

МАССОПЕРЕНОС В ДВУХСЛОЙНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. А. Рошаль

(Москва)

Массоперенос в реальных пористых средах при отсутствии физико-химического взаимодействия раствора с вмещающей средой характеризуется проявлением макродисперсии диффузионного потока, являющейся следствием фильтрационной неоднородности пористой среды [1,2]. При определенном соотношении параметров системы этот процесс становится преобладающим в сравнении с микродисперсией, вызванной неупорядоченностью поровой структуры, так что распределение концентраций в пространстве и времени может быть охарактеризовано им практически полностью.

Будем рассматривать линейную задачу массопереноса в системе чередующихся слоев существенно различной проницаемости, в которой движение жидкости осуществляется лишь по наиболее проницаемым слоям параллельно слоистости. При этом гидродинамический поток полагаем стационарным и стабилизированным, подчиняющимся линейному закону Дарси.

Элементарный анализ показывает [1-3], что при условии массообмена в фильтрационном потоке с лежащими выше и ниже слоями при имеющих место в реальных условиях значениях диффузионного критерия Пекле ($N_{Pe} \sim 10^3 \div 10^6$), кривизной распределения концентраций по направлению движения фильтрационного потока по сравнению с кривизной распределения концентраций и поперечном направлении можно пренебречь, т. е. перенос в проницаемых слоях осуществляется в основном вынужденной конвекцией, а в относительно непроницаемых — за счет молекулярной диффузии в свободном поровом пространстве.

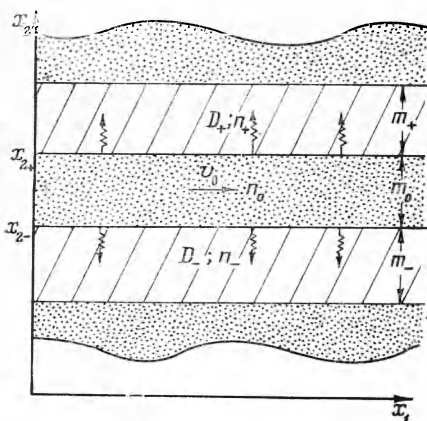
В соответствии с высказанными предпосылками уравнения массопереноса для проницаемых и относительно непроницаемых слоев запишутся соответственно в виде

$$n_0 \frac{\partial C_0}{\partial t} = \frac{1}{m_0} \left[D_+ \frac{\partial C_+}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_{2+}} + D_- \frac{\partial C_-}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_{2-}} \right] - v_0 \frac{\partial C_0}{\partial x_1} \quad (0.1)$$

$$n_{+-} \frac{\partial C_{+-}}{\partial t} = D_{+-} \frac{\partial^2 C_{+-}}{\partial x_2^2} \quad (0.2)$$

Здесь n_{+-} , D_{+-} — эффективная пористость и коэффициент молекулярной диффузии в относительно непроницаемых слоях, лежащих соответственно выше или ниже рассматриваемого проницаемого слоя со значениями ординат соответствующих границ x_{2+} и x_{2-} ; m_0 , n_0 — толщина и эффективная пористость проницаемого слоя; v_0 — скорость фильтрации потока, движущегося в направлении координаты x_1 (см. фигуру); C_0 , C_{+-} — относительная концентрация растворенного вещества в проницаемом и относительно непроницаемых слоях; t — текущее время; n_0 , C_0 — суть среднеинтегральные величины на отрезке $[x_{2-}, x_{2+}]$.

Дальнейшая постановка задачи сводится к построению для системы (0.1), (0.2), число уравнений которой соответствует числу рассматриваемых слоев, замыкающих краевых зависимостей, в частности, в предположении справедливости граничного условия четвертого рода на границе фильтрационного потока с относительно непроницаемым слоем.



1. **Изолированная двухслойная среда.** Будем рассматривать изолированную систему, представленную двумя горизонтальными слоями, существенно различной проницаемости, так что перечисленные выше допущения остаются справедливыми. Таким образом, ограничимся здесь решением «внутренней» задачи; это позволит наиболее полно охарактеризовать процесс в «чистом виде» вне зависимости от внешних условий.

Зададим на верхней и нижней границах системы условия «непроницаемости» и, введя обобщенные независимые переменные

$$\eta = \frac{D_+ x_1}{m_0 m_+ v_0}, \quad \tau = \frac{D_+ n_0}{n_+ m_+ v_0} \left(\frac{v_0}{n_0} t - x_1 \right), \quad y = \frac{x_2 - x_{2+}}{m_+} \quad (1.1)$$

запишем уравнения (0.1) и (0.2) для проницаемого и относительно непроницаемого слоя соответственно в виде

$$\frac{\partial C_0}{\partial \eta} - \frac{\partial C_+}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial C_+}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 C_+}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь m_+ — толщина относительно непроницаемого слоя.

Дополним систему уравнений (1.1) замыкающими зависимостями

$$C(y, \eta, 0) = 0, \quad \frac{\partial C(\eta, \tau)}{\partial y} = 0, \quad C(y, 0, \tau) = 1 \quad (1.3)$$

Преобразуем систему уравнений (1.2) с учетом нулевых начальных условий (первое уравнение (1.3)) по Лапласу, тогда

$$\frac{\partial U_0}{\partial \eta} - \frac{\partial U_+}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad \frac{\partial^2 U_+}{\partial y^2} - p U_+ = 0 \quad (1.4)$$

Здесь

$$U(\eta, p) = L\{C(\eta, \tau)\} = p \int_0^\infty e^{-p\tau} C(\eta, \tau) d\tau$$

по Карсону-Хэвисайду.

Общий интеграл второго уравнения (1.4) может быть представлен в виде

$$U_+ = A \operatorname{sh}(\sqrt{p} y) + B \operatorname{ch}(\sqrt{p} y) \quad (1.5)$$

Откуда, используя второе условие (1.3), получим первое уравнение (1.4) в виде

$$\frac{dU_0}{d\eta} + U_0 \sqrt{p} \operatorname{th} \sqrt{p} = 0 \quad (1.6)$$

И окончательно в соответствии с третьим условием (1.3) получим решение задачи для проницаемого слоя в пространстве изображений

$$U_0(\eta, p) = \exp[-\eta \sqrt{p} \operatorname{th} \sqrt{p}] \quad (1.7)$$

Интегральное представление функции, лапласово изображение которой имеет вид (1.7), можно получить из формулы обращения Меллина

$$C_0(\eta, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp[-\eta \sqrt{p} \operatorname{th} \sqrt{p} + p\tau] \frac{dp}{p} \quad (1.8)$$

Легко показать, что подынтегральная функция выражения (1.8) является однозначной по всей области комплексного переменного p , имеет простой полюс при $p = 0$ с вычетом, равным единице, и бесчисленное множество, существенно особых точек p_k , расположенных на отрицательной вещественной полуоси

$$p_k = -\frac{1}{4}\pi^2 (2k+1)^2 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

Кроме того, подынтегральная функция удовлетворяет лемме Жордана, откуда согласно теории вычетов функция (1.8) может быть представлена в виде сложных рядов θ -функций от нулевого аргумента и их производных по параметру¹.

Более удобная для численного вычисления значений функции интегральная форма может быть получена рядом элементарных преобразований из (1.8) в виде

$$C_0(\eta, \tau) = 0.5 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{1}{2} \eta z \frac{\operatorname{sh} z - \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \right] \times \\ \times \sin \left[\frac{1}{2} \tau z^2 - \frac{1}{2} \eta z \frac{\operatorname{sh} z + \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \right] \frac{dz}{z} \quad (1.9)$$

Далее, согласно (1.5) и второму условию (1.3) получим изображение для концентрации в относительно непроницаемом слое

$$U_+(y, \eta, p) = U_0(\eta, p) \frac{\operatorname{ch}(1-y) \sqrt{p}}{\operatorname{ch} \sqrt{p}} \quad (1.10)$$

Отсюда

$$C_+(y, \eta, \tau) = - \int_0^\tau C_0(\eta, \tau - \varepsilon) \frac{\partial \vartheta_2(1/2y; \varepsilon)}{\partial y} d\varepsilon \quad (1.11)$$

Здесь и далее ϑ_l (где $l = 0, 1, 2, 3$) — символы θ -функций.

Согласно (1.10) и (1.11) выражение для диффузионного потока в относительно непроницаемом слое можно представить в виде

$$q_+ = -D_+ \frac{\partial C_+}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_{2+}} = -\frac{D_+}{m_+} \frac{\partial C_+}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{D_+}{m_+} \int_0^\tau C_0(\eta, \tau - \varepsilon) \frac{\partial^2 \vartheta_2(0; \varepsilon)}{\partial y^2} d\varepsilon = \\ = \frac{D_+}{m_+} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau C_0(\eta, \tau - \varepsilon) \vartheta_2(0; \varepsilon) d\varepsilon \quad (1.12)$$

Вместе с тем, исходя из первого уравнения (1.2) и (1.9), диффузионный поток в относительно непроницаемом слое равен

$$q_+ = \frac{D_+}{m_+} \frac{\partial C_0}{\partial \eta} = \frac{D_+}{m_+} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{1}{2} \eta z \frac{\operatorname{sh} z - \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \right] \times \\ \times \left\{ \frac{\operatorname{sh} z - \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \sin \left[\frac{1}{2} \tau z^2 - \frac{1}{2} \eta z \frac{\operatorname{sh} z + \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} z + \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \cos \left[\frac{1}{2} \tau z^2 - \frac{1}{2} \eta z \frac{\operatorname{sh} z + \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \right] \right\} dz \quad (1.13)$$

Из (1.10) получим изображение для среднеинтегрального значения концентрации в относительно непроницаемом слое

$$U_+^*(\eta, p) = \int_0^1 U_+(y, \eta, p) dy = U_0(\eta, p) \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{th} \sqrt{p} \quad (1.14)$$

Соответствующий оригинал можно представить в виде

$$C_+^*(\eta, \tau) = \int_0^1 C_+(y, \eta, \tau) dy = \int_0^\tau C_0(\eta, \tau - \varepsilon) \vartheta_2(0; \varepsilon) d\varepsilon \quad (1.15)$$

¹ Определение θ -функций Якоби и их производных по параметру [4].

или в соответствии с (1.6) и (1.9)

$$C_+^*(\eta, \tau) = - \int_0^\tau \frac{\partial C_0}{\partial \eta} d\varepsilon = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp \left[\frac{1}{2} \eta z \frac{\operatorname{sh} z - \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \right] \times \\ \times \left\{ \frac{\operatorname{sh} z - \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \sin \left[\frac{1}{2} \tau z^2 - \frac{1}{2} \eta \tau \frac{\operatorname{sh} z + \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} z + \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \cos \left[\frac{1}{2} \tau z^2 - \frac{1}{2} \eta \tau \frac{\operatorname{sh} z + \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z} \right] \right\} \frac{dz}{z^2} \quad (1.16)$$

2. «Открытая» двухслойная среда. Рассмотрим в общем виде решение задачи для аналогичной двухслойной среды, полагая, что вне внешней границы относительно непроницаемого слоя располагается «идеально промываемая» среда, так что рассматриваемая двухслойная система является открытой. Иначе это означает, что концентрация внешней границы двухслойной системы отождествляется с концентрацией окружающей среды, которая, в свою очередь, предполагается постоянной в пространстве и времени. Таким образом, граничное условие для внешней границы (1.3) в этом случае примет вид

$$C(1, \eta, \tau) = 0 \quad (2.1)$$

откуда согласно (1.5) и первому уравнению (1.4) изображение для концентрации в проницаемом слое будет иметь вид

$$U_0(\eta, p) = \exp[-\eta \sqrt{p} \operatorname{cth} \sqrt{p}] \quad (2.2)$$

Оригинал, соответствующий лапласову изображению (2.2), может быть записан в форме, аналогичной (1.9). Характерно, что предельное решение задачи в данном случае будет иметь вид

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_0 = e^{-\eta} \quad (2.3)$$

Далее, согласно (1.5) и условию (2.1) получим следующее изображение:

$$U_+(y, \eta, p) = U_0(\eta, p) \frac{\operatorname{sh}(1-y) \sqrt{p}}{\operatorname{sh} \sqrt{p}} \quad (2.4)$$

Отсюда концентрация в относительно непроницаемом слое равна

$$C_+(y, \eta, \tau) = - \int_0^\tau C_0(\eta, \tau - \varepsilon) \frac{\partial \vartheta_3(1/2y; \varepsilon)}{\partial y} d\varepsilon \quad (2.5)$$

Изображение для диффузионного потока, проходящего через внешнюю границу относительно непроницаемого слоя, запишется так:

$$L\{q_{+-}\} = -D_- \frac{\partial U_+}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_{2+}+m_+} = -\frac{D_+}{m_+} \frac{\partial U_+}{\partial y} \Big|_{y=1} = -\frac{D_+}{m_+} U_0(\eta, p) \frac{\sqrt{p}}{\operatorname{sh} \sqrt{p}} \quad (2.6)$$

Соответствующий (2.6) оригинал может быть записан в виде

$$q_{+-} = \frac{D_+}{m_+} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\tau C_0(\eta, \tau - \varepsilon) \vartheta_0(0; \varepsilon) d\varepsilon = \frac{D_+}{m_+} \int_0^\tau C_0(\eta, \tau - \varepsilon) \frac{\partial^2 \vartheta_3(1/2; \varepsilon)}{\partial y^2} d\varepsilon \quad (2.7)$$

Диффузионный поток в относительно непроницаемом слое равен

$$q_{++} = \frac{D_+}{m_+} L^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{cth} \sqrt{p} U_0(\eta, p) \right\} = \frac{D_+}{m_+} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau C_0(\eta, \tau - \varepsilon) \vartheta_0\left(\frac{1}{2}; \varepsilon\right) d\varepsilon = \\ = \frac{D_+}{m_+} \int_0^\tau C_0(\eta, \tau - \varepsilon) \frac{\partial^2 \vartheta_3(0; \varepsilon)}{\partial y^2} d\varepsilon \quad (2.8)$$

Запишем изображение для среднеинтегрального значения концентрации в относительно непроницаемом слое

$$U_+^*(\eta, p) = \int_0^1 U_+(y, \eta, p) dy = -U_0(\eta, p) \left[\operatorname{cth} \sqrt{p} + \frac{i}{\operatorname{sh} \sqrt{p}} \right] \sqrt{p} \quad (2.9)$$

откуда соответствующий оригинал имеет вид

$$C_+^*(\eta, \tau) = - \int_0^\tau C_0(\eta, \tau - \varepsilon) \left[\vartheta_0\left(\frac{1}{2}; \varepsilon\right) - \vartheta_0(0; \varepsilon) \right] d\varepsilon \quad (2.10)$$

3. Асимптотические разложения. Легко видеть из изображения (1.7), что при малых τ и η асимптотическое разложение решения имеет вид

$$C_0(\eta, \tau) \approx L^{-1} \{ \exp[-\eta \sqrt{p}] \} = \operatorname{erfc} \left[\frac{\eta}{2 \sqrt{\tau}} \right] \quad (3.1)$$

Следует отметить, что решение (3.1) было получено Лаверье [3] для случая, когда относительно непроницаемый слой имеет бесконечную толщину.

Концентрация в относительно непроницаемом слое и диффузионный поток в этот слой будут при этом соответственно равны

$$C_+(y, \eta, \tau) \approx \operatorname{erfc} \left[\frac{\eta + y}{2 \sqrt{\tau}} \right] \quad (3.2)$$

$$q_+ \approx - \frac{D_+}{m_+ \sqrt{\pi \tau}} \exp \left[- \frac{\eta^2}{4\tau} \right] \quad (3.3)$$

Приведенные асимптотические разложения оказываются применимыми практически всегда (с погрешностью не более 5%) при $\tau < 0.25$ для любых значений η и y . Разложения (3.1) и (3.3) применимы также для любых значений τ при $\eta < 0.1$, а разложение (3.2) — при $\eta + y < 0.1$. Однако можно записать асимптотическое разложение для концентрации в относительно непроницаемом слое, на которое не накладывается дополнительное ограничение по y . Для этого достаточно подставить разложение (3.1) в формулу (1.14).

Второе асимптотическое разложение решения может быть получено из следующих соображений. Следуя общей теории мероморфных функций, запишем изображение (1.7) в виде

$$U_0(\eta, p) = \exp \left[-\eta \frac{2p}{p+2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p+2}{p + 1/4 \pi^2 (2k+1)^2} \right] \quad (3.4)$$

Ряд, стоящий в выражении (3.4), равномерно сходится к единице в круге радиусом $|p| = 2$. Следовательно, асимптотическое разложение для изображения (3.4) можно представить

$$U_0(\eta, p) \approx \exp \left[-\eta \frac{2p}{p+2} \right] \quad (3.5)$$

Далее

$$L^{-1} \left\{ \frac{2p}{p+2} \exp \left[-2\eta \frac{p}{p+2} \right] \right\} = 2 \exp[-(2\eta + 2\tau)] I_0(4 \sqrt{\eta \tau}) \quad (3.6)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; решение может быть записано в виде

$$C_0(\eta, \tau) \approx J(2\eta, 2\tau) \quad (3.7)$$

Функция

$$J(\sigma, \kappa) = 1 - e^{-\kappa} \int_0^{\sigma} e^{-z} I_0(2\sqrt{\kappa z}) dz \quad (3.8)$$

выведена Анцелиусом [5] и Шуманом [6], наиболее полно исследована Гольдштейном [7-11].

Можно показать, что решение (3.7) может быть получено непосредственно из системы уравнений (1.2), если положить

$$\left. \frac{\partial C_+}{\partial y} \right|_{y=0} = 2(C_+^* - C_0) \quad (3.9)$$

где C_+^* — значение концентрации в относительно непроницаемом слое в среднем сечении. Уравнение (3.9) предполагает существование на границе линейного закона массообмена, аналогично закону Ньютона, кроме того, в исходную систему должно быть введено условие бесконечной диффузионной проводимости относительно непроницаемого слоя. Таким образом, исходная система уравнений (1.2) должна принять вид

$$\frac{\partial C_0}{\partial \eta} = 2(C_+^* - C_0), \quad \frac{\partial C_+^*}{\partial \tau} = 2(C_0 - C_+^*) \quad (3.10)$$

На основании изображения (3.5) можно построить выражения для среднеинтегрального значения концентрации в относительно непроницаемом слое и диффузионного потока в относительно непроницаемый слой

$$\begin{aligned} C_+^*(\eta, \tau) &\approx C_+^*(\eta, \tau) = 2 \int_0^{2\tau} e^{-2(\eta+z)} I_0(4\sqrt{\eta z}) dz = \\ &= J(2\eta, 2\tau) - e^{-2(\eta+\tau)} I_0(4\sqrt{\eta\tau}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$q_+ \approx - \frac{2D_+}{m_+} e^{-2(\eta+\tau)} I_0(4\sqrt{\eta\tau}) \quad (3.12)$$

Численный анализ показывает, что асимптотические разложения (3.7), (3.11) и (3.12) практически применимы (с погрешностью менее 3%) при $\tau > \eta > 0.2$.

Асимптотические представления решения задачи для открытой двухслойной среды при малых значениях параметров η и τ , как это следует из лапласова изображения (2.2), совпадают с соответствующими представлениями для изолированной двухслойной среды (3.1), (3.2) и (3.3). При этом эти решения практически применимы (с погрешностью менее 5%) при $\tau < 0.15$ для любых значений η и y , а также при $\eta + y > 0.05$ для любых значений τ .

Второе асимптотическое разложение решений для открытой двухслойной среды получим по аналогии с тем, как это было сделано для изолированной двухслойной среды. Представим изображение (2.2) в виде

$$U_0(\eta, p) = \exp \left[-\eta - \eta \frac{2p}{p+6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p+6}{p+k^2\pi^2} \right] \quad (3.13)$$

Ряд, стоящий в выражении (3.13), равномерно сходится к единице в круге радиусом $|p| = 6$. Следовательно, асимптотическое разложение для концентрации в проницаемом слое открытой системы можно представить

$$C_0(\eta, \tau) \approx L^{-1} \left\{ \exp \left[-\eta - \eta \frac{2p}{p+6} \right] \right\} = e^{-\eta} J(2\eta, 6\tau) \quad (3.14)$$

Аналогичным образом могут быть построены и остальные асимптотические разложения решений задачи для открытой системы.

4. **Некоторые обобщения.** При малых значениях параметров η и τ , когда не сказывается ограничение в мощностях относительно непроницаемых слоев, решения задачи для существенно различных систем совпадают (3.1). Это дает возможность при известных условиях практически не учитывать массообменное взаимодействие различных проницаемых слоев через относительно непроницаемые.

Вырождение рассматриваемой схемы слоистой неоднородности должно наблюдаться и при больших значениях η и τ . Можно предположить, что при этом процесс будет описываться диффузионным уравнением с конвективным членом

$$N \frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} - D^* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad (4.1)$$

Здесь эффективные пористость и скорость фильтрации в квазиоднородном слое соответственно равны

$$N = \frac{m_+ n_+ + m_0 n_0}{m_+ + m_0}, \quad V = \frac{v_0 m_0}{m_+ + m_0} \quad (4.2)$$

Коэффициент D^* в уравнении (4.1) должен рассматриваться как эффективный коэффициент диффузии, а сам процесс может быть назван по аналогии с явлением конвективной диффузии — массообменной диффузией.

Докажем высказанное предположение, представив асимптотику изображения (3.5) в виде

$$U_0(\eta, \lambda) \approx \exp[(1/2 - \sqrt{1/4 + (a+1)\lambda})\eta] \quad (4.3)$$

Здесь

$$U_0(\eta, \lambda) = L^{-1}\{C_0(\eta, \omega)\}, \quad a = \frac{m_0 n_0}{m_+ n_+}, \quad \omega = \frac{D_0 t}{m_+^2 n_+}$$

Оригинал, соответствующий изображению (4.3), запишем в виде

$$C_0(\eta, \omega) \approx 0,5 \left\{ \operatorname{erfc} \left[\frac{(a+1)\eta - \omega}{2 \sqrt{(a+1)\omega}} \right] + e^\eta \operatorname{erfc} \left[\frac{(a+1)\eta + \omega}{2 \sqrt{(a+1)\omega}} \right] \right\} \quad (4.4)$$

Асимптотическое разложение (4.4) решения (3.7) применимо (с погрешностью не более 3%) при $\tau > \eta > 0.1$ (или $\omega > (a+1)\eta$; $\eta > 0.1$), т. е. применимо практически всегда, когда может быть применимо разложение (3.7).

Выражение (4.4) является решением диффузионной задачи (4.1) с первым и третьим краевыми условиями (1.3), если положить

$$D^* = \frac{m_+ m_0^2 v_0^2}{D_+ (m_0 + m_+)} \quad (4.5)$$

Остановимся подробнее на условии применимости разложений (3.7) и (4.4). С этой целью раскроем физический смысл неравенства $\eta < \tau$. Используя (1.1), после ряда преобразований получим условия применимости формул (3.7) и (4.4) в виде

$$(m_0 n_0 + m_+ n_+) x_1 < m_0 v_0 t \quad (4.6)$$

Следовательно, наступление квазистационарного режима массопереноса, характеризующегося массообменным законом (3.9), определяется тем моментом времени, когда объем профильтровавшейся жидкости через фиксированное единичное сечение x_1 превысит суммарную свободную ем-

кость системы. В работе [12] отмечается, что в принятой здесь терминологии, это условие соответствует моменту, когда сумма среднеинтегральных мгновенных значений концентраций в проницаемом и относительно непроницаемом слоях равна единице.

Однако условие (4.6) не является достаточным. В самом деле, входной участок потока должен характеризоваться резкой деформацией диффузионного потока в относительно непроницаемом слое, вызванной высокой интенсивностью процесса массоотдачи. Относительная величина этого участка однозначно определяется из условия применимости решений (3.7) и (4.4) при $\eta > 0.2$. В соответствии с (1.1) получим это условие в виде

$$\frac{x_1}{m_0} > 0.2 \frac{m_+ v_0}{D_+} = 0.2 N_{\text{Pe}} \quad (4.7)$$

где N_{Pe} — диффузионный критерий Пекле, построенный по характерному размеру — толщине относительно непроницаемого слоя и коэффициенту молекулярной диффузии в этом слое.

Здесь проявляется полная аналогия рассматриваемого явления с резкой перестройкой в процессе выработки устойчивого профиля концентраций в потоке самой жидкости на входном участке вблизи границы рассматриваемой области. Кроме того, величины этих участков оказываются соизмеримыми, но, поскольку в принятых допущениях деформация профиля концентраций не учитывалась вообще, длина участка (4.7) оказывается фактически несколько завышенной.

В заключение автор выражает благодарность Шестакову В. М. за тему работы и ряд ценных замечаний.

Поступила 29 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Малофеев Г. Е. К расчету распределения температур в пласте при закачке горячей жидкости в скважину, Изв. вузов, Нефть и газ, 1960, № 7.
2. Шестаков В. М. К теории фильтрации растворов в грунтах. В сб.: «Вопросы формирования химического состава подземных вод», М., Изд-во МГУ, 1963.
3. Lauwerier H. A. The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid. Appl. Scient. Res., 1955, vol. 5, Sect A, No. 2/3.
4. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье, М., «Наука», 1967.
5. Anzeli us A. Über Erwärmung vermittels durchströmender Medien, Z. angew. Math. und Mech., 1926, Bd. 6, H. 4.
6. Schumann T. E. W. Head transfer: a liquid flowing through a porous prism. J. of Franklin Inst., 1929, vol. 208, No. 3.
7. Goldstein S. On the mathematics of exchange processes in fixed columns, pt. 1. Mathematical solutions and asymptotic expansions. Proc. Roy. Soc., 1953, vol. 219A, No. 1137.
8. Goldstein S. On the mathematics of exchange processes in fixed columns, pt. 2. The equilibrium theory as the lim limit of the kinetic theory. Proc. Roy. Soc., 1953, vol. 219A, No. 1137.
9. Goldstein S., Murray J. D. On the mathematics of exchange processes in fixed columns, pt. 3. The solution for general entry conditions and a method of obtaining asymptotic expressions. Proc. Roy. Soc., 1959, vol. 252A, No. 1270.
10. Goldstein S., Murray J. D. On the mathematics of exchange processes in fixed columns, pt 4. Limiting values and correction terms, for the kinetic theory solution with general entry conditions. Proc. Roy. Soc., 1959, vol. 252A, No. 1270.
11. Goldstein S., Murray J. D. On the mathematics of exchange processes in fixed columns, pt 5. The equilibrium theory and perturbation solutions and their connexion with kinetic — theory solutions, for general entry conditions. Proc. Roy. Soc., 1959, vol. 252A, No. 1270.
12. Караваев Н. М., Майков В. П. Метод определения коэффициентов теплоотдачи в слое зернистого материала. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 6.