УДК 539.30 + 620.171.5

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ НЕОДНОРОДНОСТИ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ВЫЯВЛЕНИЕ ЭФФЕКТА МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Я. М. Ширяев

(*Ленинград*)

В последнее время многие авторы, следуя основополагающим работам [1—3], приложили значительные усилия для развития новой механики микроконтинуума, в которой учитываются перемещения микроэлементов. Для приложения этих теорий требуется определить довольно большое количество новых упругих постоянных. Эффекты, которые выявляются в результате учета перемещения микроэлементов, рассматривались теоретически рядом авторов. Однако экспериментальных работ, в которых выявлялся бы эффект этого учета и определялись бы новые упругие постоянные в материалах, очень мало [4—6]. Цель данной работы — выявить эффект влияния моментных напряжений на концентрацию напряжений вблизи неоднородности в случае плоской деформации экспериментальным методом фотоупругости.

Рассматривается концентрация напряжений вблизи кругового цилиндра радиуса a, точно совпадающего с полостью и вставленного в бесконечную среду (полосу), которая подвергается действию равномерной нагрузки p в бесконечности. Круговой цилиндр (неоднородность) и внешняя среда имеют различные упругие константы: модуль сдвига и коэффициент Пуассона G_1, ν_1 и G_2, ν_2; l_1 и l_2 (новые упругие постоянные, введенные моментной теорией упругости) соответственно.

Возьмем полярную систему координат r, θ. Обозначим компоненты тензора напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}$ и компоненты тензора моментных напряжений μ_r, μ_θ.

Взяв функции напряжений в виде [2] и составив граничные условия полного контакта на контуре неоднородности (при $r = a$), найдем, согласно моментной теории упругости [1, 2], решение для напряжений, получающееся в замкнутом виде через модифицированные функции Бесселя I и K. Решение по классической теории, в котором моментными напряжениями пренебрегают, получается путем предельного перехода, когда $l_1 = l_2 = 0$.

В общем случае местоположение точки, в которой возникают наибольшие напряжения, и величина коэффициента концентрации напряжений являются сложными функциями упругих постоянных G_i, ν_i, l_i ($i = 1, 2$). Наибольшие напряжения σ_θ развиваются при $r = a$ и $\theta = \pm\pi/2$. Для значений $G_1/G_2 < 1$ коэффициент концентрации напряжений $k = \sigma_\theta^{(2)}(a, \pm\pi/2)/p$, а для значений $G_1/G_2 > 1$ $k = \sigma_\theta^{(1)}(a, \pm\pi/2)/p$, где индексы (1) и (2) относятся к неоднородности и к окружающей среде соответственно

$$(1)\qquad \sigma_\theta^{(1)}(a, \pm\pi/2) = \frac{(1-\nu_2)\,p}{1+(1-2\nu_1)\,g} + \frac{2\,(1-\nu_2)\,p}{Q}\,[M + 24\,(1 - g\nu_1) \times$$
$$\times (l_2/a)^2 L_2 (2 - L_1)];$$
$$\sigma_\theta^{(2)}(a, \pm\pi/2) = \frac{\nu_2 + (1-2\nu_1)\,g}{1+(1-2\nu_1)\,g}\,p - \frac{2p}{Q}\,[(\nu_2 - g)\,M - 3g \times$$
$$\times (1-\nu_1)\,N_2 L_2 (2 - L_1)],$$

где

$$(2)\qquad g = G_1/G_2;\ N_1 = 8(1-\nu_1)(l_1/a)^2;\ N_2 = 8(1-\nu_2)(l_2/a)^2;$$

$$L_1 = (a/2l_1)I_1(a/l_1)/I_2(a/l_1); \quad L_2 = (a/2l_2)K_1(a/l_2)/K_2(a/l_2);$$

$$Q = g(1-g)(l_2/l_1)^2 N_2 L_2 \left[3N_1L_1 - 6N_1 + \frac{4g(1-\nu_1)}{1-g}\right] -$$
$$- [3 - 4\nu_2 - N_2L_2 + g(1 + N_2L_2)]\, M;$$
$$M = [4g(1-\nu_1)/(1-g)][1 - L_1 - g(l_2/l_1)^2(1 + L_2)] +$$
$$+ (2 - L_1) - [1 + g(l_2/l_1)^2(1 + L_2)](1 + 3N_1L_1 - 6N_1).$$

На фиг. 1 показана зависимость коэффициента k от отношения a/l_2, полученная из формул (1), (2), при значениях параметров: кривая *1* — $G_1/G_2 = 0$, $\nu_2 = 1/3$; *2* — $G_1 = 0{,}5\ G_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$, $l_1 = 0$; *3* — $G_1 = 2G_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$, $l_1 = 0$; *4* — $G_1/G_2 = \infty$, $\nu_2 = 1/3$. Сплошные линии соответствуют моментной теории, штриховые — классической.

Для экспериментального определения концентрации напряжений использовался поляризационно-оптический метод. Образцы полос изготовлялись из эпоксидной смолы ЭД-6, предел пропорциональности материала составлял 530 кг/см^2, модуль упругости 37500 кг/см^2 и коэффициент Пуассона ν=0,38. В каждом образце имелось от 3 до 5 малых отверстий различного радиуса. Эксперимент проводился для двух предельных случаев: а) $G_1/G_2 = 0$; б) $G_1/G_2 = \infty$, при этом в отверстия вклеивались эпоксидным клеем холодного отвердения стальные диски.

На контуре отверстия в этих предельных случаях наибольшее нормальное напряжение $\sigma_{\theta\max}$ можно вычислить [4, 5] из максимального порядка интерференционных полос $n_{\max}$, используя основной закон фотоупругости в форме

$$\sigma_{\theta\max} = Cn_{\max}, \tag{3}$$

где C — постоянная материала образца данной толщины.

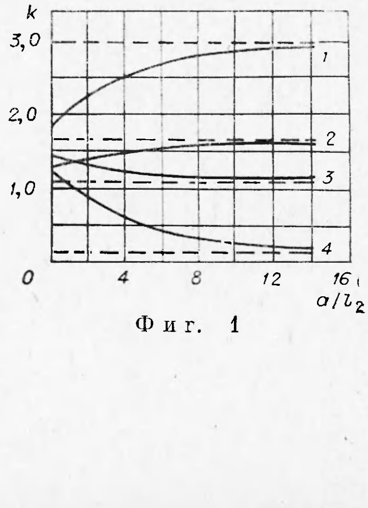
Испытывается образец, имеющий несколько малых отверстий различного радиуса. При этом коэффициенты концентрации для любых отверстий i и j связаны соотношением

$$k_i/k_j = \Delta(n_{\max})_i/\Delta(n_{\max})_j, \tag{4}$$

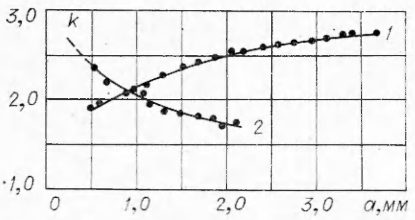
где $\Delta(n_{\max})$ — приращение порядка изохром на контуре, соответствующем приращению прикладываемой нагрузки.

Высокая точность этого сравнительного метода заключается в использовании отношения (4), благодаря чему ошибки, обусловленные краевыми эффектами, экстраполяционными и другими факторами, могут быть сведены к минимуму.

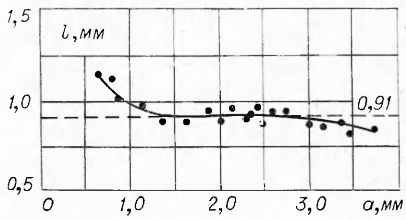
В данном исследовании различие в приращениях максимального порядка изохром для отверстий различного радиуса находилось путем графического экстраполирования с использованием круговой поляризации при увеличенном изображении интерференционных полос. Кроме того, различные отверстия в одном образце с картинами изохром около них увеличивались до одинакового радиуса, затем эти картины сравнивались. Для определения положения порядков и граничных наблюдений применялся оптический компаратор. Использовался в основном монохроматический свет с длиной волны 546,1 мкм.



Фиг. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3

На фиг. 2 показана эмпирическая зависимость коэффициента концентрации напряжений k от радиуса отверстия для одного и того же материала полосы (кривая *1* — $G_1/G_2 = 0$; *2* — $G_1/G_2=\infty$).

Полагая равными теоретическое и экспериментальное значения коэффициента концентрации напряжений, можно определить значение упругой постоянной l. Это определение было сделано для случая $G_1/G_2 = 0$, и его результаты представлены на фиг. 3, где видно, что в ряде случаев значения l зависят от величины радиуса отверстия (кривая линия). Прямая линия, параллельная оси абсцисс, соответствует идеальному случаю — значения l не зависят от радиуса отверстия. Наибольшие расхождения получаются в случае очень малых отверстий, при сравнительно больших отверстиях имеются некоторые несовпадения. Резкое увеличение l в области очень малых отверстий объясняется тем, что размер отверстия и толщина полосы становятся величинами одного порядка. Приложение моментной теории к конкретному напряженному состоянию требует, чтобы отношение a/l было достаточно велико по сравнению с единицей (но не больше 10), на что указано в работе [2]. Что касается некоторого уменьшения l в области больших отверстий, то это, по-видимому, объясняется тем, что здесь начинают сказываться граничные условия для полосы конечной ширины, не выполненные полностью в аналитическом решении по моментной теории упругости.

Поступила 30 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кувшинский Е. В., Аэро Э. Л.** Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения.— ФТТ, 1963. т. 5, № 9, с. 2591—2598.
2. **Миндлин Р.** Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений.— Сб. пер. Механика, 1964, № 4.
3. **Миндлин Р.** Микроструктура в линейной упругости. — Сб. пер. Механика, 1964, № 4.
4. **Ширяев Я. М.** Исследование влияния масштабного фактора на концентрацию напряжений около отверстий.— «Механика полимеров», 1970, № 3, с. 565—566. № 1642-70 деп. в ВИНИТИ.
5. **Ширяев Я. М.** Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений вблизи цилиндрической неоднородности в растянутой полосе.— «Изв. высш. учебн. заведений. Машиностроение», 1974. № 8, с. 13—17.
6. **Perkins R. W.** Experimental evidence of a couple-stress effect.— «AIAA J.», 1973, vol. 11, N 7, p. 1053—1055.