УДК 539.375

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И ТРЕЩИНОЙ

Е. М. Рудой

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: rem@hydro.nsc.ru

Рассматривается модель трехмерного упругого тела, содержащего жесткое включение и трещину, расположенную на границе между включением и телом. На трещине задаются естественные краевые условия. Для произвольного достаточно гладкого возмущения области выведена производная функционала энергии по параметру возмущения, в частности, получена формула Гриффитса.

Ключевые слова: жесткое включение, трещина, производная функционала энергии, критерий Гриффитса.

Введение. В данной работе рассматривается трехмерная модель упругого тела, содержащего жесткое включение и трещину. Под жестким включением понимается часть тела, деформация которой равна нулю (при этом перемещения могут быть ненулевыми). Трещина расположена на границе между включением и телом. Система находится в равновесии под действием объемной силы. Считается, что на внешней границе тело жестко закреплено, а берега трещины свободны от напряжений.

В настоящей работе выводится производная функционала энергии по параметру возмущения области. В частности, рассматривается возмущение области, соответствующее квазистатическому росту трещины вдоль заданной поверхности. В этом случае производная функционала энергии определяется формулой Гриффитса, которая используется в механике разрушения [1, 2].

Возможность дифференцирования функционалов энергии по параметру возмущения области исследовалась во многих работах. Линейные краевые задачи в негладких областях рассматривались в [3–5]. В работах [6–15] изучались вариации решений, коэффициентов интенсивности напряжений, а также других функций геометрических и механических параметров при изменении формы трещины или при ее росте. В указанных работах, как правило, рассматривались однородные тела.

В настоящей работе рассматривается существенно неоднородное тело — тело с жестким включением и трещиной. Задачи теории упругости для тел с трещинами и жесткими включениями исследовались в работах [16–22]: в [16] рассматривалась двумерная задача о жестком круговом включении, на границе которого расположена трещина, и с использованием метода комплексной переменной выведена формула Гриффитса; в [17] исследовалось

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (грант № МК-222.2010.1) и в рамках Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (код проекта ГК П597).

влияние жесткого включения на распространение трещины в бесконечном теле на основе критерия Ирвина; в [18] рассматривалась задача теории упругости для двух соединенных полупространств с круглой плоской трещиной в плоскости соединения, на основе критерия Гриффитса найдена величина разрушающих усилий; в [19–22] исследовалось взаимодействие в упругих телах жестких включений с расположенными вблизи них трещинами.

Работы [23–25] посвящены изучению задач теории упругости для неоднородных тел с трещинами. В [26–30] исследовалась асимптотика функционалов энергии для задач теории трещин с односторонними ограничениями на границе.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{0,1}$, ω_0 — подобласть Ω с границей $\partial\omega_0$, такая что $\overline{\omega}_0 \subset \Omega$, $\partial\omega_0 \in C^{0,1}$. Граница $\partial\omega_0$ состоит из двух участков γ_0 и $\partial\omega_0 \setminus \gamma_0$. Будем считать, что либо $\operatorname{meas}\gamma_0 > 0$, либо $\gamma_0 = \varnothing$.

Обозначим через $\boldsymbol{\nu}_0$ единичную внешнюю нормаль к ω_0; γ_0^+ — берег разреза γ_0, соответствующий направлению нормали $\boldsymbol{\nu}_0$; $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\gamma}_0$ — область, которую занимает трехмерное тело, содержащее жесткое включение ω_0 и трещину γ_0, расположенную на участке границы между жестким включением и телом.

Пусть $\boldsymbol{U} = (u_1, u_2, u_3)^{\text{т}}$ — вектор перемещений. Будем считать, что для упругой части $\Omega \setminus \overline{\omega}_0$ тела справедлив линейный закон Гука, связывающий между собой тензоры деформаций $\{\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U})\}$ и напряжений $\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{U})\}$:

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \qquad \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{U}).$$

Здесь c_{ijkl} — компоненты симметричного и положительно определенного тензора упругости, которые удовлетворяют условиям

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}, \qquad c_{ijkl} = \text{const},$$

$$c_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c_0\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\colon \qquad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \text{const} > 0,$$

индексы i, j, k, l принимают значения $1, 2, 3$.

Задачу о равновесии тела с жестким включением и трещиной сформулируем в виде задачи минимизации функционала энергии на множестве допустимых смещений. Для этого определим функциональное пространство

$$H^{1,0}(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0)\colon \quad v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Кроме того, введем в рассмотрение множество жестких перемещений

$$R(\omega_0) = \{\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)\colon \quad \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\text{т}} \in \omega_0\},$$

где B — кососимметрическая матрица, $\boldsymbol{C}$ — постоянный вектор:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}, \qquad b_{12}, b_{13}, b_{23}, c^1, c^2, c^3 \in \mathbb{R}.$$

Определим множество допустимых смещений

$$K_0(\Omega_0) = \{\boldsymbol{U} \in H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)\colon \boldsymbol{U} \in R(\omega_0)\}.$$

Здесь включение $\boldsymbol{U} \in R(\omega_0)$ означает, что сужение функции $\boldsymbol{U}$ на область ω_0 принадлежит множеству жестких перемещений $R(\omega_0)$. Очевидно, что $K_0(\Omega_0)$ является подпространством пространства $H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$.

Наконец, определим функционал потенциальной энергии

$$\Pi(\Omega_0; \boldsymbol{U}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U})\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F}^{\text{т}}\boldsymbol{U}\, d\boldsymbol{x},$$

где $\boldsymbol{F}^{\mathrm{т}} = (f_1, f_2, f_3)$ — заданный вектор внешних сил. Будем считать, что $f_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2, 3$. Отметим, что внешняя сила $\boldsymbol{F}$ действует на все тело: и на упругую часть $\Omega_0 \backslash \overline{\omega}_0$, и на жесткое включение ω_0.

Задача о равновесии упругого тела, содержащего жесткое включение и трещину, формулируется в следующем виде: найти функцию $\boldsymbol{U}_0 \in K_0(\Omega_0)$, минимизирующую функционал потенциальной энергии на множестве допустимых смещений:

$$\Pi(\Omega; \boldsymbol{U}_0) = \inf_{\boldsymbol{U} \in K_0(\Omega)} \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{U}). \tag{1.1}$$

Используя рассуждения работ [31, 32], можно получить постановку задачи (1.1) в дифференциальной форме

$$-\sigma_{ij,j}(\boldsymbol{U}_0) = f_i \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \overline{\omega}_0, \quad i = 1, 2, 3; \tag{1.2}$$

$$u_{01} = u_{02} = u_{03} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega; \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{U}_0 = B_0 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_0 \quad \text{на} \quad \omega_0; \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{U}_0) = \boldsymbol{0}, \quad \sigma_{\nu_0}(\boldsymbol{U}_0) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0^+; \tag{1.5}$$

$$-\langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}_0)\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\rho} \rangle_{1/2, \partial\omega_0} = \int\limits_{\omega_0} \boldsymbol{F}^{\mathrm{т}} \boldsymbol{\rho} \, d\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{\rho} \in R(\omega_0). \tag{1.6}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}_0)\boldsymbol{\nu}_0 \in [H^{-1/2}(\partial\omega_0)]^3$ — вектор напряжений на $\partial\omega_0$; $\sigma_{\nu_0}(\boldsymbol{U}_0) \in H_{00}^{-1/2}(\gamma_0)$ — нормальное напряжение; $\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{U}_0) \in [H_{00}^{-1/2}(\gamma_0)]^3$ — вектор касательных напряжений на γ_0^+; запись $\langle \,\cdot\,, \,\cdot\, \rangle_{1/2, \partial\omega_0}$ обозначает двойственность между пространствами $[H^{-1/2}(\partial\omega_0)]^2$ и $[H^{1/2}(\partial\omega_0)]^2$.

Теорема 1. *Задача* (1.1) *имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega \backslash \overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}) \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F}^{\mathrm{т}} \boldsymbol{U} \, d\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{U} \in K_0(\Omega_0). \tag{1.7}$$

Доказательство. Так как множество $K_0(\Omega_0)$ является подпространством гильбертова пространства, а функционал $\Pi(\Omega_0; \boldsymbol{U})$ непрерывный и коэрцитивный, решение задачи (1.1) существует [26]. Кроме того, поскольку функционал $\Pi(\Omega_0; \boldsymbol{U})$ дифференцируем по Гато, задача минимизации (1.1) эквивалентна вариационному тождеству (1.7).

Покажем единственность решения методом от противного. Пусть $\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$ — решения задачи (1.1). Для решения $\boldsymbol{U}_1$ подставим в вариационное равенство в качестве тестовой функции функцию $\boldsymbol{U}_2 - \boldsymbol{U}_1 \in K_0(\Omega_0)$, а для решения $\boldsymbol{U}_2$ — функцию $\boldsymbol{U}_1 - \boldsymbol{U}_2 \in K_0(\Omega_0)$. Складывая полученные соотношения, находим

$$\int\limits_{\Omega \backslash \overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_2 - \boldsymbol{U}_1) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_2 - \boldsymbol{U}_1) \, d\boldsymbol{x} = 0.$$

Поскольку сужение функций $\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$ на область ω_0 принадлежит множеству жестких перемещений $R(\omega_0)$, интегрирование по $\Omega \setminus \overline{\omega}_0$ можно заменить интегрированием по Ω_0:

$$\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_2 - \boldsymbol{U}_1) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_2 - \boldsymbol{U}_1) \, d\boldsymbol{x} = 0.$$

В силу неравенства Корна $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$. Теорема доказана.

Отметим, что из вариационного тождества (1.7) выводятся дифференциальные уравнения (1.2) и краевые условия (1.3)–(1.6).

Сформулируем возмущенную задачу. Для малого параметра $\delta \in [0, \delta_0)$ ($\delta_0 = \text{const}$) рассмотрим возмущение $\boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x}) = (\Phi_{\delta 1}(\boldsymbol{x}), \Phi_{\delta 2}(\boldsymbol{x}), \Phi_{\delta 3}(\boldsymbol{x}))$, такое что $\boldsymbol{\Phi}_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ и

$$\Phi_{\delta i} \in C^1([0, \delta_0); W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^3)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Зафиксируем $\delta \in [0, \delta_0)$ и применим к области Ω координатное преобразование

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x}). \tag{1.8}$$

В результате получаем возмущенную область $\Omega_\delta = \boldsymbol{\Phi}_\delta(\Omega)$ с жестким включением $\omega_\delta = \boldsymbol{\Phi}_\delta(\omega_0)$ и трещиной $\gamma_\delta = \boldsymbol{\Phi}_\delta(\gamma_0)$. Будем считать, что преобразование (1.8) является взаимно однозначным, т. е. существует обратная функция $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}_\delta^{-1}(\boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{\Phi}_\delta^{-1} = (\Phi_{\delta 1}^{-1}, \Phi_{\delta 2}^{-1}, \Phi_{\delta 3}^{-1})$, и имеют место включения $\Phi_{\delta i}^{-1} \in C^1([0, \delta_0); W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^3))$, $i = 1, 2, 3$. В этом случае $\Omega_\delta = \Omega \backslash \overline{\gamma}_\delta$, $\gamma_\delta \subset \partial\omega_\delta$.

По аналогии с пространством $H^{1,0}(\Omega_0)$ определим пространство $H^{1,0}(\Omega_\delta)$. Преобразование (1.8) задает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H^{1,0}(\Omega_0)$ и $H^{1,0}(\Omega_\delta)$, т. е. если функция $v(\boldsymbol{x}) \in H^{1,0}(\Omega_0)$, то $v(\boldsymbol{\Phi}_\delta^{-1}(\boldsymbol{y})) \in H^{1,0}(\Omega_\delta)$, и наоборот, если $v(\boldsymbol{y}) \in H^{1,0}(\Omega_\delta)$, то $v(\boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x})) \in H^{1,0}(\Omega_0)$.

Для возмущенной задачи введем в рассмотрение пространство допустимых смещений

$$K_\delta(\Omega_\delta) = \{\boldsymbol{U} \in H^{1,0}(\Omega_\delta) \times H^{1,0}(\Omega_\delta) \times H^{1,0}(\Omega_\delta) \colon \boldsymbol{U} \in R(\omega_\delta)\}.$$

Как и выше, включение $\boldsymbol{U} \in R(\omega_\delta)$ означает, что сужение функции $\boldsymbol{U}$ на область ω_δ принадлежит пространству жестких перемещений $R(\omega_\delta)$.

Рассмотрим задачу минимизации функционала энергии на множестве допустимых смещений $K_\delta(\Omega_\delta)$ в возмущенной области Ω_δ: найти функцию $\boldsymbol{U}^\delta \in K_\delta(\Omega_\delta)$, такую что

$$\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{U}^\delta) = \inf_{\boldsymbol{U} \in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{U}), \tag{1.9}$$

где

$$\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{U}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega \backslash \overline{\omega}_\delta} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U})\, d\boldsymbol{y} - \int\limits_{\Omega_\delta} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}\, d\boldsymbol{y}.$$

Для каждого $\delta \in [0, \delta_0)$ задача (1.9) имеет единственное решение $\boldsymbol{U}^\delta \in K_\delta(\Omega_\delta)$, которое удовлетворяет вариационному тождеству

$$\int\limits_{\Omega \backslash \overline{\omega}_\delta} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}^\delta) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U})\, d\boldsymbol{y} = \int\limits_{\Omega_\delta} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}\, d\boldsymbol{y} \quad \forall \boldsymbol{U} \in K_\delta(\Omega_\delta). \tag{1.10}$$

2. Вспомогательные утверждения. В силу гладкости отображения (1.8) имеют место следующие разложения по δ:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{r}_1(\delta, \boldsymbol{x}), \qquad \|\boldsymbol{r}_1(\delta, \boldsymbol{x})\|_{[W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^3)]^3} = o(\delta), \\ &\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_\delta}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{I} + \delta \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{r}_2(\delta, \boldsymbol{x}), \qquad \|\boldsymbol{r}_2(\delta, \boldsymbol{x})\|_{[L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^3)]^9} = o(\delta). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = (V_1(\boldsymbol{x}), V_2(\boldsymbol{x}), V_3(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x})}{\partial \delta}\Big|_{\delta=0}.$$

Из (2.1) следует, что якобиан $J_\delta(\boldsymbol{x})$ преобразования (1.8) допускает представление

$$J_\delta(\boldsymbol{x}) = 1 + \delta \operatorname{div} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) + r_3(\delta, \boldsymbol{x}), \qquad \|r_3(\delta, \boldsymbol{x})\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^3)} = o(\delta),$$

откуда следует, что для всех достаточно малых δ якобиан $J_\delta(\boldsymbol{x})$ строго положительный.

Пусть $\boldsymbol{\Psi} = (\partial \boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x})/\partial \boldsymbol{x})^{-1}$ — матрица, обратная матрице Якоби преобразования (1.8). Тогда

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I} - \delta \, \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{r}_4(\delta, \boldsymbol{x}), \qquad \|\boldsymbol{r}_4(\delta, \boldsymbol{x})\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^3)} = o(\delta).$$

Применяя к области Ω_δ обратное преобразование, получаем невозмущенную область Ω_0 с включением ω_0 и разрезом γ_0. Взаимная однозначность областей Ω_δ и Ω_0 при отображении (1.8) не влечет взаимную однозначность множеств допустимых смещений $K_\delta(\Omega_\delta)$ и $K_0(\Omega_0)$. Это обусловлено тем, что сужение функции, принадлежащей множеству $K_\delta(\Omega_\delta)$, на область ω_δ имеет вид

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y}) = B\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}.$$

При действии обратного отображения образ $\tilde{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x}))$ функции $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})$ имеет вид

$$\tilde{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C} \quad \text{на} \quad \omega_0,$$

т. е. не принадлежит пространству жестких перемещений $R(\omega_0)$. Обозначим через $K_\delta(\Omega_0)$ образ множества $K_\delta(\Omega_\delta)$ при действии преобразования, обратного (1.8):

$$K_\delta(\Omega_0) = \{\boldsymbol{U} \in H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0) \colon \boldsymbol{U} \in R_\delta(\omega_0)\}.$$

Здесь

$$R_\delta(\omega_0) = \{\boldsymbol{U} \colon \boldsymbol{U} = B\boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}, \ \boldsymbol{x} \in \omega_0\},$$

B — кососимметрическая матрица; $\boldsymbol{C}$ — постоянный вектор.

Применяя координатное преобразование (1.8) к функциям и интегралам, входящим в (1.10), получаем вариационное равенство

$$\int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}_0} J_\delta(\boldsymbol{x}) c_{ijkl} E_{kl}(\boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{U}_\delta) E_{ij}(\boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{U}) \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega_0} J_\delta(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{F}_\delta^{\text{т}} \boldsymbol{U} \, d\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{U} \in K_\delta(\Omega_0), \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{U}_\delta$ — решение возмущенной задачи (1.9), отображенное на невозмущенную область Ω_0, т. е. $\boldsymbol{U}_\delta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}^\delta(\boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{U}_\delta \in K_\delta(\Omega_0)$; $\boldsymbol{F}_\delta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x}))$; $E_{ij}(\boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{U})$ — трансформированный тензор деформаций [33]:

$$E_{ij}(\boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{U}) = \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \, \Psi_{kj} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \, \Psi_{ki} \Big), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Таким образом, единственное решение $\boldsymbol{U}^\delta$, отображенное с помощью преобразования, обратного (2.8), на невозмущенную область, является единственным решением $\boldsymbol{U}_\delta \in K_\delta(\Omega_0)$ вариационного равенства (2.2).

Далее, из предположения о гладкости функции $\boldsymbol{F}$ и возмущения $\boldsymbol{\Phi}_\delta$ следуют разложения

$$\int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}_0} J_\delta c_{ijkl} E_{kl}(\boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{U}) E_{ij}(\boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{W}) \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}_0} \big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) + \delta A_1(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{W}) \big) \, d\boldsymbol{x} + {} \\ + o(\delta) R_1(\delta, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{W}), \tag{2.3}$$

$$\int\limits_{\Omega_0} J_\delta \boldsymbol{F}_\delta^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega_0} \big(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} + \delta \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i) u_i\big)\, d\boldsymbol{x} + o(\delta) R_2(\delta, \boldsymbol{U}),$$

где

$$A_1(\boldsymbol{V};\boldsymbol{U},\boldsymbol{W}) = \operatorname{div}\boldsymbol{V}\sigma_{ij}(\boldsymbol{U})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{U})E_{ij}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}};\boldsymbol{W}\Big) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{W})E_{ij}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}};\boldsymbol{U}\Big),$$

$|R_1(\delta,\boldsymbol{U},\boldsymbol{W})| \leqslant c\|\boldsymbol{U}\|_{[H^{1,0}(\Omega_0)]^3}\cdot\|\boldsymbol{W}\|_{[H^{1,0}(\Omega_0)]^3}$; $|R_2(\delta,\boldsymbol{U})| \leqslant c\|\boldsymbol{U}\|_{[L_2(\Omega_0)]^3}$; c не зависит от δ.

Подставляя в равенство (1.10) в качестве тестовой функции $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^\delta$, выполняя замену переменных в интегралах и используя разложения (2.3), получаем равномерную по δ оценку

$$\|\boldsymbol{U}_\delta\|_{[H^{1,0}(\Omega_0)]^3} \leqslant c. \tag{2.4}$$

Рассмотрим произвольную функцию $\boldsymbol{U}$, принадлежащую множеству $K_\delta(\Omega_0)$. Как отмечено выше, сужение функции $\boldsymbol{U}$ на область ω_0 имеет вид

$$\boldsymbol{U} = B\boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.1) в (2.5), получаем

$$\boldsymbol{U} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C} + \delta B\Big(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{r}_1(\delta,\boldsymbol{x})}{\delta}\Big) \quad \text{в } \omega_0.$$

Лемма 1. *Пусть* $\boldsymbol{U}_0 \in K_0(\Omega_0)$ *— решение невозмущенной задачи* (1.1), $\boldsymbol{U}_\delta \in K_\delta(\Omega_0)$ *— решение задачи* (2.2). *Тогда существуют вектор-функции* $\boldsymbol{W}_\delta^1$, $\boldsymbol{W}_\delta^2$, *такие что*

$$\boldsymbol{U}_0 + \delta\boldsymbol{W}_\delta^1 \in K_\delta(\Omega_0), \quad \boldsymbol{U}_\delta - \delta\boldsymbol{W}_\delta^2 \in K_0(\Omega_0);$$

$$\|\boldsymbol{W}_\delta^i\|_{[H^{1,0}(\Omega_0)]^3} \leqslant c, \qquad i = 1, 2. \tag{2.6}$$

Доказательство. Построим в явном виде функции $\boldsymbol{W}_\delta^1$ и $\boldsymbol{W}_\delta^2$, начав с $\boldsymbol{W}_\delta^1$. Рассмотрим решение $\boldsymbol{U}_0$ невозмущенной задачи равновесия. В области ω_0 это решение имеет вид $\boldsymbol{U}_0 = B_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_0$. Выберем функцию $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, такую что $\theta(\boldsymbol{x}) = 1$ при $\boldsymbol{x} \in \omega_0$, и положим $\boldsymbol{W}_\delta^1 = \theta B_0(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{r}_1(\delta)/\delta)$.

Покажем, что $\boldsymbol{U}_\delta^1 = \boldsymbol{U}_0 + \delta\boldsymbol{W}_\delta^1$ принадлежит множеству $K_\delta(\Omega_0)$. Очевидно, что $\boldsymbol{W}_\delta^1 \in [H^{1,0}(\Omega_0)]^3$ и

$$\boldsymbol{U}_\delta^1 = \boldsymbol{U}_0 + \delta\boldsymbol{W}_\delta^1 = B_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_0 + \delta\theta B_0\Big(\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{r}_1(\delta)}{\delta}\Big) = B_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_0 + \delta B_0\Big(\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{r}_1(\delta)}{\delta}\Big) \quad \text{п.в. в} \quad \omega_0.$$

Построим функцию $\boldsymbol{W}_\delta^2$. Для каждого значения δ функция $\boldsymbol{U}_\delta$ в области ω_0 имеет вид

$$\boldsymbol{U}_\delta = B_\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_\delta + \delta B_\delta\Big(\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{r}_1(\delta)}{\delta}\Big),$$

где $B_\delta, \boldsymbol{C}_\delta$ — кососимметрическая матрица и постоянный вектор, соответствующие решению $\boldsymbol{U}^\delta$, т. е. $\boldsymbol{U}^\delta = B_\delta\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}_\delta$ при $\boldsymbol{y} \in \omega_\delta$. Полагая $\boldsymbol{W}_\delta^2 = \theta B_\delta(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{r}_1(\delta)/\delta)$, где θ — финитная функция, введенная выше, покажем, что $\boldsymbol{U}_\delta^2 = \boldsymbol{U}_\delta - \delta\boldsymbol{W}_\delta^2$ принадлежит множеству $K_0(\Omega_0)$. Очевидно, что $\boldsymbol{W}_\delta^2 \in [H^{1,0}(\Omega_0)]^3$. Кроме того, имеем

$$\boldsymbol{U}_\delta^2 = \boldsymbol{U}_\delta - \delta\boldsymbol{W}_\delta^2 = B_\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_\delta + \delta B_\delta\Big(\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{r}_1(\delta)}{\delta}\Big) - \delta B_\delta\Big(\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{r}_1(\delta)}{\delta}\Big) = B_\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_\delta \quad \text{п.в. в } \omega_0,$$

т. е. $\boldsymbol{U}_\delta^2 \in R(\omega_0)$, и, следовательно, $\boldsymbol{U}_\delta^2 \in K_0(\Omega_0)$.

Равномерные оценки (2.6) следуют из (2.4). Теорема доказана.

Замечание 1. При построении функций $\boldsymbol{W}_\delta^1$ и $\boldsymbol{W}_\delta^2$ использовалась финитная функция θ, выбор которой достаточно произволен. Поэтому построенные функции $\boldsymbol{W}_\delta^1$ и $\boldsymbol{W}_\delta^2$ не являются единственными.

Доказанная лемма позволяет установить сильную сходимость $\boldsymbol{U}_\delta$ к $\boldsymbol{U}_0$.

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{U}_\delta$ *— решение* (2.2), $\boldsymbol{U}_0$ *— решение* (1.7). *Тогда*

$$\|\boldsymbol{U}_\delta - \boldsymbol{U}_0\|_{[H^{1,0}(\Omega_0)]^3} \leqslant c\sqrt{\delta}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Подставляя $\boldsymbol{U}_\delta^1 = \boldsymbol{U}_0 + \delta \boldsymbol{W}_\delta^1 \in K_\delta(\Omega_0)$ и $\boldsymbol{U}_\delta^2 = \boldsymbol{U}_\delta - \delta \boldsymbol{W}_\delta^2 \in K_0(\Omega_0)$ в качестве тестовых функций в вариационные равенства (2.2) и (1.7) соответственно и используя разложения (2.3), после ряда преобразований получаем

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta - \boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta - \boldsymbol{U}_0)\, d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant \delta \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} \big(- \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta^2) + \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta^1) + A_1(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{U}_\delta, \boldsymbol{U}_0 - \delta \boldsymbol{W}_\delta^1)\big)\, d\boldsymbol{x} +$$

$$+ \delta \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F}^{\text{т}}(\boldsymbol{W}_\delta^2 - \boldsymbol{W}_\delta^1)\, d\boldsymbol{x} + o(\delta)\big(R_1(\delta, \boldsymbol{U}_\delta, \boldsymbol{U}_0 - \delta \boldsymbol{W}_\delta^1) + R_2(\delta, \boldsymbol{U}_0 - \delta \boldsymbol{W}_\delta^1)\big).$$

В силу леммы 1 и оценки (2.4) получаем

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta - \boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta - \boldsymbol{U}_0)\, d\boldsymbol{x} \leqslant \delta c, \tag{2.8}$$

где c не зависит от δ. Так как функция $\boldsymbol{U}_0$ принадлежит пространству $R(\omega_0)$, то $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_0) = 0$ на ω_0 $(i, j = 1, 2, 3)$. В то же время

$$\boldsymbol{U}_\delta = B_\delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_\delta + \delta B_\delta \Big(\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{r}_1(\delta)}{\delta}\Big),$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta) = \delta \varepsilon_{ij}\Big(B_\delta\Big(\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{r}_1(\delta)}{\delta}\Big)\Big).$$

Рассмотрим кососимметрическую матрицу B_δ, соответствующую решению возмущенной задачи $\boldsymbol{U}^\delta$. Матрица B_δ определяется элементами b_{12}^δ, b_{13}^δ, b_{23}^δ. Из (2.4) следует, что $|b_{ij}^\delta| \leqslant c$ $(i = 1, 2,\ j = 2, 3)$ равномерно по δ. Поэтому получаем

$$\varepsilon_{ij}\Big(B_\delta\Big(\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{r}_1(\delta)}{\delta}\Big)\Big) \leqslant c \quad \forall \boldsymbol{x} \in \omega_0, \tag{2.9}$$

где c — константа, не зависящая от δ.

Из равенства

$$\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta - \boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta - \boldsymbol{U}_0)\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega\setminus\omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta - \boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta - \boldsymbol{U}_0)\, d\boldsymbol{x} -$$

$$- \delta^2 \int\limits_{\omega_0} \sigma_{ij}\Big(B_\delta\Big(\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{r}_1(\delta)}{\delta}\Big)\Big)\varepsilon_{ij}\Big(B_\delta\Big(\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{r}_1(\delta)}{\delta}\Big)\Big)\, d\boldsymbol{x}$$

в силу неравенства Корна и неравенств (2.8), (2.9) получаем
$$\|\boldsymbol{U}_\delta - \boldsymbol{U}_0\|_{[H^{1,0}(\Omega_0)]^3} \leqslant c\sqrt{\delta}.$$
Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть* b_{ij}^δ, b_{ij}^0 $(i = 1, 2,\ j = 2, 3)$ *— элементы матриц* B_δ, B_0 *соответственно,* c_k^δ, c_k^0 $(k = 1, 2, 3)$ *— составляющие векторов* $\boldsymbol{C}_\delta$, $\boldsymbol{C}_0$*. Тогда при* $\delta \to 0$
$$b_{ij}^\delta \to b_{ij}^0, \quad c_i^\delta \to c_k^0, \quad i = 1, 2,\ j = 2, 3,\ k = 1, 2, 3.$$

Доказательство. В области ω_0 функции $\boldsymbol{U}_\delta$ и $\boldsymbol{U}_0$ имеют вид
$$\boldsymbol{U}_\delta = B_\delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_\delta + \delta B_\delta(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{r}_1(\delta)/\delta), \qquad \boldsymbol{U}_0 = B_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_0.$$
Из (2.7) следует, что при $\delta \to 0$
$$\boldsymbol{U}_\delta \to \boldsymbol{U}_0 \quad \text{сильно в} \quad [H^1(\omega_0)]^3.$$
Это означает, что
$$\int\limits_{\omega_0} |\boldsymbol{U}_\delta - \boldsymbol{U}_0|^2\, d\boldsymbol{x} \to 0, \quad \int\limits_{\omega_0} \Big|\frac{\partial \boldsymbol{U}_\delta}{\partial x_i} - \frac{\partial \boldsymbol{U}_0}{\partial x_i}\Big|^2 d\boldsymbol{x} \to 0, \quad i = 1, 2, 3.$$
Для первых компонент u_{01} и $u_{\delta 1}$ векторов $\boldsymbol{U}_\delta$ и $\boldsymbol{U}_0$ соответственно имеем
$$u_{01}(\boldsymbol{x}) = b_{12}^0 x_2 + b_{13}^0 x_3 + c_1^0,$$
$$u_{\delta 1}(\boldsymbol{x}) = b_{12}^\delta x_2 + b_{13}^\delta x_3 + c_1^\delta + \delta b_{12}^\delta V_2(\boldsymbol{x}) + b_{13}^\delta V_3(\boldsymbol{x}) + r_5(\delta, \boldsymbol{x}) \quad \text{в} \quad \omega_0,$$
где $\|r_5(\delta, \boldsymbol{x})\|_{W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} = o(\delta)$. Следовательно, в силу ограниченности b_{12}^δ получаем
$$\int\limits_{\omega_0} \Big|\frac{\partial u_{\delta 1}}{\partial x_2} - \frac{\partial u_{01}}{\partial x_2}\Big|^2 d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\omega_0} \Big| - b_{12}^\delta + b_{12}^0 - \delta b_{12}^\delta V_{2,1} + \frac{\partial r_5(\delta, \boldsymbol{x})}{\partial x_2}\Big|^2 d\boldsymbol{x} =$$
$$= \mu\omega_0\, |b_{12}^\delta - b_{12}^0|^2 + O(\delta),$$
где $\mu\omega_0$ — мера области ω_0. Так как $\mu\omega_0 > 0$, то при $\delta \to 0$
$$b_{12}^\delta \to b_{12}^0. \tag{2.10}$$
Аналогично доказывается сходимость b_{13}^δ и b_{23}^δ к b_{13}^0 и b_{23}^0 соответственно.

Поскольку
$$\int\limits_{\omega_0} |u_{\delta 1} - u_{01}|^2\, d\boldsymbol{x} = |b_{12}^\delta - b_{12}^0|^2 \int\limits_{\omega_0} x_2^2\, d\boldsymbol{x} + |b_{13}^\delta - b_{13}^0|^2 \int\limits_{\omega_0} x_3^2\, d\boldsymbol{x}\ \mu\omega_0\, |c_1^\delta - c_1^0| + O(\delta),$$
в силу (2.10) получаем $c_1^\delta \to c_1^0$ при $\delta \to 0$. Аналогично доказывается сходимость c_i^δ к c_i^0 при $i = 2, 3$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Справедливы сходимости*
$$\boldsymbol{W}_\delta^1 \to \boldsymbol{W}_0 \quad \textit{сильно в} \quad [H^{1,0}(\Omega_0)]^3,$$
$$\boldsymbol{W}_\delta^2 \to \boldsymbol{W}_0 \quad \textit{сильно в} \quad [H^{1,0}(\Omega_0)]^3,$$
где $\boldsymbol{W}_0 = \theta B_0 \boldsymbol{V}$.

Доказательство. По построению
$$\boldsymbol{W}_\delta^1 = \theta B_0(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{r}_1(\delta)/\delta), \qquad \boldsymbol{W}_\delta^2 = \theta B_\delta(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{r}_1(\delta)/\delta),$$
поэтому справедливость утверждения следует из леммы 2 и оценки $\|\boldsymbol{r}_1(\delta, x)\|_{[W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]^2} = o\,(\delta)$. Лемма доказана.

3. Производная функционала энергии. Рассмотрим функционал $\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{U})$ энергии тела, занимающего возмущенную область Ω_δ. Применяя преобразование координат (1.8) к интегралам в $\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{U})$, получим новый функционал $\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{U})$, определенный на невозмущенной области Ω_0. Используя формулы разложений по δ, функционал $\Pi_\delta(\Omega_0, \boldsymbol{U})$ можно представить в виде

$$\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{U}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U})\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U} + \\ + \frac{1}{2}\, \delta \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}_0} A_1(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{U})\, d\boldsymbol{x} - \delta \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i) u_i\, d\boldsymbol{x} + o(\delta) R_3(\delta, \boldsymbol{U}),$$

где $|R_3(\delta, \boldsymbol{U})| \leqslant c \|\boldsymbol{U}\|_{[H^{1,0}(\Omega_0)]^3}$; c не зависит от δ.

Для того чтобы найти производную функционала энергии по параметру возмущения области, необходимо вычислить предел

$$\Pi'(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{U}^\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0)}{\delta}. \tag{3.1}$$

Так как преобразование (1.8) задает взаимно однозначное соответствие между множествами $K_\delta(\Omega_\delta)$ и $K_\delta(\Omega_0)$, то производная $\Pi'(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0)$ равна

$$\Pi'(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{U}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0)}{\delta}.$$

Кроме того, функция $\boldsymbol{U}_\delta$ минимизирует функционал $\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{U})$ на множестве $K_\delta(\Omega_0)$, поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{U}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{U}_\delta - \delta \boldsymbol{W}_\delta^2)}{\delta} \leqslant \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{U}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0)}{\delta} \leqslant \\ \leqslant \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0 + \delta \boldsymbol{W}_\delta^1) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0)}{\delta}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим правую часть (3.2):

$$\frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0 + \delta \boldsymbol{W}_\delta^1) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0)}{\delta} = \frac{1}{\delta} \Big(\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0 + \delta \boldsymbol{W}_\delta^1) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_0 + \delta \boldsymbol{W}_\delta^1)\, d\boldsymbol{x} - \\ - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{U}_0 + \delta \boldsymbol{W}_\delta^1)\, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\, \delta \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}_0} A_1(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{U}_0 + \delta \boldsymbol{W}_\delta^1, \boldsymbol{U}_0 + \delta \boldsymbol{W}_\delta^1)\, d\boldsymbol{x} - \\ - \delta \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i)(u_{0i} + \delta w_{\delta i}^1)\, d\boldsymbol{x} + o(\delta) R_3(\delta, \boldsymbol{U}_0 + \delta \boldsymbol{W}_\delta^1) - \\ - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_0\, d\boldsymbol{x} \Big). \tag{3.3}$$

Используя доказанные выше теорему 2 и лемму 3, нетрудно вычислить предел (3.3):

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\Pi_\delta(\Omega_0;\boldsymbol{U}_0+\delta\boldsymbol{W}_\delta^1)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{U}_0)}{\delta}=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}A_1(\boldsymbol{V};\boldsymbol{U}_0,\boldsymbol{U}_0)\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(\boldsymbol{V}f_i)u_{0i}+$$
$$+\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}\sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_0)\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega_0}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\,d\boldsymbol{x}.$$

Рассмотрим левую часть (3.2):

$$\frac{\Pi_\delta(\Omega_0;\boldsymbol{U}_\delta)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{U}_\delta-\delta\boldsymbol{W}_\delta^2)}{\delta}=\frac{1}{\delta}\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta)\,d\boldsymbol{x}-$$
$$-\int\limits_{\Omega_0}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{U}_0+\delta\boldsymbol{W}_\delta^1)\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\,\delta\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}A_1(\boldsymbol{V};\boldsymbol{U}_\delta,\boldsymbol{U}_\delta)\,d\boldsymbol{x}-$$
$$-\,\delta\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(\boldsymbol{V}f_i)u_{\delta i}\,d\boldsymbol{x}+o(\delta)R_3(\delta,\boldsymbol{U}_\delta)-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta-\delta\boldsymbol{W}_\delta^2)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_\delta-\delta\boldsymbol{W}_\delta^2)d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Omega_0}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{U}_\delta-\delta\boldsymbol{W}_\delta^2)d\boldsymbol{x}\Big)\,d\boldsymbol{x}.$$

Из этого равенства получаем

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\Pi_\delta(\Omega_0;\boldsymbol{U}_\delta)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{U}_\delta-\delta\boldsymbol{W}_\delta^2)}{\delta}=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}A_1(\boldsymbol{V};\boldsymbol{U}_0,\boldsymbol{U}_0)\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(\boldsymbol{V}f_i)u_{0i}\,d\boldsymbol{x}+$$
$$+\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_0)\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega_0}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\,d\boldsymbol{x}.$$

Таким образом, пределы правой и левой частей (3.2) совпадают. Следовательно, предел в (3.1) существует и задается формулой

$$\Pi'(\Omega_0;\boldsymbol{U}_0)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}A_1(\boldsymbol{V};\boldsymbol{U}_0,\boldsymbol{U}_0)\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(\boldsymbol{V}f_i)u_{0i}\,d\boldsymbol{x}+$$
$$+\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_0)\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega_0}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\,d\boldsymbol{x}.\qquad(3.4)$$

Рассмотрим последние два слагаемых в (3.4), обозначив их через $\Delta(\boldsymbol{U}_0)$:

$$\Delta(\boldsymbol{U}_0)=\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_0)\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega_0}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\,d\boldsymbol{x}.$$

Применим формулу Грина к области $\Omega\setminus\overline{\omega}_0$. Так как $\boldsymbol{W}_0=B_0\boldsymbol{V}$ в ω_0, то

$$\Delta(\boldsymbol{U}_0)=-\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0}\sigma_{ij,j}(\boldsymbol{U}_0)w_{0i}\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega_0\setminus\overline{\omega}_0}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\omega_0}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}B_0\boldsymbol{V}\,d\boldsymbol{x}-\langle\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}_0)\boldsymbol{\nu}_0,B_0\boldsymbol{V}\rangle_{1/2,\partial\omega_0}.$$

В силу уравнений равновесия (1.2) первые два слагаемых равны нулю. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Для любого возмущения* $\boldsymbol{\Phi} \in C^1([0,\delta_0); W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$ *существует первая производная функционала энергии* $\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{U}^\delta)$ *по параметру возмущения* δ *при* $\delta = 0$, *которая задается формулой*

$$\Pi'(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0) E_{ij}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}; \boldsymbol{U}_0\Big)\, d\boldsymbol{x} -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i) u_{0i}\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\omega_0} \boldsymbol{F}^{\rm T} B_0 \boldsymbol{V}\, d\boldsymbol{x} - \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}_0)\boldsymbol{\nu}_0, B_0\boldsymbol{V}\rangle_{1/2,\partial\omega_0}, \qquad (3.5)$$

где $\boldsymbol{U}_0$ *— решение невозмущенной задачи* (1.1),

$$E_{ij}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}; \boldsymbol{U}_0\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_{0i}}{\partial x_k} V_{k,j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_k} V_{k,i}\Big).$$

Замечание 2. Если решение $\boldsymbol{U}_0$ достаточно гладкое (например, при $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}_0)\boldsymbol{\nu}_0 \in [L_2(\partial\omega_0)]^3$), то с учетом краевых условий (1.5) на трещине γ_0 имеем

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}_0)\boldsymbol{\nu}_0, B_0\boldsymbol{V}\rangle_{1/2,\partial\omega_0} = \int\limits_{\partial\omega_0\setminus\gamma_0^+} \boldsymbol{\nu}_0^{\rm T}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}_0)\cdot B_0\boldsymbol{V}.$$

Замечание 3. Формула (3.5) справедлива также в случае $\gamma_0 = \varnothing$.

4. Квазистатический рост трещины. Рассмотрим частный случай возмущения области Ω_0, соответствующего квазистатическому росту трещины вдоль заданной поверхности. В этом случае формула (3.5) является формулой Гриффитса для трехмерного тела, содержащего жесткое включение и трещину, расположенную на границе между телом и жестким включением.

Конкретизируем геометрию области Ω_0 — тела с трещиной γ_0 и жестким включением ω_0. Пусть граница жесткого включения $\partial\omega_0$ состоит из двух участков γ и $\partial\omega_0 \setminus \gamma$ и, кроме того, трещина γ_0 содержится в γ.

Пусть $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная плоская область в пространстве $\mathbb{R}^2$, ограниченная контуром $\partial\Sigma_0$. Введем трехмерную декартову систему координат и будем считать, что начало координат находится строго внутри плоской области Σ_0. Пусть область Σ_0 описывается в полярных координатах (r,φ), определенных в $\mathbb{R}^2$, следующим образом:

$$\Sigma_0 = \{r < R(\varphi),\ \varphi \in [0,2\pi],\ R(0) = R(2\pi),\ R > 0\}.$$

Тогда $\partial\Sigma_0 = \{r = R(\varphi),\ \varphi \in [0,2\pi],\ R(0) = R(2\pi),\ R > 0\}$, $\overline{\Sigma}_0 = \Sigma_0 \cup \partial\Sigma_0$.

Будем считать, что трещина γ_0 задается следующим образом:

$$\gamma_0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\colon x_3 = \psi(x_1,x_2),\ (x_1,x_2) \in \Sigma_0\}$$

($\psi \in C^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ — заданная функция).

Построим возмущение $\boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x})$, соответствующее квазистатическому росту трещины вдоль поверхности γ и определяющееся семейством трещин γ_δ [34, 35]. Для этого возмущение фронта трещины

$$\psi(\gamma_0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\colon x_3 = \psi(x_1,x_2),\ (x_1,x_2) \in \partial\Sigma_0\}$$

определим следующим образом. Пусть задана функция $h(\varphi) \in C^1[0,2\pi]$, такая что $h \geqslant 0$, $h(0) = h(2\pi)$, $h'(0) = h'(2\pi)$. Введем область $\Sigma_\delta = \{r < R(\varphi) + \delta h(\varphi),\ \varphi \in [0,2\pi]\} \subset \mathbb{R}^2$, ограниченную контуром $\partial\Sigma_\delta = \{r = R(\varphi) + \delta h(\varphi),\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$, при этом $\overline{\Sigma}_\delta = \Sigma_\delta \cup \gamma_\delta$. Тогда семейство трещин γ_δ можно задать в следующем виде:

$$\gamma_\delta = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\colon x_3 = \psi(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in \omega_\delta\}.$$

В силу гладкости функции ψ и сделанных выше предположений для области Σ_δ существует такое малое δ_0, что для всех положительных значений $\delta < \delta_0$ трещины γ_δ лежат строго внутри области Ω, т. е. $\overline{\gamma}_\delta \subset \Omega$. Тогда $\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{\gamma}_\delta$ — область, которую занимает тело с жестким включением ω_0 и трещиной γ_δ, расположенной на границе включения. Следует отметить, что построенная таким образом область Ω_δ содержит такое же жесткое включение ω_0, что и область Ω_0, при этом трещина γ_0 "подросла" до γ_δ вдоль поверхности γ, являющейся частью границы жесткого включения ω_0.

Построим взаимно однозначное координатное преобразование, отображающее область Ω_0 на область Ω_δ. Для этого рассмотрим гладкую срезающую функцию η, такую что ее носитель $\operatorname{supp}\eta \subset \Omega \setminus \{(0,0,0)\}$ и $\eta = 1$ в некоторой окрестности O фронта $\psi(\gamma_0)$ трещины γ_0. Введем цилиндрические координаты r, φ, x_3, которые связаны с декартовыми координатами стандартными соотношениями

$$x_1 = r\cos\varphi, \qquad x_2 = r\sin\varphi.$$

Определим координатное преобразование $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_0$, отображающее область Ω_0 на область Ω_δ:

$$\begin{gathered} y_1 = x_1 + \delta\eta(x_1, x_2, x_3) h(\varphi(x_1, x_2)) \cos\varphi(x_1, x_2), \\ y_2 = x_2 + \delta\eta(x_1, x_2, x_3) h(\varphi(x_1, x_2)) \sin\varphi(x_1, x_2), \\ y_3 = x_3 + \psi(y_1, y_2) - \psi(x_1, x_2). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Введем следующие обозначения:

$$\theta = \eta/r, \qquad \theta_i = x_i\theta \quad (i = 1, 2), \qquad \theta_3 = \theta_1\psi_{,1} + \theta_2\psi_{,2}.$$

В этих обозначениях преобразование (4.1) принимает вид

$$y_1 = x_1 + \delta\theta_1, \qquad y_2 = x_2 + \delta\theta_2, \qquad y_3 = x_3 + \psi(x_1 + \delta\theta_1, x_2 + \delta\theta_2) - \psi(x_1, x_2).$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{V} = \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_\delta(\boldsymbol{x})}{\partial\delta}\Big|_{\delta=0} = (h\theta_1, h\theta_2, h\theta_3)^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, компоненты преобразованного тензора деформаций $E_{ij}(\eta; \boldsymbol{U})$ задаются формулами

$$E_{ij}(\eta; \boldsymbol{U}) = \frac{1}{2}\Big((h\theta_k)_{,j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + (h\theta_k)_{,i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\Big), \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Пусть $\boldsymbol{U}_0$ — решение невозмущенной задачи, B_0 — соответствующая ему кососимметрическая матрица. Подставляя найденные формулы в (3.5), получаем формулу Гриффитса для упругого тела с жестким включением и трещиной

$$\Pi'(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0) = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} (h\theta_k)_{,k}\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0)E_{ij}(\eta; \boldsymbol{U}_0)\,d\boldsymbol{x} -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} (h\theta_k f_i)_{,k} u_{0i}\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\omega_0} h\big(\theta_1(-b^0_{12}f_2 - b^0_{13}f_3) + \theta_2(b^0_{12}f_1 - b^0_{23}f_3) + \theta_3(b^0_{13}f_1 + b^0_{23}f_2)\big)\,d\boldsymbol{x} -$$

$$- \langle\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}_0)\boldsymbol{\nu}_0, B_0\boldsymbol{V}\rangle_{1/2,\partial\omega_0}. \tag{4.2}$$

Учитывая, что $h_{,1}\theta_1 + h_{,2}\theta_2 + h_{,3}\theta_3 = 0$, и предполагая, что решение достаточно гладкое (см. замечание 2), формулу (4.2) можно записать в следующем виде:

$$\Pi'(\Omega_0; \boldsymbol{U}_0) = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} h\theta_{k,k}\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0)E_{ij}(\eta;\boldsymbol{U}_0)\,d\boldsymbol{x} -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} h(\theta_k f_i)_{,k} u_{0i}\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\omega_0} h\big(\theta_1(-b^0_{12}f_2 - b^0_{13}f_3) + \theta_2(b^0_{12}f_1 - b^0_{23}f_3) + \theta_3(b^0_{13}f_1 + b^0_{23}f_2)\big)\,d\boldsymbol{x} -$$

$$- \int\limits_{\partial\omega_0\setminus\gamma_0^+} \boldsymbol{\nu}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}_0)\cdot B_0\boldsymbol{V}. \qquad (4.3)$$

Формула (4.3) для упругого тела с жестким включением и трещиной получена впервые.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1974.
2. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
3. **Ohtsuka K.** Mathematics of brittle fracture // Theoretical studies on fracture mechanics in Japan. Hiroshima: Hiroshima-Denki Inst. of Technol., 1997. P. 99–172.
4. **Мазья В. Г., Назаров С. А.** Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.
5. **Назаров С. А., Шпековиус-Нойгебауер М.** Применение энергетического критерия разрушения для определения формы слабоискривленной трещины // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 5. С. 119–130.
6. **Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.** Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 3. С. 69–82.
7. **Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.** Хрупкое разрушение тел с произвольными трещинами // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 156–171.
8. **Cotterell B., Rice J. R.** Slightly curved or kinked cracks // Intern. J. Fract. 1980. V. 16, N 2. P. 155–169.
9. **Amestoy M., Leblond J. B.** Crack paths in plane situations. 2. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors // Intern. J. Solids Struct. 1992. V. 29, N 4. P. 465–501.
10. **Leblond J. B.** Crack paths in three-dimensional elastic solids. 1. Two-term expansion of the stress intensity factors — application to cracks path stability in hydraulic fracturing // Intern. J. Solids Struct. 1999. V. 36, N 1. P. 79–103.
11. **Leguillon D.** Asymptotic and numerical analysis of a crack branching in non isotropic materials // Eur. J. Mech. A. Solids. 1993. V. 12, N 1. P. 33–51.
12. **Gao H., Chiu Ch.** Slightly curved or kinked cracks in anisotropic elastic solids // Intern. J. Solids Struct. 1992. V. 29, N 8. P. 947–972.
13. **Martin P. A.** Perturbed cracks in two-dimensions: An integral-equation approach // Intern. J. Fract. 2000. V. 104. P. 317–327.
14. **Мовчан А. Б., Назаров С. А., Полякова О. Р.** Приращение коэффициентов интенсивности напряжений при удлинении криволинейной трещины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1992. № 1. С. 84–93.
15. **Назаров С. А.** Коэффициенты интенсивности напряжений и условия девиации трещины в хрупком анизотропном теле // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 3. С. 98–107.

16. **Toya M.** A crack along the interface of a rigid circular inclusion embedded in an elastic solid // Intern. J. Fract. 1973. V. 9, N 4. P. 463–470.
17. **Maiti M.** On the extension of a crack due to rigid inclusions // Intern. J. Fract. 1979. V. 15, N 4. P. 389–393.
18. **Моссаковский В. И., Рыбка М. Т.** Обобщение критерия Гриффитса — Снеддона на случай неоднородного тела // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 1061–1069.
19. **Xiao Z. M., Chen B. J.** Stress intensity factor for a Griffith crack interacting with a coated inclusion // Intern. J. Fract. 2001. V. 108, N 3. P. 193–205.
20. **Erdogan F., Gupta G. D., Ratwani M.** Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1974. V. 41. P. 1007–1013.
21. **Sendeckyj G. P.** Interaction of cracks with rigid inclusions in longitudinal shear deformation // Intern. J. Fract. Mech. 1974. V. 101, N 1. P. 45–52.
22. **Nisitani H., Chen D. H., Saimoto A.** Interaction between an elliptic inclusion and a crack // Proc. of the Intern. conf. on computer-aided assessment and control, Fukuoka (Japan), 3–5 June 1996 / Ed. by H. Nisitani, M. H. Aliabadi, S. I. Isida, D. J. Cartwright. S. l.: Comput. Mech. Publ., 1996. P. 325–332.
23. **Хлуднев А. М.** Инвариантные интегралы в задачах о трещине на стыке неоднородности и контактных задачах // Докл. АН. 2004. Т. 398, № 5. С. 630–634.
24. **Назаров С. А.** Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности упругих полей и критерии разрушения при контакте берегов // Прикл. математика и механика. 2005. Т. 69, вып. 3. С. 520–532.
25. **Хлуднев А. М.** Инвариантные интегралы в задаче о трещине на границе раздела двух сред // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 123–137.
26. **Khludnev A. M.** Analysis of cracks in solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.
27. **Рудой Е. М.** Дифференцирование функционалов энергии в задаче о криволинейной трещине с возможным контактом берегов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 113–127.
28. **Khludnev A. M., Ohtsuka K., Sokolowski J.** On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 99–109.
29. **Kovtunenko V. A.** Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration // IMA J. Appl. Math. 2006. N 71. P. 635–657.
30. **Рудой Е. М.** Асимптотика функционала энергии для смешанной краевой задачи четвертого порядка в области с разрезом // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 430–445.
31. **Хлуднев А. М.** Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине. Новосибирск, 2009. (Препр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики; № 1-09).
32. **Стекина Т. А.** Вариационная задача об одностороннем контакте упругой пластины с балкой // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 45–46.
33. **Ковтуненко В. А.** Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 1. С. 109–123.
34. **Kovtunenko V. A.** Sensitivity of interfacial cracks to non-linear crack front perturbations // Z. angew. Math. Mech. 2002. Bd 82, N 6. S. 387–398.
35. **Рудой Е. М.** Дифференцирование функционалов энергии в трехмерной теории упругости для тел, содержащих поверхностные трещины // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 106–116.

Поступила в редакцию 23/IX 2009 г.,
в окончательном варианте — 5/II 2010 г.