}(z,\bar{z})) = w(z,\bar{z})$. Эта функция определяет перемещение в физической плоскости, а также деформации и напряжения.

Можно рассмотреть обратную задачу, в которой задается комплексный потенциал (а также определяемые им перемещение, деформации и напряжения) и находится нагрузка, соответствующая частной задаче.

Пример 3. Пусть $W = 2AZ$, где $A = B + iC$. Тогда $W' = 2A$ и соотношения (39) согласно (38) имеют вид

$$z = A\,\mathrm{e}^{Z} - 2k\bar{A}\,\mathrm{e}^{-\bar{Z}}, \qquad \bar{z} = \bar{A}\,\mathrm{e}^{\bar{Z}} - 2kA\,\mathrm{e}^{-Z}\,.$$

Исключив из этих соотношений $\bar{Z}$, для Z получим уравнение

$$\bar{z}A\,\mathrm{e}^{2Z} + [2k(A^2 - \bar{A}^2) - z\bar{z}]\,\mathrm{e}^{Z} - 2kzA = 0.$$

Найдем линейное по параметру $k \ll 1$ решение, полагая $\mathrm{e}^{Z} = f + kg$ ($f \neq 0$). Подставляя e^{Z} в последнее уравнение и приравнивая к нулю коэффициенты при нулевой и первой степенях параметра, получим уравнения

$$Af - z = 0, \qquad 2\bar{z}Afg + 2(A^2 - \bar{A}^2)f - z\bar{z}g - 2zA = 0,$$

определяющие это приближение. Таким образом,

$$\mathrm{e}^{Z} = \frac{z}{A}\Big(1 + \frac{2k\bar{A}^2}{z\bar{z}}\Big), \qquad \mathrm{e}^{\bar{Z}} = \frac{\bar{z}}{\bar{A}}\Big(1 + \frac{2kA^2}{z\bar{z}}\Big).$$

Отсюда следует, что

$$Z = \ln\frac{z}{A} + \frac{2k\bar{A}^2}{z\bar{z}}, \qquad \bar{Z} = \ln\frac{\bar{z}}{\bar{A}} + \frac{2kA^2}{z\bar{z}}$$

и перемещение (35) имеет вид

$$w = A\ln(\bar{A}z) + \bar{A}\ln(A\bar{z}) - (A+\bar{A})\Big[\ln(A\bar{A}) - \frac{2kA\bar{A}}{z\bar{z}}\Big].$$

Пример 4. Пусть $W = 4F\,\mathrm{e}^Z$, где $F = G + iH = \mathrm{const}$. Тогда $W' = 4F\,\mathrm{e}^Z$ и равенства (39) в соответствии с (38) (где положено $D = 0$) принимают вид

$$z = F\,\mathrm{e}^{2Z} + 4k\bar{F}\bar{Z}, \qquad \bar{z} = \bar{F}\,\mathrm{e}^{2\bar{Z}} + 4kFZ.$$

Обращая эти зависимости, в линейном по k приближении получим

$$Z = \ln\sqrt{\frac{z}{F}} - k\,\frac{\bar{F}}{z}\,\ln\frac{\bar{z}}{\bar{F}}, \qquad \bar{Z} = \ln\sqrt{\frac{\bar{z}}{\bar{F}}} - k\,\frac{F}{\bar{z}}\,\ln\frac{z}{F}.$$

Следовательно, перемещение (35) имеет вид

$$w = 2[\sqrt{Fz}\,(\bar{F}/\bar{z})^{k\bar{F}/z} + \sqrt{\bar{F}\bar{z}}\,(F/z)^{kF/\bar{z}}].$$

В примерах 3, 4 перемещение зависит от двух вещественных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Снеддон И. Н., Берри Д. С.** Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961.
2. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
3. **Бондарь В. Д.** Моделирование нелинейного антиплоского деформирования цилиндрического тела // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 4. С. 98–108.
4. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
5. **Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.** Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
6. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 26/XII 2005 г.