Рассмотрим случай малых деформаций при другом определении эффективного напряжения:

$$s = \sigma_0/(1-\omega). \tag{11}$$

В этом случае (3), (11) приводят к следующей зависимости $\dot{\omega}(t)$:

$$\dot{s} = \frac{\sigma_0\dot{\omega}}{(1-\omega)^2}, \quad \dot{\omega} = \frac{f}{\left[1 - \frac{\sigma_0 g'}{(1-\omega)^2}\right]}. \tag{12}$$

Предельное значение ω^* при степенной функции (9) в соответствии с (12) имеет вид

$$\omega^* = 1 - D_2\sigma_0^{m/(m+1)}, \quad D_2 = (Cm)^{1/(m+1)}. \tag{13}$$

Таким образом, в случае малых деформаций определение эффективного напряжения в форме (10) или (11) приводит к монотонному убыванию $\omega^*(\sigma_0)$ в форме соответственно логарифмической или степенной зависимости. Из (13) следует, что $0 < \omega^* < 1$, т. е. разрушение при ползучести всегда наступает при неполном заполнении поперечного сечения трещинами.

Автор выражает благодарность Т. М. Аверьяновой, Л. И. Грязновой и В. И. Николаеву за помощь при проведении экспериментов.

Поступила 3 XI 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. **Мякотин Е. А., Шестериков С. А.** Установка на девять трубчатых образцов для исследования длительной прочности металлов в сложном напряженном состоянии.— В сб.: Деформирование и разрушение твердых тел. М.: Изд-во МГУ, 1977.
3. **Broberg H.** A new criterion for brittle creep rupture.— Transactions of ASME, 1974, vol. E41, N 3.
4. **Boström P. O., Broberg H., Bräthe L., Chrzanowski M.** On failure conditions in viscoelastic media and structures.— In: Int. Symposium on Mechanics of Viscoelastic Media and Bodies. Gothenburg. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

УДК 539.374

ВАРИАНТ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА СДВИГОВОМ МЕХАНИЗМЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

А. М. Коврижных

(Новосибирск)

Определяющие соотношения теорий типа течения существенным образом зависят от выбора двух функций — функции нагружения и функции упрочнения, детальная конструкция которых не выявлена. Допускаемая свобода задания этих функций позволяет предполагать довольно разнообразные формы поверхности нагружения как регулярного, так и сингулярного типа.

Имеющиеся в настоящее время результаты экспериментальных исследований не находят достаточно полного отражения с позиции классических представлений в теории упрочняющегося пластического тела. Например, нагружения с постоянной интенсивностью напряжений приводят к значительному росту пластической деформации [1], что свидетельствует о несостоятельности классического закона течения, основанного на изотропно расширяющейся поверхности текучести Мизеса.

В данной работе предлагается экспериментально обоснованный вариант теории пластического течения, в котором за основу построения определяющих соотношений принимается макроскопический сдвиговой механизм деформирования, являющийся частным случаем механической модели материала [2] и опирающийся на экспериментальные наблюдения за линиями Людерса. Такой подход не использует для построения определяющих соотношений понятие поверхности нагружения, но допускает интерпретацию в этой терминологии. В стадии упрочнения поверхность нагружения сингулярна и составлена из кусочно-гладких участков поверхностей постоянства главных касательных напряжений. Появление пластической деформации связывается с условием пластичности Треска — Сен-Венана, а упрочнение развивается следующим образом: в пространстве напряжений точка нагружения перемещает кусочно-гладкие участки поверхностей постоянства главных касательных напряжений самопараллельно, удаляя их от начала координат.

Следует отметить, что предлагаемый вариант теории течения можно получить формально из предположения об ортотропии пластического состояния в форме [3] при определенном выборе коэффициентов ортотропии [4].

1. Пусть в процессе нагружения материала достигнуто однородное напряженно-деформированное состояние. Обозначим главные нормальные напряжения в момент возникновения пластической деформации σ_i ($i = 1, 2, 3$), причем условимся нумеровать главные оси так, что

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3. \tag{1.1}$$

Введем обозначения для главных касательных напряжений:

$$T = (\sigma_1 - \sigma_3)/2, \quad T_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2, \quad T_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2,$$

тогда из (1.1) следует, что $T > 0$, $T_{12} \geqslant 0$, $T_{23} \geqslant 0$.

В дальнейшем деформации считаются малыми и представляются в виде суммы упругой и пластической составляющих. Пластические составляющие главных удлинений обозначим e_i ($i = 1, 2, 3$), а главный пластический сдвиг $\gamma = e_1 - e_3$.

Примем также условие пластической несжимаемости и закон Гука между приращением упругой составляющей деформации и приращением напряжения. Считается, что упругие свойства материала не меняются в процессе пластического деформирования.

Пусть τ_s — предел текучести при чистом кручении, когда $2T_{12} = 2T_{23} = T$.

Случай $T > \tau_s$, T_{12} и $T_{23} < \tau_s$ будем называть состоянием неполной пластичности, а когда T и $T_{12} > \tau_s$, $T_{23} < \tau_s$ (либо T и $T_{23} > \tau_s$, $T_{12} < \tau_s$) — состоянием полной пластичности.

Механическая модель материала. Будем считать, что в пластическом состоянии материал ослаблен лишь в направлениях систем скольжения (направления действия главных касательных напряжений, на которых превышен предел τ_s), а приращение пластической деформации представляет собой последовательность простых сдвигов, происходящих под действием роста собственных касательных напряжений в этих направлениях. Зависимость главного пластического сдвига γ_0 от величины максимального касательного напряжения при кручении (фиг. 1) принимается в качестве паспортной характеристики материала на каждой из систем скольжения.

Введем в рассмотрение пластический модуль упрочнения $G_0(T) = \Delta T/\Delta\gamma_0(T)$.

Для состояния неполной пластичности величина простого сдвига в направлении T определяется зависимостью $\Delta\gamma^\nu = \Delta T/G_0$, где Δ означает изменение соответствующей величины.

В главных осях напряжений получим соотношения

$$\Delta e_1 = -\Delta e_3 = \Delta T/2G_0, \quad \Delta e_2 = 0. \tag{1.2}$$

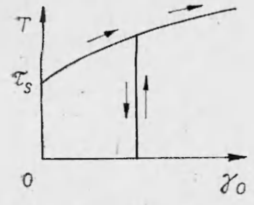
Соотношения (1.2) представляют собой ассоциированный закон течения для условия $T = \text{const}$, так как $\Delta e_i = h(T)(\partial T/\partial\sigma_i)\Delta T$ ($i = 1, 2, 3$), где $h(T) = 1/G_0(T)$.

Если главные оси напряжений неподвижны (квазипростое нагружение [2]), то (1.2) можно проинтегрировать:

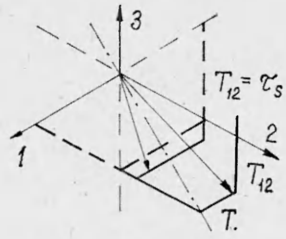
$$e_1 = -e_3 = (1/2)\gamma_0(T), \quad e_2 = 0.$$

В состоянии полной пластичности, когда T и $T_{12} > \tau_s$, $T_{23} < \tau_s$, на основе механической модели материала можно записать

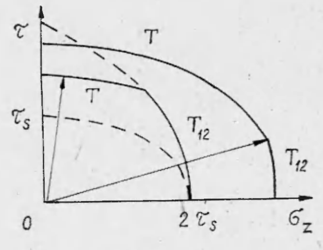
$$\Delta\gamma^\nu = \Delta T/G_0, \quad \Delta\gamma_{12}^\nu = \Delta T_{12}/G_1,$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

где $\Delta\gamma^v$, $\Delta\gamma_{12}^v$ — простые сдвиги, происходящие в направлениях T и T_{12}, а $G_1 = G_0(T_{12})$.

Переходя к главным осям тензора напряжений, получим соотношения

$$\Delta e_1 = \Delta T/2G_0 + \Delta T_{12}/2G_1, \ \Delta e_2 = -\Delta T_{12}/2G_1, \ \Delta e_3 = -\Delta T/2G_0, \tag{1.3}$$

которые представляются также в форме закона течения [5]:

$$\Delta e_i = h(T)(\partial T/\partial\sigma_i)\Delta T + h_1(T_{12})(\partial T_{12}/\partial\sigma_i)\Delta T_{12} \ (i = 1, 2, 3),$$

где $h_1(T_{12}) = 1/G_0(T_{12})$.

Если в этом законе течения, предложенном для сингулярных поверхностей нагружения, остается полная неопределенность в выборе поверхности нагружения и функции упрочнения, то соотношения (1.2), (1.3) (механическая модель материала) устраняют эту неопределенность.

Для квазипростого нагружения при ΔT, $\Delta T_{12} \geqslant 0$ соотношения (1.3) можно проинтегрировать:

$$e_1 = (1/2)\gamma_0(T) + (1/2)\gamma_0(T_{12}), \ e_2 = -(1/2)\gamma_0(T_{12}), \ e_3 = -(1/2)\gamma_0(T).$$

В качестве примера рассмотрим одноосное растяжение $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $T = T_{12}$, $T_{23} = 0$, тогда $e_1 = \gamma_0(T)$, $e_2 = e_3 = -(1/2)\gamma_0(T)$.

Обратимся теперь к традиционной девиаторной плоскости. Проекции главных направлений на эту плоскость обозначим *1*, *2*, *3* (фиг. 2).

На основании соотношений (1.2), (1.3) и введенной паспортной характеристики материала (см. фиг. 1) заключаем, что на девиаторной плоскости упрочнение развивается следующим образом (фиг. 2): точка нагружения перемещает кусочно-линейные участки поверхности Треска самопараллельно, удаляя их от начала координат. Этот факт можно получить из схемы упрочнения [6], примененной к условию пластичности Треска — Сен-Венана.

Если тонкостенный цилиндрический образец подвергался на начальной стадии нагружению путем изменения внутреннего давления и осевой силы, то сложное нагружение может быть осуществлено добавлением крутящего момента. Если же в начале происходит нагружение крутящим моментом, то последующее сложное нагружение реализуется добавлением осевой силы и изменением внутреннего давления.

Для простоты рассмотрим сложное нагружение, которое реализуется в опытах на тонкостенных трубчатых образцах при отсутствии внутреннего давления. Тогда в каждой точке материала напряженное состояние характеризуется тензором

$$\begin{Vmatrix} \sigma_z & 0 & \tau_{z\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{z\theta} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

в неподвижной системе координат z, r, θ, где ось z направлена по образующей, r имеет радиальное направление, а θ — тангенциальное.

Главные касательные напряжения принимают значения

$$T = (1/2)\sigma_z \cos 2\varphi + \tau \sin 2\varphi, \ T_{12} = (1/4)\sigma_z + (1/2)T, \ T_{23} = -(1/4)\sigma_z + (1/2)T,$$

а их приращения

$$\Delta T = (1/2)\Delta\sigma_z \cos 2\varphi + \Delta\tau \sin 2\varphi, \quad \Delta T_{12} = (1/4)\Delta\sigma_z + (1/2)\Delta T, \quad \Delta T_{23} = -(1/4)\Delta\sigma_z + (1/2)\Delta T,$$

где $\tau = \tau_{z\theta}$; $\operatorname{tg} 2\varphi = 2\tau/\sigma_z$; φ — угол между направлениями осей z и x_1.

Будем считать, что при сложном нагружении справедливы допущения механической модели материала. В этом случае направления систем скольжения будут поворачиваться в процессе нагружения.

Для состояния неполной пластичности в направлении T по-прежнему справедливы соотношения (1.2), которые в неподвижной системе координат принимают вид

$$\Delta e_z = -\Delta e_\theta = (\Delta T/2G_0)\cos 2\varphi, \ \Delta\gamma_{z\theta}^p = (\Delta T/G_0)\sin 2\varphi, \ \Delta e_r = 0 \tag{1.4}$$

и могут быть записаны в форме закона течения

$$\Delta e_z = -\Delta e_\theta = h(T)(\partial T/\partial\sigma_z)\Delta T, \ \Delta\gamma_{z\theta}^p = h(T)(\partial T/\partial\tau)\Delta T, \ \Delta e_r = 0$$

при $h(T) = 1/G_0(T)$.

Полная разгрузка наступает при $\Delta T \leqslant 0$, а нагружение с $\Delta T = 0$ является нейтральным и не приводит к росту пластической деформации.

В состоянии полной пластичности при T и $T_{12} > \tau_s$, $T_{23} < \tau_s$ справедливы соотношения (1.3), которые в системе координат z, r, θ принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta e_z &= (\Delta T/2G_0)\cos 2\varphi + (\Delta T_{12}/4G_1)(1 + \cos 2\varphi), \\ \Delta e_\theta &= -(\Delta T/2G_0)\cos 2\varphi + (\Delta T_{12}/4G_1)(1 - \cos 2\varphi), \\ \Delta\gamma_{z\theta}^p &= (\Delta T/G_0 + \Delta T_{12}/2G_1)\sin 2\varphi, \ \Delta e_r = -\Delta e_z - \Delta e_\theta. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Для плоского напряженного состояния $\sigma_r = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0$, а главные касательные напряжения T и T_{12} записываются в виде

$$T = (1/2)\sqrt{(\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + 4\tau^2}, \quad T_{12} = (\sigma_z + \sigma_\theta)/4 + (1/2)T,$$

тогда соотношения (1.5) при $\sigma_\theta = 0$ представимы в форме закона течения с сингулярной в общем случае поверхностью нагружения

$$\begin{aligned} \Delta e_z &= h(T)\frac{\partial T}{\partial\sigma_z}\Delta T + h_1(T_{12})\frac{\partial T_{12}}{\partial\sigma_z}\Delta T_{12}, \\ \Delta e_\theta &= h(T)\frac{\partial T}{\partial\sigma_\theta}\Delta T + h_1(T_{12})\frac{\partial T_{12}}{\partial\sigma_\theta}\Delta T_{12}, \\ \Delta\gamma_{z\theta}^p &= h(T)\frac{\partial T}{\partial\tau}\Delta T + h_1(T_{12})\frac{\partial T_{12}}{\partial\tau}\Delta T_{12}, \end{aligned}$$

где $h_1(T_{12}) = 1/G_0(T_{12})$.

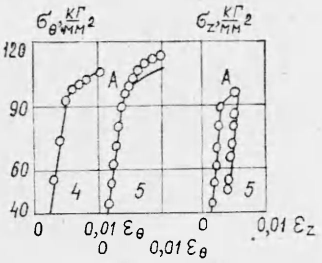
При частичной разгрузке в направлении T_{12}, т. е. $\Delta T_{12} \leqslant 0$, $\Delta T > 0$, соотношения (1.5) непрерывно переходят в (1.4). Полная разгрузка наступает при ΔT, $\Delta T_{12} \leqslant 0$, а особенность в точке нагружения образована пересечением поверхностей T и $T_{12} = \text{const}$.

В плоскости напряжений σ_z, τ условие $T = k_1$ представляет эллипс. Треска $(\sigma_z/2k_1)^2 + (\tau/k_1)^2 = 1$, а условие $T_{12} = k_2$ — параболу $2k_2\sigma_z + \tau^2 = 4k_2^2$, где k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

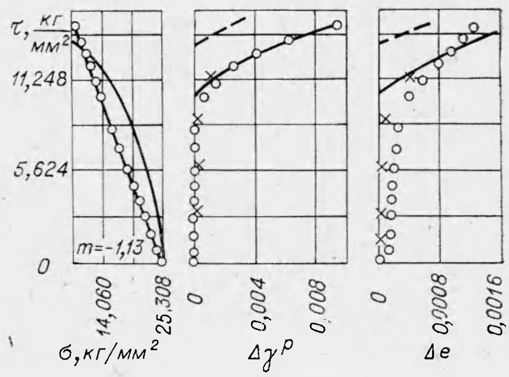
Кривые, соответствующие $k_1 = k_2 = \tau_s$, изображены на фиг. 3 штриховой линией.

На основе механической модели материала заключаем, что в рассматриваемой плоскости упрочнение развивается следующим образом (фиг. 3): точка нагружения перемещает кусочно-гладкие участки кривых постоянства главных касательных напряжений T и T_{12} самопараллельно, удаляя их от начала координат.

Для предлагаемого закона течения нагружения с постоянным значением максимального касательного напряжения являются нейтральными в состоянии неполной пластичности, однако экспериментальные исследования [7] показали, что при таких нагружениях происходит рост плас-



Ф и г. 4



Ф и г. 5

тической деформации. Этот факт удается описать, оставаясь в рамках концепции главных касательных напряжений [8], при этом за основу принимается механическая модель материала [2] и предположение об ортотропии пластического состояния в форме [3].

2. Приведем сравнение результатов расчета по предлагаемым соотношениям с данными опытов [1, 9].

В [1] приводятся данные испытаний тонких трубчатых образцов из стали 30ХН3А, которые нагружались внутренним давлением и растягивающей силой. Для некоторых образцов во время испытания отношение $k = \sigma_z/\sigma_\theta$ оставалось постоянным. Характерной особенностью этих опытов было то, что для большинства из них на определенных этапах нагружения производились различного рода частичные разгрузки, когда в одних направлениях происходит рост напряжений, а в других — разгрузка.

Модуль упрочнения $G_0(T)$ определялся с кривой $\sigma_\theta(\varepsilon_\theta)$ для образца *4*, который нагружался чистым кручением при $k = 0{,}5$ (фиг. 4). На фиг. 4 приводятся также данные испытания образца *5* (светлые кружки). До точки A этот образец нагружался при $k = 1$, а затем интенсивность напряжений поддерживалась постоянной так, что $\Delta\sigma_\theta > 0$, $\Delta\sigma_z < 0$. Результаты расчета для второго этапа нагружения нанесены сплошной линией.

В [9] представлены данные испытаний тонкостенных цилиндров из алюминиевого сплава 14S-T4 в условиях сложного нагружения. Осевым сжатием образцы выводились в пластическое состояние. Сложное нагружение осуществлялось добавлением крутящего момента $\tau_{z\theta} = \tau$.

В момент приложения докрутки сжимающее усилие изменялось различным образом так, что отношение $d\sigma_z/d\tau = \mathrm{const}$ для каждого из образцов, но от образца к образцу оно изменялось существенно.

Данные опытов [9] показали, что в начальный момент докрутки материал деформируется упруго в плоскости действия τ (начальный модуль сдвига равен упругому). Этот факт находится в согласии с допущениями механической модели материала.

Главные касательные напряжения T, T_{23} в рассматриваемом случае сложного нагружения принимают вид

$$T = (1/2)\sigma\cos 2\varphi + \tau\sin 2\varphi,\quad T_{23} = (1/4)\sigma + (1/2)T,$$

а их приращения

$$\Delta T = (1/2)\Delta\sigma\cos 2\varphi + \Delta\tau\sin 2\varphi,\quad \Delta T_{23} = (1/4)\Delta\sigma + (1/2)\Delta T,$$

где $\sigma = -\sigma_z > 0$; $\operatorname{tg} 2\varphi = 2\tau/\sigma$; φ — угол между направлениями осей θ и x_1.

В начальный момент сложного нагружения реализуется состояние полной пластичности в направлениях T и T_{23}, так как $T = T_{23}$, $T_{12} = 0$.

Определяющие соотношения для различных видов догрузки из рассматриваемого состояния имеют вид

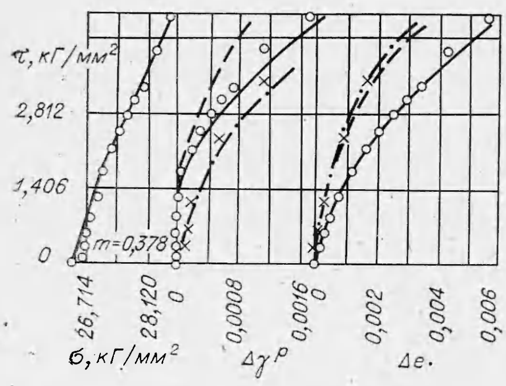
$$\Delta e = \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{G_0}\cos 2\varphi + \frac{1}{4}\frac{\Delta T_{23}}{G_2}(1+\cos 2\varphi), \tag{2.1}$$

$$\Delta\gamma^p = \left(\frac{\Delta T}{G_0} + \frac{\Delta T_{23}}{2G_2}\right)\sin 2\varphi,$$

где $\Delta e = -\Delta\varepsilon_z^p$, $\Delta\gamma^p = \Delta\gamma_{z\theta}^p$, $G_2 = G_0(T_{23})$.

Упругие константы алюминиевого сплава 14S-T4 следующие: $E = 7381{,}5$ кг/мм², $\mu = 2776{,}85$ кг/мм². Предел текучести при одноосном сжатии $\sigma_s = 17{,}575$ кг/мм².

Результаты обработки кривых $\sigma_z(\varepsilon_z)$ для каждого из образцов показали, что цилиндры, нагружавшиеся при $d\sigma/d\tau = m = -1{,}13$ и $m = 0{,}378$, имели приблизительно одинаковый модуль $G_0(T)$ на участке упрочнения. Для этих образцов пластический модуль упрочнения выбирался с кривой $\gamma^p(\tau)$ по данным эксперимента с $m = -1{,}13$.



Фиг. 6

Теоретические кривые строились для участков сложного нагружения по формулам (2.1) и изображены на фиг. 5, 6 сплошной линией. Данные опытов обозначены светлыми кружками. Здесь же указаны программы нагружений $\sigma(\tau)$ и результаты расчетов по другим теориям. Расчетные зависимости по деформационной теории Генки — Надаи — Ильюшина обозначены штрихпунктирными линиями, по теории течения с изотропно расширяющейся поверхностью Мизеса — штриховыми, по теории скольжения Батдорфа — Будянского — крестиками.

Автор выражает благодарность Е. И. Шемякину и В. М. Жигалкину за полезные обсуждения в процессе выполнения данной работы.

Поступила 29 X 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жуков А. М.** О пластических деформациях изотропного металла при сложном нагружении.— Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 12.
2. **Христианович С. А.** Деформация упрочняющегося пластического материала.— МТТ, 1974, № 2.
3. **Шемякин Е. И.** Анизотропия пластического состояния.— В сб.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1973, т. 4, № 4.
4. **Коврижных А. М.** Об одном варианте описания состояний неполной и полной пластичности.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 34. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1978.
5. **Koiter W. T.** Stress-strain relations uniquenes and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface.— Quart. Appl. Math., 1953, N 11. Рус. пер. Механика, 1960, № 2.
6. **Sanders J. L., Jr.** Plastic stress-strain relations based on linear loading functions.— In: Proc. 2nd US Nat. Congr. Appl. Mech. Ann Arbor, 1954. Рус. пер. Механика, 1956, № 3.
7. **Жигалкин В. М., Адигамов Н. С., Коврижных А. М.** Исследование зависимостей между напряжениями и деформациями в теории пластичности анизотропно упрочняющейся среды.— В кн.: Измерение напряжений в массиве горных пород. Материалы IV Всесоюз. сем. Ч. 1. Новосибирск: изд. Ин-та горного дела СО АН СССР, 1974.
8. **Коврижных А. М.** Учет разнопрочности материала на сдвиг за пределом упругости.— ФТПРПИ, 1978, № 6.
9. **Budiansky B., Dow N. F., Peters R. W., Shepherd R. P.** Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity.— In: Proc. 1st US Nat. Congr. Appl. Mech. Chicago, 1951.