ПМТФ, № 4, 1963

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ГАЗОВОМ ОБЪЕКТЕ ПРИ НАЛИЧИИ САМОПОГЛОЩЕНИЯ

А. В. Иванов, М. М. Скотников

(*Москва*)

При оптических исследованиях высокотемпературных излучающих осесимметричных газовых объектов возникает задача перехода от полученного в эксперименте распределения по хордам усредненных значений коэффициента поглощения, яркости и температуры к истинному их распределению.

Имеются решения этой задачи для отдельных частных случаев, предполагающих либо малость оптической толщины [1-4], либо постоянство коэффициента поглощения [5].

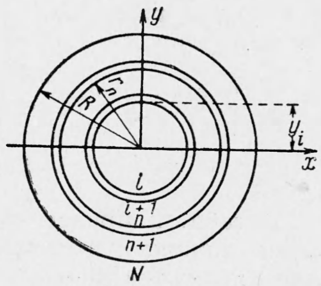
В настоящей работе описывается метод расчета с учетом переменности коэффициента поглощения и при значениях испускательной способности объекта от 0.2 до 0.9.

Метод основан на решении уравнения переноса излучения, которое после его интегрирования и ряда преобразований записывается в координатах r, y (фигура) следующим образом:

$$\frac{J_\nu(y)}{2\sqrt{1-\varepsilon_\nu(y)}} = \int_y^R \varkappa_\nu(r) B_\nu(r, T) \operatorname{ch}\left[\int_y^r \varkappa_\nu(r) \frac{rdr}{\sqrt{r^2-y^2}}\right] \frac{rdr}{\sqrt{r^2-y^2}} \tag{1}$$

где $J_\nu(y)$ — интенсивность излучения, выходящая из объекта вдоль хорды с координатой y; $B_\nu(r, T)$ — значение функции Планка при температуре T и на расстоянии r от оси; $\varepsilon_\nu(y)$ — поглощательная способность слоя газа на хорде y; $\varkappa_\nu(r)$ — коэффициент поглощения, а индекс ν указывает на то, что все величины взяты для частоты ν.

Уравнение (1) является уравнением Вольтерра 1-го рода относительно функции $\varkappa_\nu(r) \times B_\nu(r, T)$. После разбиения всей струи на N концентрических зон и предположения о том, что $\varkappa_\nu(r)$ и $B_\nu(r, T)$ в каждой зоне постоянные, оно может быть сведено к системе линейных алгебраических уравнений первой степени



$$I_\nu(y_i) = \sum_{n=i}^{N-1} s_{in} B_\nu(r_n) \qquad (i = 1, \ldots, N-1)$$

$$\left(I_\nu(y_i) = \frac{J_\nu(y_i)}{2\sqrt{1-\varepsilon_\nu(y_i)}}\right) \tag{2}$$

с матрицей преобразования S, являющейся в данном случае верхней треугольной, элементы которой суть

$$s_{in} = \operatorname{sh} \tau_{in+1} - \operatorname{sh} \tau_{in} \tag{3}$$

Здесь τ_{in} — оптическая толщина участка i-й хорды, лежащего между i-й и n-й зонами, и ее значение равно

$$\tau_{in} = R \sum_{j=i}^{n} a_{ij} \varkappa_\nu(r_j) \tag{4}$$

Таблица 1

j	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$
1	0.173								
2	0.110	0.224							
3	0.183	0.123	0.265						
4	0.103	0.112	0.135	0.300					
5	0.102	0.107	0.120	0.147	0.332				
6	0.101	0.105	0.113	0.127	0.158	0.361			
7	0.101	0.104	0.109	0.118	0.135	0.159	0.387		
8	0.101	0,103	0,107	0.113	0.124	0.142	0.178	0.387	
9	0.101	0,102	0,105	0.110	0.118	0.129	0.148	0,188	0.436

а коэффициенты a_{ij} определяются выражением

$$a_{ij} = \frac{\sqrt{(j+1)^2 - i^2} - \sqrt{j^2 - i^2}}{N} \qquad (i \leqslant j \leqslant N-1)$$

которые приведены в табл. 1 для $N = 10$.

Если из эксперимента известны значения поглощательной способности $\varepsilon_\nu(y)$ на каждой хорде осесимметричного потока, то получающееся для $\varkappa_\nu$ уравнение Абеля

$$-\ln\left[1 - \varepsilon_\nu(y)\right] = 2\int_y^R \varkappa_\nu(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - y^2}} \tag{5}$$

может быть приближенно решено с помощью метода, предложенного для теневых и интерферометрических исследований. Смысл последнего состоит в том, что вся осесимметричная струя разбивается на N концентрических зон, в каждой из которых параметры полагаются постоянными.

Для коэффициента поглощения при этом получаем

$$\varkappa_\nu(r_i) = \frac{1}{\pi R}\left[\varphi_N\theta_i + \varphi_i\omega_{ii} + \sum_{n=i+1}^{N-1}\varphi_n\Omega_{in}\right] \tag{6}$$

где φ_N — значение экспериментальной функции $\varphi_i = -\ln[1 - \varepsilon_\nu(y_i$ у видимой границы струи, а численные коэффициенты определяются по формулам

$$\omega_{in} = N\ln\frac{n+1+\sqrt{(n+1)^2 - i^2}}{n + \sqrt{n^2 - i^2}}, \qquad \Omega_{in} = \omega_{in} - \omega_{i\,n-1}$$

$$\theta_i = \frac{1}{\sqrt{1-(i/N)^2}} - \omega_{iN-1} \tag{7}$$

В табл. 2 приведены значения этих коэффициентов для $N = 10$. Здесь нижняя строка чисел дает значения θ_i, диагональные элементы таблицы являются коэффициентами ω_{ii}, а все остальные суть Ω_{in}.

После того как найдено распределение $\varkappa_\nu$, элементы s_{in} матрицы S находятся с помощью выражений (3) и (4).

Укажем, что элементы s_{in} могут быть найдены непосредственно через замеренные значения оптических толщин $2\tau_{iN}$ по различным хордам. Значения $2\tau_{iN}$, как нетрудно видеть, связаны с $\varepsilon_\nu(y_i)$ соотношением $1 - \varepsilon_\nu(y_i) = \exp(-2\tau_{iN})$. Из выражения (4) нетрудно получить рекуррентное соотношение

$$\tau_{in} = \tau_{in+1} - \frac{a_{in}}{a_{nn}}\tau_{nn+1} \qquad (n > i) \tag{8}$$

Таблица 2

n	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$
1	13.17								
2	—8.711	9.624							
3	—1.452	—6.079	7.953						
4	—0.715	—1.047	—4.92	6.931					
5	—0.436	—0.540	—0.849	—4.249	6.223				
6	—0.267	—0.338	—0.443	—0.729	—3.78	5.696			
7	—0.212	—0.235	—0.282	—0.383	—0.647	—3.208	5.283		
8	—0.161	—0.174	—0.199	—0.245	—0.341	—0.817	—3.18	4.949	
9	—0.127	—0.134	—0.149	—0.175	—0.218	—0.309	—0.540	—2.968	4.67
θ_i	—0.082	—0.059	—0.06	—0.062	—0.081	—0.112	—0.166	—0.312	—2.38

при помощи которого можно последовательно, идя от внешних зон к внутренним, рассчитать оптические толщины τ_{in} через экспериментально полученные значения τ_{iN}, не прибегая при этом к расчету распределения коэффициента поглощения. После нахождения элементов оптических толщин τ_{in} значения коэффициентов s_{in} находятся по формуле (3).

Как только значения элементов s_{in} для данного конкретного случая найдены, решение системы (2) может быть выполнено большим числом способов, в том числе с помощью совершения лишь обратного хода (ввиду треугольности матрицы S) метода вычислений Гаусса. При этом для функции Планка получаем

$$B_\nu(r_i) = \frac{1}{s_{ii}}\left[I_\nu(y_i) - \sum_{n=i+1}^{N-1} s_{in} B_\nu(r_n)\right] \tag{9}$$

Последний путь для данной задачи особенно прост и легко поддается программированию на вычислительные машины.

Если исследуемый объект характеризуется умеренным самопоглощением (оптическая толщина меньше 0.2), то после разложения в ряд члена

$$\operatorname{ch}\left[\int_y^r \varkappa_\nu(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-y^2}}\right]$$

и пренебрежения величинами второго порядка малости уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{J_\nu(y)}{\sqrt{1-\varepsilon_\nu(y)}} = 2\int_y^R \varkappa_\nu(r) B_\nu(r, T)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-y^2}} \tag{10}$$

Уравнение (10) является интегральным уравнением Абеля относительно функции $\varkappa_\nu(r)\,B_\nu(r, T)$ и оказывается сходным с уравнением, полученным для случая умеренного самопоглощения в работе [4]. Решение уравнения (10) может быть записано по аналогии с (6)

$$\varkappa_\nu(r_i)\,B_\nu(r_i) = \frac{1}{\pi R}\left[\frac{J_\nu(y_N)}{\sqrt{1-\varepsilon_\nu(y_N)}}\theta_i + \frac{J_\nu(y_i)}{\sqrt{1-\varepsilon_\nu(y_i)}}\omega_{ii} + \sum_{n=i+1}^{N-1}\frac{J_\nu(y_n)}{\sqrt{1-\varepsilon_\nu(y_n)}}\Omega_{in}\right] \tag{11}$$

где коэффициенты θ_i, ω_{ii}, Ω_{in} определяются формулами (7).

При $\varepsilon_\nu \to 0$ уравнение (10) переходит в известное уравнение для тонкого осесимметричного объекта. Спектральная яркость для этого случая может быть получена по аналогии с (11).

Если в каком-либо конкретном случае можно считать, что коэффициент поглощения $\varkappa_\nu$ приблизительно постоянный по всей струе, то, полагая в уравнении (1) $\varkappa_\nu = \text{const}$, получаем интегральное уравнение типа свертки. Последнее может быть разрешено при помощи применения преобразования Лапласа.

При этом для распределения функции Планка получаем

$$B_\nu(r, T) = \frac{2}{\varkappa_\nu \pi} I_\nu(R) \frac{\cos \varkappa_\nu \sqrt{R^2 - r^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}} - \frac{2}{\varkappa_\nu \pi} \int_r^R \frac{dI_\nu(y)}{dy} \frac{\cos \varkappa_\nu \sqrt{y^2 - r^2}}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy \qquad (12)$$

Оценка полной погрешности предлагаемого метода является довольно сложной задачей, ввиду чего анализ точности должен проводиться каждый раз отдельно для каждого конкретного случая. При этом необходимо иметь в виду, что накопление погрешности происходит от различных источников.

Первым источником погрешности предложенного метода является представление искомых функций в виде ступенчатых, так чтобы в каждой зоне искомые $\varkappa_\nu(r)$ и $B_\nu(r, T)$ были постоянными. Как уже было сказано, такое предположение позволило свести уравнение Абеля для $\varkappa_\nu(r)$ и уравнение Вольтерра 1-го рода для $\varkappa_\nu(r) B_\nu(r, T)$ к системам линейных алгебраических уравнений первой степени. Ясно, что эти системы алгебраических уравнений лишь приближенно описывают реальные процессы и ошибка, происходящая от такого «ступенчатого» представления функций $\varkappa_\nu(r)$ и $B_\nu(r, T)$, будет для каждой из них

$$\Delta_1 \varkappa_\nu = \frac{1}{N} R \frac{d\varkappa_\nu}{dr}, \qquad \Delta_1 B_\nu = \frac{1}{N} R \frac{dB_\nu}{dr} \qquad (13)$$

где $1 / N$ — ширина зоны, а индекс (1) означает, что написанные выражения для ошибок относятся к источнику, о котором говорилось выше.

Другим источником погрешности в определении $\varkappa_\nu(r)$ и $B_\nu(r, T)$ являются ошибки в определении исходных экспериментальных данных. Действительно, если в системе линейных алгебраических уравнений (2) элементы s_{in} матрицы S и величины $I_1, \ldots, I_N$ определены с некоторой ошибкой, то фактически решается другая система, вообще говоря, отличная от системы (2).

Аналогичное обстоятельство имеет место и при определении распределения $\varkappa_\nu(r)$. Нахождение погрешности, происходящей от этого источника, сводится по существу к выяснению вопроса об обусловленности конкретной системы алгебраических уравнений. В случае плохой обусловленности системы даже небольшие ошибки в определении исходных данных могут привести к значительным погрешностям в получаемых результатах — система неустойчива. Мерой обусловленности системы может служить число Тюринга [6].

Ввиду достаточной сложности ошибки, происходящие от этого источника, рассматривались в настоящей работе лишь качественно. При этом был получен совершенно естественный результат, показывающий, что погрешности сильно возрастают соответственно при очень малых и очень больших оптических толщинах излучающей осесимметричной струи (малые ε_ν и $\varepsilon_\nu \to 1$). Проведенное рассмотрение показывает также, что для получения удовлетворительной точности расчета необходимо так разбивать струю на кольцевые зоны, чтобы каждая из них имела небольшую оптическую толщину.

Последний результат вместе с (13) накладывает требования на выбор соответствующего числа зон разбиения.

Кроме указанных источников погрешностей неизбежно влияют на полученный результат ошибки при подсчете коэффициентов и погрешности, связанные с округлением чисел в процессе вычислений.

Следует особо отметить, что предложенный расчет строго справедлив для чисто монохроматического излучения. При желании распространить данный метод для некоторого участка длин волн $\Delta\lambda$, необходимо учитывать частотную зависимость коэффициента поглощения, что является очень сложной задачей и в настоящей работе не рассматривается. Поэтому данный метод может быть использован лишь в таких случаях, когда коэффициент поглощения в выбранном спектральном интервале практически не меняется. Такие условия можно осуществить при работе в области непрерывного спектра и при выделении узкого однородного участка контура спектральной линии с помощью прибора высокой разрешающей способности.

Авторы выражают свою признательность Г. И. Петрову за проявленное внимание и интерес к работе, а также Л. Н. Дубровскому за ряд ценных советов при обсуждении работы в ходе ее выполнения и при просмотре рукописи.

Поступила 2 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Hörman H. Temperaturverteilung und Elektronendichte in frei brennenden Lichtbögen. Z. Phys., 1935, Bd. 97. Nr. 9/10, S. 539—560.
2. Pearce W. J. Calculation of the Radical Distribution of Photon Emitters in Symmetric Source. Conference on extremely high temperatures. 1st. Boston, 1958.
3. Meek J. M., Craggs J. D. Electrical breakdown of gases. Oxford, Clarendon press, 1953.
4. Freeman M. P., Katz S. Determination of the Radial Distribution of Brightness in a Cylindrical Luminous Medium with Self-Absorption. J. Opt. Soc. America, 1960, vol. 50, Nu. 8.
5. Дубровская О. Н. Определение полей температуры пламени по инфракрасному излучению. Тр. комиссии по пирометрии при ВНИИМ, Сб. № 1. Стандартгиз. М.—Л., 1958.
6. Тюринг А. Ошибки округления в матричных процессах. УМН, 1951, т. 6, вып. 1(41).