Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.4.
DOI:
10.15372/PS20200404

А.В. Хлебалин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: ДЕДУКТИВНАЯ НОРМАТИВНОСТЬ И МНОГООБРАЗИЕ ПРАКТИКИ[1]

В статье рассмотрено противопоставление нормативной функции идеала дедуктивного доказательства и многообразия практики математического исследования, включающего инактивные элементы. На примере анализа объяснительной функции доказательства показано, что ее реализация требует концептуального содержания доказательства, что не обеспечивается только выводом. Показано на примере исследований в области оснований математики, что реализация объяснительной функции обеспечивается сосуществованием и взаимодействием индуктивных и дедуктивных элементов математического исследования.

Ключевые слова: дедуктивное доказательство; индукция; эксперимент; мыслительный эксперимент

A.V. Khlebalin

MATHEMATICAL PROOF: DEDUCTIVE NORMATIVITY AND DIVERSITY OFPRACTICE

The article discusses the opposition of the normative function of the ideal of deductive proof and the diversity of the practice of mathematical research, which includes inactive elements. On the example of the analysis of the explanatory function of proof, it is shown that its implementation requires the conceptual content of the proof, which is not provided only by the deductive inference. The example of research in the field of foundations of mathematics shows that the implementation of

[1] Публикуется в авторской редакции.

the explanatory function is provided by the coexistence and interaction of inductive and deductive elements in mathematical research.

Keywords: deductive proof; induction; experiment; thought experiment

Одним из обстоятельств, которое подчеркивается в связи с эпистемологическими характеристиками математического доказательства, является ставшее привычным указание на то, что в самом идеале доказательства слиты нормативный и дескриптивный элементы, которые зачастую столетия расходятся в практике математики. Если нормативный компонент на протяжении этого времени приобрел в рамках метаматематики невиданную прежде строгость и четкость, прежде всего в концепции формализма, то дескриптивный компонент определяется многообразием практик доказательства. Таким образом, нормативный идеал и практика доказательства все более отдаляются друг от друга. Яркой характеристикой философии математики последних десятилетий является расширение обсуждаемых проблем за счет таких популярных тем, как вычислительная математика, экспериментальная математика, индуктивная математика. Все эти темы заостряют внимание к эпистемологическим характеристикам математического знания, явно претендуя на то, чтобы расширить, если не поставить под сомнение, традиционные его характеристики как знания априорного, получаемого дедуктивным путем. Такое обсуждение расширяет парадигмальные примеры математического знания, акцентируя внимание на многообразии математической практики, превосходящем традиционные образцы аксиоматических теорий. Участники этого обсуждения увязывают классические концепции истинности математических утверждений, объяснительных функций дедукции, понимания знания с такими прежде маргинальными для магистральных дискуссий аспектами математической практики, как, например, использование диаграмм и визуализации рассуждений в целом, применение компьютерных программ в верификации и генерировании математических результатов, экспериментальные и индуктивные результаты. «Новые волны» в философии математики успели уже институализироваться в академическом поле: появились библиотеки компьютерной математики, журналы по экспериментальной математике.

Концепция доказательства, ревизия которой сегодня предпринимается, формируется в первой трети XX в., и ее кульминацией можно считать создание теории доказательства. Как замечает Г. Крайзель, несмотря на то, что развитие теории доказательств пошло не совсем тем путем, который предполагался Д. Гильбертом при ее разработке, когда «Гильберт ввел ее под именем *Beweistheorie* (она должна была стать основным инструментом для формулировки общей концепции Гильберта о том, как анализировать математические рассуждения)» [5, p. 321]. Эта концепция включала в себя два принципиальных элемента, а именно принятые интуитивные доказательства и исследуемые формальные доказательства (или выводы). Соотношение этих двух элементов постулируется тезисом Гильберта – Генцена. Д. Гильберт утверждает, что формальное доказательство «проводится согласно определенным правилам, в которых выражена техника нашего мышления» [4, p. 475]. Эти правила «являются правилами, согласно которым действительно осуществляется наше мышление», и они «формируют систему, которая может быть обнаружена и явно установлена» [Ibid.]. Аналогично Г. Генцен утверждает, что в системе натурального вывода формальное доказательство имеет «близкое сходство с действительными рассуждениями» и отражает «настолько точно, насколько возможно, включенные в математическое доказательство действительные логические рассуждения». Обобщенная формулировка тезиса Гильберта – Генцена утверждает, что каждое действительное доказательство может быть представлено формальным доказательством. И несмотря на то что создание такого формального доказательства оказалось намного сложнее, чем предполагалось изначально, как замечает все тот же Г. Крайзель, справедливость самого тезиса как устанавливающего стандарт не оспаривалась до недавнего времени. Активность сторонников «новых волн» в философии математики претендует на то, чтобы пошатнуть этот тезис.

Неизбежно обсуждение математического доказательства начинается с перечисления его функций. Каким бы длинным ни был предлагаемый перечень, они резюмируются широко известной формулой Р. Херша: «доказательство – это просто убедительный аргумент, по мнению компетентных судей» [3, p. 147]. Неизменно присутствуют в любом перечне две функции: функция аргумента, убеждающего в истинности теоремы, и функция установления истинности теоремы. Эти функции соответствуют восходящему к Г. Фреге различению контекста открытия и контекста обоснования. При том что не оспаривается наличие этих функций у доказательства, под сомнение ставится тезис о том, что эти функции в наилучшей степени реализуются формализованным доказательством. Многообразие математической практики доказательства и очевидные отличия этих практик от канонизированных Д. Гильбертом и П. Бернайсом стандартов в теории доказательств послужили поводом ранжировать центральные функции доказательства. Если доказательство – это лучший способ установления истинности утверждения, то почему так разнообразна практика доказательств, ведь многообразие это не объясняется ссылкой на способ обнаружения истинности утверждения? Более того, существует привлекшая недавно внимание философов [2] практика передоказательства уже установленных математических результатов. Эту практику, направленную на получение более компактных доказательств или разработку более мощных методов, вновь трудно объяснить ссылкой на необходимость установления истинности.

Одним из первых на то, что, по-видимому, основополагающей функцией доказательства является функция аргумента, позволяющего понять то, почему утверждение истинно, указал И. Рав [6], статья которого вызовет резонанс и получит широкую поддержку. Он утверждает, что факт установления истинности менее важен, чем то, что доказательство позволяет нам ответить на вопрос о том, как мы установили истинность утверждения и почему мы убеждены в этом. Подлинное доказательство интересного результата обладает концептуальной природой. Представляя доказательство как пошаговое применение заранее установленных правил манипуляции символами, делая доказательство проверяемым на каждом этапе вывода, формалистская доктрина достигает апогея обоснования дедуктивного вывода как единственного законного средства построения математического доказательства. То, что нормативный идеал весьма далек от практики, стало понятным фактически сразу: «существует конфликт между математической практикой и доктриной формализма» [4, p. 39]. Нельзя сказать, что формалистская концепция доказательства предполагала коренное преобразование математический практики, скорее сторонники формализма видели в этом тяжелый грех интуиционизма. Напротив, формализм предлагает концепцию идеального математического доказательства, исключающего любые сомнения в обоснованности результата, полученного предписанным концепцией способом.

Существенным препятствием на пути формалистской концепции доказательства стало отрицательное решение проблемы разрешимости. Но даже помимо тезиса Чёрча – Тьюринга возникало сомнение в том, что независимо от проблемы своей реализуемости формалистская концепция доказательства не просто далека от математической практики, но и попросту нанесла бы вред математике, если была бы принята на вооружение математиками. И. Рав [6] предлагает вообразить фантастическую реализацию формалистского идеала математического доказательства. Допустим, заявляет он, что вместо отрицательного решения А. Тьюрингом и А. Чёрчем общей проблемы разрешимости было найдено ее положительное решение. Более того, оно было воплощено в компьютере с поэтическим именем Пифиагория (образованным слиянием двух примечательных имен – Пифия и Пифагор): «Подумайте, как замечательно все стало бы. Вы захотите узнать, истинна ли гипотеза Римана, просто введете ее (используя подходящий язык программирования), и за долю секунды на вашем экране появится надпись “истинно” или “ложно”. …Как только вы набрали формулировку проблемы Ферма, тут же долгожданный ответ появится на вашем волшебном экране, без разрушающей ваш мозг помощи со стороны Эндрю Уайлса» [6, p. 5–6].

Такое фантастическое развитие событий обернулось бы, по мнению И. Рава, подлинной смертью математики. Для него дело математика состоит не столько в установлении истинности или ложности математических утверждений, сколько в создании методов, понятий и средств для решения математической проблемы, которые много важнее достигаемого в итоге доказательства ответа на вопрос об истинности утверждения. Подтверждения приоритета средств решения математической проблемы над установлением истинности утверждения могут быть легко найдены в хорошо известных событиях из истории математики. Например, история многочисленных безуспешных попыток доказательства проблемы Гольдбаха оказывается зачастую историей создания необычайно мощных методов и концептуальных средств, позволивших получить важные результаты в теории чисел. Аналогичной является история поиска решения очень многих известных проблем математики[2].

Возражения против концепции математического доказательства, согласно которой последнее может быть представлено в качестве последовательного механического совершения шагов вывода, например выполняемых Пифиагорией, формулируется И. Равом в форме противопоставления двух понятий – концептуального доказательства и вывода. Первое, соответствующее практике математика, обладает нередуцируемым семантическим содержанием, тогда как второе является

[2] См., подтверждение этого в связи с историей решения проблем Гольдбаха и континуум-гипотезы у того же И. Рава [6].

синтаксическим объектом данной формальной системы. Синтаксический вывод служит абстрактным образцом математического доказательства. По крайней мере, он начинает играть эту роль при интеграции в научное сообщество, поскольку постоянно фигурирует в учебной литературе и является предпочтительным при изложении полученных результатов. В явном виде концепция вывода формулируется следующим образом: в формализованной теории *T* вывод является конечной последовательностью формул в языке теории *T*, каждый член которой является либо логической аксиомой, либо аксиомой теории *T*, или является результатом применения конечного числа явно установленных правил вывода к предшествующим формулам в последовательности. Именно таким образом вымышленная Пифиагория устанавливает истинность или ложность задаваемых ей вопросов.

Понятие концептуального доказательства является семантическим и не поддается дефиниции. И. Рав утверждает, что отношение между доказательством и выводом аналогично отношению между нетехническим термином «эффективно вычислимая функция» и техническим термином «частично рекурсивная функция». Тезис Чёрча служит своеобразным мостом между интуитивным и техническим понятиями вычислимости. Аналогично так называемый тезис Гильберта, согласно которому любое доказательство может быть преобразовано в формальный вывод в соответствующей формальной системе, является мостом между концептуальным доказательством и выводом. Но в последнем случае мост оказывается с односторонним движением: согласно тезису Гильберта, мы можем любое доказательство представить в качестве синтаксического вывода; но не существует способа восстановить первоначальное доказательство со всем его семантическим содержанием из вывода. Щедрый на метафоры и смелые сравнения И. Рав предлагает еще одну аналогию. Соотношение концептуального доказательства и вывода подобно отношению фотографии человека и его рентгеновского снимка: доказательство – это обычная фотография, вывод – это рентгеновский снимок. Мы не можем, имея в своем распоряжении рентгеновский снимок, реконструировать облик человека; точно так же мы не можем по структуре логического вывода реконструировать семантическое доказательство.

Акцент на семантической природе математического доказательства является типичным для обсуждения различия между логическим выводом, выступающим идеалом рассуждения, и практикой работающего математика. И. Рав утверждает, что доказательство для математика аналогично экспериментальным процедурам в естественно-научных дисциплинах. Такая смелая аналогия сталкивается с очевидными возражениями. Математическая истина традиционно характеризуется своей необходимостью, которую сложно приписывать как самой процедуре эксперимента, так и его результатам, ведь эмпирическое положение дел, как бы мы ни характеризовали его онтологию, является случайным. Вообще, обнаружение экспериментального элемента в математическом познании становится в последнее время весьма популярной темой. Как правило, основателями этой проблематики указываются И. Лакатос и Л. Витгенштейн. Вместе с тем современные обсуждения ее весьма далеко ушли от идей их обоих. Во многом этот отход связан с неопределенностью понятия эксперимента в таких обсуждениях, когда наравне с диаграммами и другими визуальными средствами в область математического экспериментирования попадают компьютерные доказательства. Мы не будем сейчас обращаться к теме определения понятия эксперимента или к его ограничению таким образом, чтобы исключить из него компьютерную математику. Нас будет интересовать возможная концептуальная связь между математическим доказательством как концептуальной семантической процедурой, в трактовке И. Рава, с эпистемологическими функциями эксперимента как процедуры, противопоставленной дедуктивному логическому выводу. Такая постановка проблемы позволяет обнаружить представление об экспериментальном и индуктивном элементах математики задолго до Л. Витгенштейна и И. Лакатоса, причем в более интересном и перспективном, как нам представляется, направлении.

Исследования по основаниям математики рассматривались по крайней мере двумя участниками этого предприятия как содержащие эмпирический элемент исследования. Так, например, П. Бернайс интерпретировал работу над этой проблематикой как включающую и рациональное, и экспериментальное знание, отмечая в этой связи дуальную природу математического знания. Позволим себе обширную цитату, иллюстрирующую его позицию: «Для абстрактных областей математики и логики это означает, в частности, что формирование мысли не является чисто априорным, а является результатом своего рода интеллектуального экспериментирования (geistiges Experimentieren). Это мнение подтверждается, когда мы обращаемся к исследованиям по основаниям математики. Действительно, здесь становится очевидным, что мы вынуждены приспосабливать методологическую структуру к требованиям задачи путем проб и ошибок. Такие эксперименты, которые с традиционной точки зрения кажутся проявлениями неудачи, кажутся вполне уместными с точки зрения интеллектуального опыта. В частности, с этой точки зрения эксперименты, которые оказались невыполнимыми, не могут рассматриваться *eo ipso* как методологические ошибки. Напротив, они могут быть оценены как этапы интеллектуального эксперимента (если они осмысленны и последовательно выполнены). В свете этого не вызывает возражения наличие многих направлений в основаниях математики и аналогично – множественности конкурирующих теорий на различных стадиях развития исследования в естественных науках». [1]. С точки зрения П. Бернайса, методологические структуры и формальные средства математического исследования являются участниками сложного динамического процесса, а само математическое исследование может быть уподоблено виду мыслительного эксперимента. Он предлагает следующую параллель: «так же как в физике, теоретический язык и теоретические установки дополняются языком и установками эксперимента, теоретические установки математика также всегда дополняются способом размышления, направленным на процедурный аспект математической деятельности» [1].

Б. Рассел пришел ко многим аналогичным выводам, рассуждая о природе исследования по основаниям математики: «В математике, за исключением самых первых ее частей, утверждения, из которых выведены данные утверждения, как правило, указывают причину, по которой мы верим в данное утверждение. Но в случае оснований математики отношения обратные. Наши утверждения слишком просты, чтобы быть ясными, и поэтому следствия, получаемые из них, яснее, чем они сами. Следовательно, мы склонны принимать посылки, потому что можем видеть, что их следствия истинны, вместо того чтобы верить следствиям в силу истинности посылок. Но вывод от следствий к посылкам – сущность индукции; таким образом, метод исследования оснований математики на самом деле является индуктивным и в существенной степени таким же, как метод открытия общих законов в любой другой науке. …Наши основания для веры в логику и чистую математику отчасти исключительно индуктивные и вероятные» [7, p. 273–274].

Согласно П. Бернайсу и Б. Расселу, исследования по основаниям математики во многом аналогичны исследованиям в теоретической физике. Основания выбираются не в связи с их истинностью или очевидностью, а потому что имеют интересные следствия и унифицирующий потенциал, и мы располагаем индуктивными основаниями в их пользу. Для обоих математиков исследования по основаниям математики экспериментальные по своему духу, гипотетические, направлены на формирование унифицирующих принципов, определяющих наше дальнейшее понимание.

На наш взгляд, точка зрения П. Бернайса и Б. Рассела свидетельствует о том, что соотношение формальных и неформальных методов в математических исследованиях гораздо более тонкое и не соответствует прямому противопоставлению, к которому склонны как сторонники традиционной, исключительно дедуктивной интерпретации математики, так и поборники экспериментальной математики. Формальные методы в основаниях математики имеют общие черты с неформальными; за пределами проблематики оснований их приложения очень разнообразны и не исчерпываются исключительно верификацией и установлением соответствия логическим нормам.

Литература

1. *Bernays P.* Mathematische Existenz und Widerspruchfreiheit. (English translation by W. Sieg, R. Zach and S. Goodman, available as Text No.19, Bernays project). – URL: https://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/

2. *Dawson J.* Why do mathematicians re-prove theorems? // Philosophia Mathematica. – 2006. –Vol. 14, No. 3. – P. 269–286.

3. *Hersh R.* Expressing Mathematics: What Do We Do, When We Do Mathematics? – American Mathematical Society, 2010.

4. *Hilbert D.* The foundations of mathematics // From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931 / Ed. by J. van Heijenoort. – Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967. – P. 464–479.

5. *Kreisel G.* A survey of proof theory // The Journal of Symbolic Logic. – 1968. – Vol. 33, No. 3. – P. 321–388.

6. *Rav Y.* Why do we prove theorems? // Philosophia Mathematica. – 1999. –Vol. 7, No. 3. – P. 5–41.

7. *Russell B.* The regressive method of discovering the premises of mathematics // Russell B. Essays on Analysis. – London, 1973. – P. 272–283.

References

1. *Bernays, P.* Mathematische Existenz und Widerspruchfreiheit. (English Translation by W. Sieg, R. Zach and S. Goodman, available as Text No. 19, Bernays project). Available at: https://www.phil.cmu.edu/projects/bernays.

2. *Dawson, J.* (2006). Why do mathematicians re-prove theorems? // Philosophia Mathematica, Vol. 14, No. 3, 269–286.

3. *Hersh, R.* (2010). Experiencing Mathematics: What Do We Do, When We Do Mathematics? American Mathematical Society.

4. *Hilbert, D.* (1967). The foundations of mathematics In: Heijenoort, J., van (Ed.). From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Cambridge, MA, Harvard University Press, 464–479.

5. *Kreisel, G.* (1968). A survey of proof theory. The Journal of Symbolic Logic, Vol. 33, No. 3, 321–388.

6. *Rav, Y.* (1999). Why do we prove theorems? Philosophia Mathematica, Vol. 7, No. 3, 5–41.

7. *Russell, B.* (1973). The regressive method of discovering the premises of mathematics. In: Russell, B. Essays on Analysis. London, 272–283.

Информация об авторе

Хлебалин Александр Валерьевич – кандидат философских наук, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).

sasha_khl@mail.ru .

Information about the author

Khlebalin Alexander Valerievich – Candidate of Sciences (Philosophy), Senior Researher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaeva st., Novosibirsk, 630090, Russia).

sasha_khl@mail.ru .

Дата поступления 06.12.2020