7. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волнообразование при течении пленки жидкости на вертикальной стенке.— ПМТФ, 1979, № 6.
8. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1.
9. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.
10. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 2.
11. Цвелодуб О. Ю. Стационарные бегущие волны на вертикальной пленке жидкости.— В кн.: Волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980.
12. Цвелодуб О. Ю. Солитоны на стекающей пленке при умеренных расходах жидкости.— ПМТФ, 1980, № 3.
13. Гапонов В. А. Пакет подпрограмм быстрого преобразования Фурье с приложениями к моделированию случайных процессов. Препринт 14—76. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1976.
14. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Десорбция слаборастворимого газа из стекающих волновых пленок жидкости.— В кн.: Расчет тепломассообмена в энергохимических процессах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.
15. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости.— ИФЖ, 1976, т. 30, № 5.

Поступила 25/VI 1984 г.

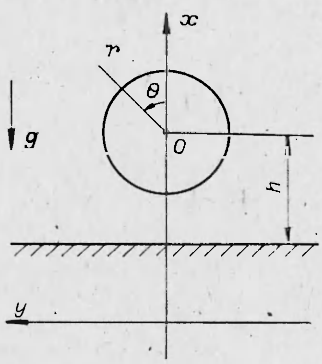
УДК 532.582

О ДВИЖЕНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ВИБРИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В. Л. Сенницкий

(Новосибирск)

В [1] изложены качественные результаты экспериментов с вибрирующими жидкостями и твердыми телами. В частности, указано, что тело, помещенное в цилиндрический сосуд с жидкостью, плотность которой больше, чем плотность тела, может тонуть, если сосуд совершает колебания вдоль своей оси. В связи с этим в данной работе рассматривается плоская задача о движении в поле силы тяжести кругового цилиндра, находящегося в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной извне плоской поверхностью колеблющейся стенки (см. фигуру). Первоначально жидкость и цилиндр покоятся. В последующие моменты времени течение жидкости потенциально и симметрично относительно оси x, цилиндр движется поступательно. Найдены условия, при выполнении которых цилиндр, плотность которого меньше, чем плотность окружающей его жидкости, не всплывает, а тонет.



1. Пусть x, y — инерциальная система прямоугольных координат в плоскости течения; $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные векторы, направления которых совпадают соответственно с направлениями осей x и y; t—время; a—радиус цилиндра; $O(L, 0)$ — точка пересечения плоскости течения с осью цилиндра; h — расстояние от точки O до линии пересечения плоскости течения с поверхностью стенки ($h > a$); h_0 — значение h при $t = 0$; $H = L - h$; $\hat{x} = x - H$; $r = \sqrt{(\hat{x} - h)^2 + y^2}$; θ — угол с вершиной в точке O между векторами $\mathbf{i}$ и $(\hat{x} - h)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; $\rho_ц$ — плотность цилиндра; $\rho_ж$ — плотность жидкости; f — произвольная функция от t; $\mathbf{g} = -g\mathbf{i}$ — ускорение свободного падения.

Будем рассматривать течение жидкости и движение цилиндра относительно системы координат $\hat{x}$, y, связанной со стенкой. Потенциал Φ скорости течения, давление p и расстояние h удовлетворяют следующим уравнениям и условиям:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{x}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \frac{p}{\rho_ж} + \left(g + \frac{d^2H}{dt^2}\right)\hat{x} = f; \quad (1.1)$$

$$(1.2) \qquad \partial^2\Phi/\partial\widehat{x}^2 + \partial^2\Phi/\partial y^2 = 0;$$

$$(1.3) \qquad \partial\Phi/\partial\widehat{x} = 0 \text{ при } \widehat{x} = 0;$$

$$(1.4) \qquad \partial\Phi/\partial y = 0 \text{ при } y = 0,\ 0 \leqslant \widehat{x} \leqslant h - a \text{ и } y = 0,\ \widehat{x} \geqslant h + a;$$

$$(1.5) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\widehat{x}}\cos\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\sin\theta = \frac{dh}{dt}\cos\theta \quad \text{при} \quad r = a;$$

$$(1.6) \qquad \partial\Phi/\partial\widehat{x} \to 0,\ \partial\Phi/\partial y \to 0 \text{ при } \widehat{x}^2 + y^2 \to \infty;$$

$$(1.7) \qquad d^2h/dt^2 = F/(\pi a^2\rho_{ц}) - g - d^2H/dt^2;$$

$$(1.8) \qquad h = h_0,\ dh/dt = 0 \text{ при } t = 0,$$

где

$$(1.9) \qquad F = -a\int\limits_{-\pi}^{\pi} p\,|_{r=a}\cos\theta\, d\theta.$$

2. Рассмотрим задачу (1.2)—(1.6). Переходя в (1.2)—(1.6) к биполярным координатам η, ξ, связанным с $\widehat{x}$, y равенствами

$$(2.1) \qquad \widehat{x} = \sqrt{h^2 - a^2}\,\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \quad y = \sqrt{h^2 - a^2}\,\frac{\sin\xi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi},$$

получим

$$(2.2) \qquad \partial^2\Phi/\partial\eta^2 + \partial^2\Phi/\partial\xi^2 = 0;$$

$$(2.3) \qquad \partial\Phi/\partial\eta = 0 \text{ при } \eta = 0,\ \xi \neq 0;$$

$$(2.4) \qquad \partial\Phi/\partial\xi = 0 \text{ при } \xi = \pm\pi \text{ и } \xi = 0,\ \eta \neq 0;$$

$$(2.5) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = a\sqrt{h^2 - a^2}\,\frac{a - h\cos\xi}{(h - a\cos\xi)^2}\,\frac{dh}{dt} \quad \text{при} \quad \eta = \eta_0;$$

$$(2.6) \qquad (1 - \operatorname{ch}\eta\cos\xi)\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} - \operatorname{sh}\eta\sin\xi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \to 0,$$

$$-\operatorname{sh}\eta\sin\xi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + (\operatorname{ch}\eta\cos\xi - 1)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \to 0 \quad \text{при} \quad \eta^2 + \xi^2 \to 0,$$

где

$$(2.7) \qquad \eta_0 = \ln\frac{h + \sqrt{h^2 - a^2}}{a}.$$

Функции $\eta = \eta(\widehat{x}, y)$, $\xi = \xi(\widehat{x}, y)$ осуществляют отображение области течения с разрезом вдоль отрезка $0 \leqslant \widehat{x} \leqslant h - a$, $y = 0$ на прямоугольник $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$, $-\pi \leqslant \xi \leqslant \pi$. Применяя метод разделения переменных и используя равенство

$$(2.8) \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{h\cos\xi - a}{(h - a\cos\xi)^2}\cos m\xi\, d\xi = \frac{2m\pi}{a}\,e^{-m\eta_0} \quad \text{при} \quad m = 0, 1, \ldots,$$

найдем следующее решение задачи (2.2)—(2.6):

$$(2.9) \qquad \Phi = -2\sqrt{h^2 - a^2}\,\frac{dh}{dt}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch} m\eta\cos m\xi}{e^{m\eta_0}\operatorname{sh} m\eta_0} + \varphi,$$

где φ — произвольная функция от t. Равенствами (2.1), (2.7), (2.9) определяется решение задачи (1.2)—(1.6).

Подставим (2.9) в (1.1). Используя полученное в результате этого соотношение и (1.9), (2.1), (2.5), (2.8), найдем

$$(2.10) \qquad F = \pi a^2\rho_{ж}\left[g + \frac{d^2H}{dt^2} + f_1\frac{d^2h}{dt^2} + f_2 a^{-1}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right],$$

где

$$f_1 = -4\,\mathrm{sh}^2\,\eta_0 \sum_{m=1}^{\infty} a_m, \quad a_m = m e^{-2m\eta_0}\,\mathrm{cth}\,m\eta_0; \tag{2.11}$$

$$f_2 = 2\,\mathrm{sh}\,\eta_0 \sum_{m=1}^{\infty} b_m + 4\,\mathrm{sh}\,\eta_0\,(\mathrm{ch}^2\,\eta_0 + 1) \sum_{m=1}^{\infty} c_m - \frac{\mathrm{ch}\,\eta_0}{\mathrm{sh}^2\,\eta_0}, \tag{2.12}$$

$$b_m = m e^{-2m\eta_0}\,\mathrm{cth}\,m\eta_0\,[m\,\mathrm{cth}\,m\eta_0 + (m+1)\,e^{-\eta_0}\,\mathrm{ch}\,\eta_0\,\mathrm{cth}\,(m+1)\,\eta_0],$$

$$c_m = m e^{-2m\eta_0}\,(m - \mathrm{cth}\,\eta_0)\,\mathrm{cth}\,m\eta_0.$$

Ряды в (2.11), (2.12) и их остатки удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\sum_{m=N}^{\infty} a_m < \left(N + \frac{1}{2}\right)\mathrm{cth}^3\,\frac{\varepsilon}{2}\,e^{-2N\eta_0}, \tag{2.13}$$

$$\sum_{m=N}^{\infty} b_m < 2\,(N+2)^2\,\mathrm{cth}^5\,\frac{\varepsilon}{2}\,e^{-2N\eta_0},$$

$$\left|\sum_{m=N}^{\infty} c_m\right| < (N+2)^2\,\mathrm{cth}^4\,\frac{\varepsilon}{2}\,e^{-2N\eta_0} \quad \text{при} \quad \eta_0 > \varepsilon,$$

где $N = 1, 2, \ldots$; ε — любое положительное число.

Отметим, что действия над рядами, произведенные при получении (2.9) и (2.10), являются допустимыми ввиду выполнения соответствующих достаточных условий [2].

3. Пусть T — период колебаний стенки;

$$H = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m \cos 2m\pi\frac{t}{T} + B_m \sin 2m\pi\frac{t}{T}\right), \tag{3.1}$$

A_0, A_m, B_m — постоянные,

$$A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m = 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} m B_m = 0; \tag{3.2}$$

A — наибольшее значение $|H|$. Согласно (2.7), (2.11)—(2.13), имеем

$$f_1 = -\left[1 + \frac{a^2}{2h^2} + O\left(\frac{a^4}{h^4}\right)\right], \quad f_2 = \frac{a^3}{2h^3}\left[1 + O\left(\frac{a^2}{h^2}\right)\right] \quad \text{при} \quad \frac{a}{h} \to 0. \tag{3.3}$$

Используя (2.10), (3.1), (3.3), найдем, что при не зависящем от времени L, $A \gtrsim a$ и $A/L \to 0$ выполняется равенство

$$F = \pi a^2 \rho_{ж} g\left[\bar{f} + \tilde{f} + O\left(\frac{a^2 A^3}{L^4 g T^2}\right)\right],$$

где $\bar{f} = 1 - \dfrac{\pi^2 k A^2 a^2}{L^3 g T^2}$, $k = A^{-2}\sum_{m=1}^{\infty} m^2\,(A_m^2 + B_m^2)$;

$\tilde{f} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_m \cos 2m\pi\frac{t}{T} + \tilde{B}_m \sin 2m\pi\frac{t}{T}\right)$, $\tilde{A}_m$, $\tilde{B}_m$ — постоянные. При $\rho_ц < \rho_ж$ сумма не зависящей от времени силы $\pi a^2 \rho_ж g \bar{f}$ и силы тяжести $-\pi a^2 \rho_ц g$, действующих на единицу длины цилиндра, отрицательна, если

$$\pi^2 k A^2 a^2 \rho_ж / [L^3(\rho_ж - \rho_ц) g T^2] > 1.$$

Этот результат указывает на то, что при достаточно малых значениях T круговой цилиндр, плотность которого меньше, чем плотность жидкости, в которой он находится, может не всплывать, а тонуть.

4. Рассмотрим задачу (1.7), (1.8), (2.7), (2.10)—(2.12). При $\rho_ц = \rho_ж$ она имеет решение $h = h_0$. Пусть

$$\rho_ц \neq \rho_ж,\ a/h_0 \to 0,\ A/h_0 \to 0,\ \mu \to 0, \tag{4.1}$$
$$aA/(\mu h_0^2) = \alpha,\ A/a > \beta,\ h/h_0 > \gamma,$$

где $\mu = h_0^{-1/2} g^{1/2} T$; α, β, γ — положительные числа ($\gamma < 1$). Используя (1.7), (2.10), (3.3), получим следующее приближенное уравнение:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\varkappa\left(g + \frac{d^2H}{dt^2}\right)\left(1 - \lambda\frac{a^2}{h^2}\right) + \lambda\frac{a^2}{h^3}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2, \tag{4.2}$$

где $\varkappa = (\rho_ц - \rho_ж)/(\rho_ц + \rho_ж)$; $\lambda = \rho_ж/[2(\rho_ц + \rho_ж)]$.

Будем решать задачу (1.8), (4.2) методом усреднения [3, 4]. Применяя подстановку

$$h = h_0 z - \varkappa H + \varkappa\lambda a^2 H/(h_0 z)^2,\ t = T\tau, \tag{4.3}$$

приведем (4.2) к системе уравнений в стандартной форме:

$$dz/d\tau = \mu Z, \tag{4.4}$$
$$dZ/d\tau = \mu\varkappa\{\alpha^2\varkappa\lambda A^{-2}[2H d^2H/d\tau^2 + (dH/d\tau)^2]z^{-3} - 1\}.$$

Используя (4.1), (4.3) и полученное ниже равенство, определяющее зависимость z от τ, можно проверить, что члены, отброшенные при переходе от (4.2) к (4.4), малы по сравнению с членами, сохраненными в (4.4). В первом приближении метода усреднения

$$z = \bar{z},\ Z = \bar{Z}, \tag{4.5}$$

где $\bar{z}$, $\bar{Z}$ — решение системы уравнений

$$d\bar{z}/d\tau = \mu\bar{Z},\ d\bar{Z}/d\tau = -\mu\varkappa(2\pi^2\alpha^2\varkappa\lambda k\bar{z}^{-3} + 1), \tag{4.6}$$

которая получается из уравнений (4.4) путем усреднения их по явно содержащемуся безразмерному времени τ (см. [3,4]). Ограничиваясь этим приближением, используя (4.5), (4.6), получим

$$d^2z/d\tau^2 = \mu^2\varkappa(\sigma z^{-3} - 1), \tag{4.7}$$

где $$\sigma = -2\pi^2\alpha^2\varkappa\lambda k.$$

Согласно (1.8), (3.1), (3.2), (4.3), имеем

$$z = 1,\ dz/d\tau = 0 \text{ при } \tau = 0. \tag{4.8}$$

Интегрируя (4.7) и используя (4.8), найдем

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^z \frac{s\,ds}{\sqrt{\varkappa(1-s)\left(s^2 - \frac{\sigma}{2}s - \frac{\sigma}{2}\right)}} = \begin{cases}\mu\tau & \text{при } 0<\sigma<1,\\ -\mu\tau & \text{при } \sigma<0 \text{ и } \sigma>1;\end{cases} \tag{4.9}$$

$$z = 1 \text{ при } \sigma = 1.$$

Отметим, что

$$\text{при } \sigma > 0\ \rho_ц < \rho_ж, \tag{4.10}$$
$$\text{при } \sigma < 0\ \rho_ц > \rho_ж.$$

Из (4.9) следует, что при $0 < \sigma < 1$ z монотонно возрастает, а при $\sigma < 0$ и $\sigma > 1$ z монотонно убывает с ростом τ. Таким образом, если a/h_0, A/h_0, μ малы, а A/a не мало по сравнению с единицей, и $\sigma > 1$, то, согласно (4.3), (4.9), (4.10), круговой цилиндр, плотность которого меньше, чем плотность жидкости, в которой он находится, тонет.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Челомей В. Н.** Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями.— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 1.
2. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970, т. 2.
3. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
4. **Митропольский Ю. А.** Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971.

Поступила 10/IV 1984 г.

УДК 532.526

СЖИМАЕМЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ С ПРИСОЕДИНЕННОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

В. Н. Ветлуцкий, Т. В. Поплавская

(Новосибирск)

1. При сверхзвуковом обтекании треугольной пластины справедливо разбиение течения за ударной волной на невязкое и пограничный слой, если числа Рейнольдса достаточно велики. На фиг. 1 по [1—5] представлена диаграмма режимов течения (на сфере с центром в вершине пластины) около треугольной пластины под углом атаки. Классификация дана как по характеру течения в окрестности передних кромок (режимы *A*, *B*), так и по наличию и положению особых линий тока на поверхности пластины (режимы *1—3*).

Режиму *A* соответствует сверхзвуковая передняя кромка, режиму *B* — дозвуковая. При этом головная ударная волна присоединена к вершине пластины и невязкое течение коническое. Существует еще режим, при котором головная ударная волна отходит от вершины пластины и течение становится существенно трехмерным. Однако мы ограничимся рассмотрением лишь конических течений.

На режиме *1* как в случае сверхзвуковой, так и дозвуковой передней кромки разделяющая поверхность тока приходит на кромку. Поперечная компонента скорости направлена от передних кромок к плоскости симметрии, где на поверхности пластины с наветренной и подветренной сторон располагается по одной линии стекания. С увеличением угла атаки коническая разделяющая поверхность тока разворачивается к плоскости симметрии. Начиная с некоторого момента, когда она подходит к поверхности пластины ортогонально, дальнейшее увеличение угла атаки приводит к ее перемещению в направлении плоскости симметрии (режим *2*), причем угол подхода к пластине, как показано в [6], сохраняется прямым. В этом режиме имеются две линии растекания, расположенные на поверхности пластины. Начиная с некоторого угла атаки линии растекания сливаются с линией стекания, и далее реализуется режим *3* с одной линией растекания с наветренной стороны и с одной линией стекания с подветренной стороны.

Строго говоря, коническое течение в указанных режимах может иметь место, лишь когда влияние задней кромки не распространяется вверх по потоку. А это реализуется, если компонента вектора скорости вдоль конической образующей сверхзвуковая. В противном случае коническое течение можно рассматривать лишь как приближенное в окрестности вершины пластины. В [7] показано, что для узких пластин режим *3* в указанном смысле может сохраняться до углов атаки порядка 90°, когда течение с наветренной стороны вдоль конической образующей направлено к вершине пластины.

Если угол между передней кромкой пластины и плоскостью симметрии больше угла Маха набегающего потока, то при увеличении угла атаки от нулевого до предельного пластина проходит все представленные на фиг. 1 режимы течения. В противном случае реализуются все режимы течения, кроме *A1*.

Невязкое обтекание плоской треугольной пластины на режиме *A1* исследовано в [8], где приведены подробные таблицы полей течения с наветренной и подветренной сторон в широком диапазоне чисел Маха и углов стреловидности. В [3, 5, 9] выполнен расчет конического обтекания пластины и профилированных крыльев на режимах *B1*, *B2*. Для расчета пограничного слоя на пластине необходимо знать на его внешней границе распределение давления, одну компоненту скорости (лучше поперечную) и значение энтропийной функции. К сожалению, приведенные в этих работах результаты не позволяют использовать их для расчета пограничного слоя. Поля невязкого обтекания треугольной пластины на режиме *B3* получены в [10, 11].

В случае конического внешнего течения уравнения пространственного пограничного слоя допускают автомодельное решение, зависящее от двух независимых пе-