УДК 539.376

# ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛОВ С РАЗЛИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

И. А. Банщикова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: binna@ngs.ru

Предлагаются определяющие уравнения установившейся ползучести для ортотропных материалов, обладающих различными свойствами при растяжении и сжатии. Для описания разносопротивляемости используются степенные функции с различными показателями при растяжении и сжатии. Приведены уравнения задач о растяжении, сдвиге и уравнения задачи о плоском напряженном состоянии. С использованием предложенной модели решена задача о кручении постоянным моментом при температуре $T = 200$ °C цилиндрических трубчатых стержней, вырезанных в направлении нормали к плите из трансверсально-изотропного сплава АК4-1 и в продольном направлении. Получены определяющие уравнения при кручении. Значения параметров модели найдены в экспериментах на одноосное растяжение и сжатие сплошных круглых образцов, вырезанных в различных направлениях. При одном и том же степенном показателе при растяжении и сжатии получено аналитическое решение для скорости закручивания стержня с кольцевым поперечным сечением, вырезанного в направлении нормали к плите. Для стержня, вырезанного в продольном направлении, получена верхняя оценка скорости закручивания. Показано, что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: конструкционные сплавы, ортотропия, разносопротивляемость растяжению и сжатию, ползучесть, плоское напряженное состояние, сдвиг, кручение стержней с кольцевым сечением, минимум дополнительного рассеяния.

DOI: 10.15372/PMTF20200110

**Введение.** Как правило, при высоких температурах современные конструкционные сплавы обладают свойствами анизотропии. Свойства листового материала заготовок могут различаться как в плоскости листа, так и по нормали к нему, а также в направлении, составляющем угол 45° с нормалью листа. Анизотропия такого типа может быть обусловлена прокаткой исходной заготовки. Помимо анизотропии материалы могут иметь различные свойства при растяжении и сжатии. Существует ряд моделей, описывающих процессы деформирования таких материалов в режимах ползучести.

В моделях, описывающих изотропные материалы с различными свойствами при растяжении и сжатии в условиях ползучести, как правило, используются степенные функции с одинаковыми [1–4] или различными [5–7] показателями при растяжении и сжатии. Анализ процессов кручения сплошных круглых образцов с помощью двух таких моделей [1, 5], построенных с использованием понятия “трансформированного” пространства напряжений, проведен в работе [8].

Модели анизотропных материалов, свойства которых при растяжении и сжатии полагаются одинаковыми, предложены в работах [9, 10]. В [9] на основе модели, аналогичной модели анизотропной пластичности Хилла, создана ортотропная модель, в которой используется функция с одним и тем же степенным показателем для описания свойств материала в различных направлениях. В [10] рассматривается модель, в которой для описания свойств ортотропного материала используется функция с различными степенными показателями в направлениях трех основных осей ортотропии.

Модели анизотропных материалов, в которых учитывается их разносопротивляемость и используются функции с одним и тем же степенным показателем при растяжении и сжатии, исследованы в [4, 11–13]. Варианты моделей анизотропных материалов, в которых учитывается их разносопротивляемость и используются степенные функции с различными показателями при растяжении и сжатии, предложены в [14–16]. Следует выделить модели, в которых учитывается различие свойств материала и используются функции с одним и тем же степенным показателем при растяжении, сжатии и кручении [4, 17–19]. Существенное отличие свойств при кручении от свойств при растяжении и сжатии может быть обусловлено анизотропией материала.

В последнее время строятся модели ползучести, в которых учитываются как анизотропия и различие свойств материала при растяжении и сжатии, так и повреждаемость материала [20], параметры микроструктуры (плотность дислокаций) [21], композитные свойства [22]. Активно развиваются модели ползучести анизотропных материалов в геомеханике [23].

Для ряда сплавов экспериментально показано, что интенсивность процессов растяжения и сжатия может различаться и описываться функциями с различными значениями степенных показателей [8, 24, 25]. В данной работе предложенная в [7] модель, в которой учитывается разносопротивляемость материала растяжению и сжатию и используется степенная функция с различными показателями при растяжении и сжатии, строится для ортотропных материалов. В отличие от модели, изложенной в работе [14], в которой рассмотрен трансверсально-изотропный материал, в предлагаемой модели учитывается ортотропия. Предлагаемый потенциал не имеет разрыва [15] и достаточно точно описывает одноосное и двухосное растяжение-сжатие несжимаемого при ползучести материала [16].

**1. Модель ортотропного материала с различными свойствами при растяжении и сжатии.** Для учета свойств ортотропии и разносопротивляемости растяжению и сжатию предлагается следующая модель:

$$\eta_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad 2\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + (\Phi_2 - \Phi_1)\sin 3\xi; \tag{1}$$

$$\Phi_1 = T_1^{n_+ + 1}/(n_+ + 1), \qquad \Phi_2 = T_2^{n_- + 1}/(n_- + 1). \tag{2}$$

Здесь $\eta_{ij} = d\varepsilon^c_{ij}/dt$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; $\varepsilon^c_{ij}$, $\sigma_{ij}$ — компоненты тензора деформаций ползучести и напряжений; инвариант $\xi$ — угол, определяющий вид напряженного состояния и использующийся для учета различных свойств при растяжении и сжатии [4]:

$$\sin 3\xi = -\frac{9}{2}\,\frac{\bar\sigma_{kl}\bar\sigma_{lj}\bar\sigma_{kj}}{\sigma_i^3}, \tag{3}$$

$\bar\sigma_{kl}$ — компоненты девиатора напряжений; $\sigma_i = (3\bar\sigma_{kl}\bar\sigma_{kl}/2)^{1/2}$ — интенсивность напряжений; $\Phi_1$, $\Phi_2$ — скалярные потенциальные функции тензора напряжений при растяжении и сжатии соответственно; $T_1$, $T_2$ — квадратичные формы компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} T_1(\sigma_{ij}) &= (A_{11}^+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + A_{22}^+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + A_{33}^+(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + \\ &\qquad + 2A_{12}^+\sigma_{12}^2 + 2A_{23}^+\sigma_{23}^2 + 2A_{31}^+\sigma_{13}^2)^{1/2}, \\ T_2(\sigma_{ij}) &= (A_{11}^-(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + A_{22}^-(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + A_{33}^-(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + \\ &\qquad + 2A_{12}^-\sigma_{12}^2 + 2A_{23}^-\sigma_{23}^2 + 2A_{31}^-\sigma_{13}^2)^{1/2}; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} A_{11}^+ = \big((B_{22}^+)^{2/(n_+ +1)} + (B_{33}^+)^{2/(n_+ +1)} - (B_{11}^+)^{2/(n_+ +1)}\big)/2, \\ 2A_{12}^+ = 4(B_{12}^+)^{2/(n_+ +1)} - A_{11}^+ - A_{22}^+, \\ A_{11}^- = \big((B_{22}^-)^{2/(n_- +1)} + (B_{33}^-)^{2/(n_- +1)} - (B_{11}^-)^{2/(n_- +1)}\big)/2, \\ 2A_{12}^- = 4(B_{12}^-)^{2/(n_- +1)} - A_{11}^- - A_{22}^-. \end{gathered} \tag{5}$$

Остальные компоненты $A_{ij}^+$, $A_{ij}^-$ $(i,j = 1,2,3)$ получаются путем циклической перестановки индексов. Константы $B_{ii}^+$, $B_{ii}^-$ $(i = 1,2,3)$ являются характеристиками процесса одномерной ползучести на установившейся стадии при растяжении и сжатии в трех главных направлениях соответственно:

$$\eta_{ii} = \begin{cases} B_{ii}^+\sigma_{ii}^{n_+}, & \sigma_{ii} > 0, \\ B_{ii}^-|\sigma_{ii}|^{n_- -1}\sigma_{ii}, & \sigma_{ii} < 0, \end{cases} \qquad i = 1,2,3.$$

Константы $B_{ij}^+$, $B_{ij}^-$ $(i \ne j)$ — аналогичные характеристики при растяжении и сжатии соответственно в трех направлениях вдоль осей системы координат, полученной путем поворота исходной системы координат на угол, равный 45°; $n_+$, $n_-$ — показатели одномерной ползучести при растяжении и сжатии.

Из (1)–(5) следуют соотношения для ортотропного материала с одинаковыми свойствами при растяжении и сжатии и изотропного материала, свойства которого при растяжении и сжатии различаются, причем интенсивность процессов растяжения и сжатия может описываться степенными функциями с различными показателями.

1.1. *Ортотропный материал.* Если $B_{ij}^+ = B_{ij}^- = B_{ij}$ $(i,j = 1,2,3)$ и степенной показатель ползучести не зависит от знака прикладываемой нагрузки: $n_+ = n_- = n$, то из (1)–(5) следует $A_{ij}^+ = A_{ij}^-$ $(i,j = 1,2,3)$, $T_1 = T_2 = T$, $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$. Для компонент скоростей деформаций ползучести имеем

$$\eta_{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}, \qquad \Phi = \frac{T^{n+1}}{n+1}; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} T(\sigma_{ij}) &= (A_{11}(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + A_{22}(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + A_{33}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + \\ &\qquad + 2A_{12}\sigma_{12}^2 + 2A_{23}\sigma_{23}^2 + 2A_{31}\sigma_{13}^2)^{1/2}; \end{aligned} \tag{7}$$

$$A_{11} = (B_{22}^{2/(n+1)} + B_{33}^{2/(n+1)} - B_{11}^{2/(n+1)})/2, \qquad 2A_{12} = 4B_{12}^{2/(n+1)} - A_{11} - A_{22}. \tag{8}$$

Модель (6)–(8) предложена О. В. Сосниным [9] для описания ортотропных свойств материала в условиях ползучести. Несмотря на то что эта модель хорошо известна, с ее использованием решено небольшое количество задач. Это обусловлено тем, что для получения параметров модели для конкретного материала необходимо выполнить большое число экспериментов. Проверку полученных параметров и модели в целом следует проводить для сложного напряженного состояния.

В работе [26] модель (6)–(8) с учетом повреждаемости используется для описания процессов деформирования оболочек на основе безмоментной теории. Один из вариантов модели (6)–(8), в котором константы $A_{ij}$ нормированы, встроен разработчиками пакета Ansys в конечно-элементный комплекс. Тестирование встроенной модели с использованием элемента Solid45 при решении задачи о растяжении кубического образца показало, что результаты расчета по этой модели удовлетворительно согласуются с аналитическим решением [27]. При сложном напряженном состоянии встроенная модель была применена для оценки влияния свойства деформирования по нормали к листу, более слабого по сравнению с деформированием в плоскости листа, на величину прогиба при изгибе и кручении пластин из сплавов В95 ($T$ = 180 °С, тонкие листы толщиной 6 ÷ 10 мм) и 1163Т ($T$ = 400 °С, плита толщиной 12 мм) [28, 29]. Для случая чистого изгиба (кручения) проведено сравнение конечно-элементного решения, полученного с использованием пакета Ansys, и результатов двух расчетов, в одном из которых используются интегральные величины (кривизна и момент), а в другом разрешающие уравнения сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в точках разбиения по толщине пластины. Для сплава 1163Т проведена экспериментальная проверка модели [29]. В [30] с помощью модели (6)–(8) исследовано влияние сопротивления деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите (т. е. в направлении сдвига), меньшего по сравнению с сопротивлением деформациям ползучести в плоскости листа и по нормали, на процесс кручения сплошных круглых образцов (вырезанных в продольном направлении и в направлении нормали к плите) из сплава В95пчТ2 при $T$ = 180 °С (толщина плиты равна 50 мм) в предположении трансверсально-изотропных свойств сплава. У стержней, вырезанных из плиты в продольном направлении, возникает депланация поперечного сечения [30]. В случае депланации сечения необходимо более точно определять сдвиговые параметры для моделей [4, 13] на основе данных экспериментов на кручение при стесненной деформации торцов вследствие наличия захватов. В работе [31] модель (6)–(8) построена с учетом повреждений в тензорной формулировке и встроена в пакет Ansys. Проведено сравнение результатов расчета с данными экспериментов на одноосное растяжение и показано, что они удовлетворительно согласуются.

1.2. *Изотропный материал с различными свойствами при растяжении и сжатии.* В данном случае имеем $B^+_{ij} = B_+$, $B^-_{ij} = B_-$ $(i, j = 1, 2, 3)$, $B_+ \neq B_-$, $n_+ \neq n_-$. Тогда из (5) следует

$$2A^+_{12} = 2A^+_{23} = 2A^+_{31} = 3B_+^{2/(n_++1)}, \qquad 2A^-_{12} = 2A^-_{23} = 2A^-_{31} = 3B_-^{2/(n_-+1)},$$

$$A^+_{11} + A^+_{22} = A^+_{22} + A^+_{33} = A^+_{33} + A^+_{11} = B_+^{2/(n_++1)},$$

$$A^-_{11} + A^-_{22} = A^-_{22} + A^-_{33} = A^-_{33} + A^-_{11} = B_-^{2/(n_-+1)}$$

и из (1)–(4) получаем

$$\eta_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad 2\Phi(\sigma_i, \xi) = \Phi_1 + \Phi_2 + (\Phi_2 - \Phi_1)\sin 3\xi, \tag{9}$$

где $\Phi_1 = B_+\sigma_i^{n_++1}/(n_+ + 1)$; $\Phi_2 = B_-\sigma_i^{n_-+1}/(n_- + 1)$. Константы ползучести $B_+$, $n_+$ и $B_-$, $n_-$ могут быть получены соответственно в экспериментах на одноосное растяжение и сжатие независимо от того, в каком направлении вырезался из плиты образец ($\eta = B_+\sigma^{n_+}$ при $\sigma > 0$, $\eta = B_-|\sigma|^{n_--1}\sigma$ при $\sigma < 0$).

Модель (9) была предложена и применена в работе [7] при решении задачи о чистом кручении пластины из сплава В95пчТ2 ($T$ = 180 °С, толщина плиты, из которой вырезалась пластина, равна 40 мм) в предположении плоского напряженного состояния. Для решения использовался конечно-элементный алгоритм, входящий в пакет программ, разработанный авторами [7]. Получены результаты расчета, удовлетворительно согласующиеся с данными эксперимента. В [32] на основе модели (9) разработан встроенный в комплекс MSC.Marc конечно-элементный алгоритм решения трехмерных задач ползучести. Результаты расчета кручения пластины из сплава АК4-1 ($T = 200$ °C) хорошо согласуются с экспериментальными данными и результатами расчета по модели, в которой используется понятие “трансформированного” пространства напряжений [33].

**2. Определяющие соотношения в частных случаях (плоское напряженное состояние, растяжение, сдвиг).** Запишем определяющие соотношения (1)–(5) в случае плоского напряженного состояния. Поскольку $\sigma_{33} = 0$, выражение (3) преобразуется к виду

$$\sin 3\xi = \frac{1}{2}\Big(\frac{I}{\sigma_i}\Big)^3 - \frac{3}{2}\,\frac{I}{\sigma_i},$$

где $I = \sigma_{11} + \sigma_{22}$; $\sigma_i = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^{1/2}$ — интенсивность напряжений.

Введем обозначение $\zeta = I/\sigma_i$. Тогда выражения для потенциальной функции (1) и квадратичных форм (4) записываются в виде

$$2\Phi = \Phi_1(T_1) + \Phi_2(T_2) + [\Phi_2(T_2) - \Phi_1(T_1)](\zeta^3 - 3\zeta)/2, \tag{10}$$

где

$$T_1 = ((A_{22}^+ + A_{33}^+)\sigma_{11}^2 + (A_{11}^+ + A_{33}^+)\sigma_{22}^2 - 2A_{33}^+\sigma_{11}\sigma_{22} + 2A_{12}^+\sigma_{12}^2)^{1/2},$$
$$T_2 = ((A_{22}^- + A_{33}^-)\sigma_{11}^2 + (A_{11}^- + A_{33}^-)\sigma_{22}^2 - 2A_{33}^-\sigma_{11}\sigma_{22} + 2A_{12}^-\sigma_{12}^2)^{1/2}.$$

Для компонент скоростей деформаций ползучести (1) получаем

$$\begin{aligned} \eta_{11} = {} & \lambda_1 T_1^{n_+-1}((A_{22}^+ + A_{33}^+)\sigma_{11} - A_{33}^+\sigma_{22}) + \lambda_2 T_2^{n_--1}((A_{22}^- + A_{33}^-)\sigma_{11} - A_{33}^-\sigma_{22}) + \\ & + \lambda_3\Big(\frac{T_2^{n_-+1}}{n_-+1} - \frac{T_1^{n_++1}}{n_++1}\Big)\,\frac{\sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2}{\sigma_i^3}, \\ \eta_{22} = {} & \lambda_1 T_1^{n_+-1}((A_{33}^+ + A_{11}^+)\sigma_{22} - A_{33}^+\sigma_{11}) + \lambda_2 T_2^{n_--1}((A_{33}^- + A_{11}^-)\sigma_{22} - A_{33}^-\sigma_{11}) + \\ & + \lambda_3\Big(\frac{T_2^{n_-+1}}{n_-+1} - \frac{T_1^{n_++1}}{n_++1}\Big)\,\frac{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2}{\sigma_i^3}, \\ \eta_{12} = {} & \lambda_1 T_1^{n_+-1}(2A_{12}^+\sigma_{12}) + \lambda_2 T_2^{n_--1}(2A_{12}^-\sigma_{12}) - \lambda_3\Big(\frac{T_2^{n_-+1}}{n_-+1} - \frac{T_1^{n_++1}}{n_++1}\Big)\frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma_{12}}{\sigma_i^3}, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\zeta^3 - 3\zeta}{4}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\zeta^3 - 3\zeta}{4}, \qquad \lambda_3 = \frac{9}{4}\,(\zeta^2 - 1).$$

Для изотропного материала с различными свойствами при растяжении и сжатии выражения (10), (11) преобразуются к виду

$$\begin{gathered} 2\Phi(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) = \Phi_1(\sigma_i) + \Phi_2(\sigma_i) + [\Phi_2(\sigma_i) - \Phi_1(\sigma_i)](\zeta^3 - 3\zeta)/2, \\ \eta_{11} = \Phi_3(2\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \Phi_4(\sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2), \\ \eta_{22} = \Phi_3(2\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \Phi_4(\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2), \quad \eta_{12} = 6\Phi_3\sigma_{12} - 2\Phi_4(\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma_{12}. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь

$$\Phi_3 = \frac{1}{4}\,(B_+\sigma_i^{n_+-1} + B_-\sigma_i^{n_--1}) + \frac{1}{8}\,(B_-\sigma_i^{n_--1} - B_+\sigma_i^{n_+-1})(\zeta^3 - 3\zeta),$$
$$\Phi_4 = \frac{9}{8}\Big(\frac{B_-}{n_-+1}\,\sigma_i^{n_--2} - \frac{B_+}{n_++1}\,\sigma_i^{n_+-2}\Big)(\zeta^2 - 1).$$

В случае простого растяжения ($\sigma_{11} = \sigma$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$) имеем $\sigma_i = \sigma$, $\zeta = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и из (11) получаем

$$\eta_{11} = T_1^{n_+-1}(A_{22}^+ + A_{33}^+)\sigma, \quad \eta_{22} = -T_1^{n_+-1}A_{33}^+\sigma, \quad \eta_{33} = -T_1^{n_+-1}A_{22}^+\sigma,$$
$$T_1 = \sqrt{A_{22}^+ + A_{33}^+}\,\sigma.$$

Для ортотропного материала (6)–(8) соответственно имеем

$$\eta_{11} = T^{n-1}(A_{22} + A_{33})\sigma, \quad \eta_{22} = -T^{n-1}A_{33}\sigma, \quad \eta_{33} = -T^{n-1}A_{22}\sigma,$$
$$T = \sqrt{A_{22} + A_{33}}\,\sigma.$$

Для изотропного материала с различными свойствами при растяжении и сжатии из (12) следует

$$\eta_{11} = B_+\sigma^{n_+}, \qquad \eta_{22} = \eta_{33} = -B_+\sigma^{n_+}/2.$$

В случае равномерного растяжения ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma$, $\sigma_{33} = 0$) $\sigma_i = \sigma$, $\zeta = 2$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 1$ и

$$\eta_{11} = T_2^{n_--1}A_{22}^-\sigma, \quad \eta_{22} = T_2^{n_--1}A_{11}^-\sigma, \quad \eta_{33} = -T_2^{n_--1}(A_{11}^- + A_{22}^-)\sigma,$$
$$T_2 = \sqrt{A_{11}^- + A_{22}^-}\,\sigma.$$

Равномерное растяжение с напряжением $\sigma$ в направлениях осей $x_1$, $x_2$ эквивалентно сжатию с напряжением $\sigma$ в направлении оси $x_3$.

Для ортотропного материала (соотношения (6)–(8)) имеем

$$\eta_{11} = T^{n-1}A_{22}\sigma, \quad \eta_{22} = T^{n-1}A_{11}\sigma, \quad \eta_{33} = -T^{n-1}(A_{11} + A_{22})\sigma,$$
$$T = \sqrt{A_{11} + A_{22}}\,\sigma.$$

Для изотропного материала с различными свойствами при растяжении и сжатии из (12) получаем

$$\eta_{11} = \eta_{22} = B_-\sigma^{n_-}/2, \qquad \eta_{33} = -B_-\sigma^{n_-}.$$

В случае сдвига ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, $\sigma_{12} = \sigma$, $\sigma > 0$)

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\sigma, \quad \zeta = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1/2, \quad \lambda_3 = -9/4,$$
$$\eta_{11} = \eta_{22} = \Big(\frac{T_1^{n_++1}}{n_+ + 1} - \frac{T_2^{n_-+1}}{n_- + 1}\Big)\frac{\sqrt{3}}{4\sigma}, \qquad \eta_{12} = (T_1^{n_+-1}A_{12}^+ + T_2^{n_--1}A_{12}^-)\sigma,$$

где $T_1 = \sqrt{2A_{12}^+}\,\sigma$; $T_2 = \sqrt{2A_{12}^-}\,\sigma$.

Для ортотропного материала (соотношения (6)–(8)) соответственно имеем

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 0, \qquad \eta_{12} = 2T^{n-1}A_{12}\sigma_{12}. \tag{13}$$

Для изотропного материала с различными свойствами при растяжении и сжатии из (12) получаем

$$\begin{gathered}\eta_{11} = \eta_{22} = \frac{(\sqrt{3}\,)^{n_++2}B_+\sigma^{n_+}}{4(n_+ + 1)} - \frac{(\sqrt{3}\,)^{n_-+2}B_-\sigma^{n_-}}{4(n_- + 1)},\\ \eta_{12} = \frac{(\sqrt{3}\,)^{n_++1}B_+\sigma^{n_+} + (\sqrt{3}\,)^{n_-+1}B_-\sigma^{n_-}}{2}.\end{gathered} \tag{14}$$

Из (13), (14) следует, что в случае сдвига деформации $\eta_{11}$, $\eta_{22}$, $\eta_{33} = -(\eta_{11} + \eta_{22})$ возникают вследствие различия свойств материала при растяжении и сжатии. Для изотропного материала с различными свойствами при растяжении и сжатии, для описания которого используется степенная функция с показателем $n = n_+ = n_-$ и $B_+ \neq B_-$, соотношения (14) упрощаются:

$$\eta_{11} = \eta_{22} = (\sqrt{3}\,)^{n+2}\,\frac{B_+ - B_-}{4(n+1)}\,\sigma^n, \qquad \eta_{12} = (\sqrt{3}\,)^{n+1}\,\frac{B_+ + B_-}{2}\,\sigma^n. \tag{15}$$

Заметим, что в этом случае выражения для скорости деформаций сдвига $\eta_{12}$ в (15) и в модели [1, 8] совпадают.

**3. Апробация модели ортотропного материала с учетом различия его свойств при растяжении и сжатии.** Проводится сравнение результатов расчета по модели (1)–(5) с экспериментальными данными для трансверсально-изотропного сплава АК4-1. Данные экспериментов на растяжение и сжатие сплошных круглых цилиндрических образцов, а также на кручение тонкостенных трубчатых образцов, вырезанных в направлении нормали к плите толщиной 42 мм и в продольном направлении, при температуре $T = 200$ °C приведены в работе [24].

На рис. 1 представлены экспериментальные зависимости деформаций ползучести от времени при растяжении при постоянных напряжениях $\sigma = 156{,}96$; 166,77; 176,58 МПа для круглых образцов, вырезанных под углом 45° к направлению нормали к плите (точки *1–3*), в продольном (точки *4–6*) и поперечном (точки *7, 8*) направлениях, а также в направлении

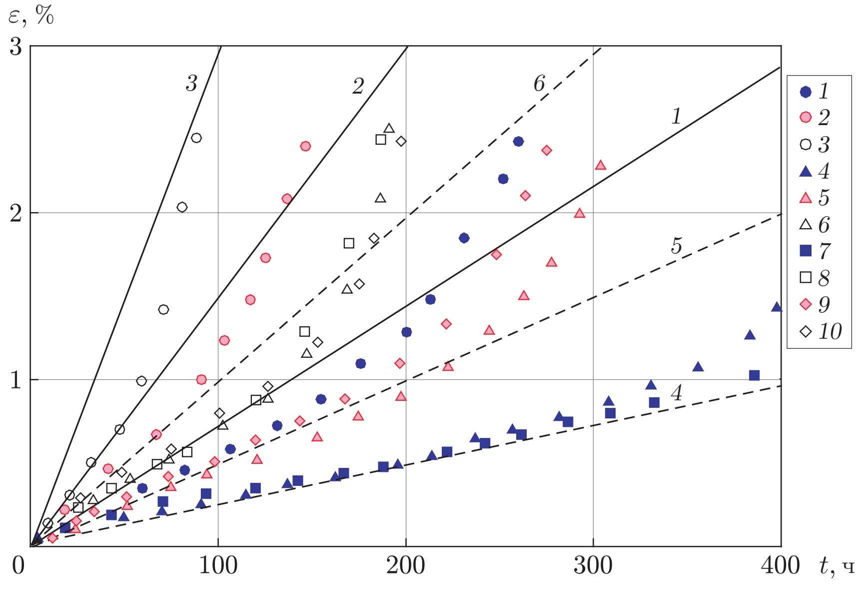


Рис. 1. Зависимости деформаций ползучести от времени при растяжении при постоянном напряжении образцов из сплава АК4-1 при $T = 200$ °C:
точки — экспериментальные данные (*1–3* — образцы, вырезанные под углом 45° к направлению нормали к плите, *4–6* — образцы, вырезанные в продольном направлении, *7, 8* — образцы, вырезанные в поперечном направлении, *9, 10* — образцы, вырезанные в направлении нормали к плите); линии — результаты расчетов (*1–3* — аппроксимация данных с параметрами (16) и $n^+ = 12$, полученных при растяжении образцов, вырезанных под углом 45° к направлению нормали к плите, *4–6* — аппроксимация данных с параметрами (17) и $n^+ = 12$, полученных при растяжении образцов, вырезанных в направлениях в плоскости плиты и по нормали к плите); *1, 4, 7* — $\sigma = 156{,}96$ МПа, *2, 5, 9* — $\sigma = 166{,}77$ МПа, *3, 6, 8, 10* — $\sigma = 176{,}58$ МПа

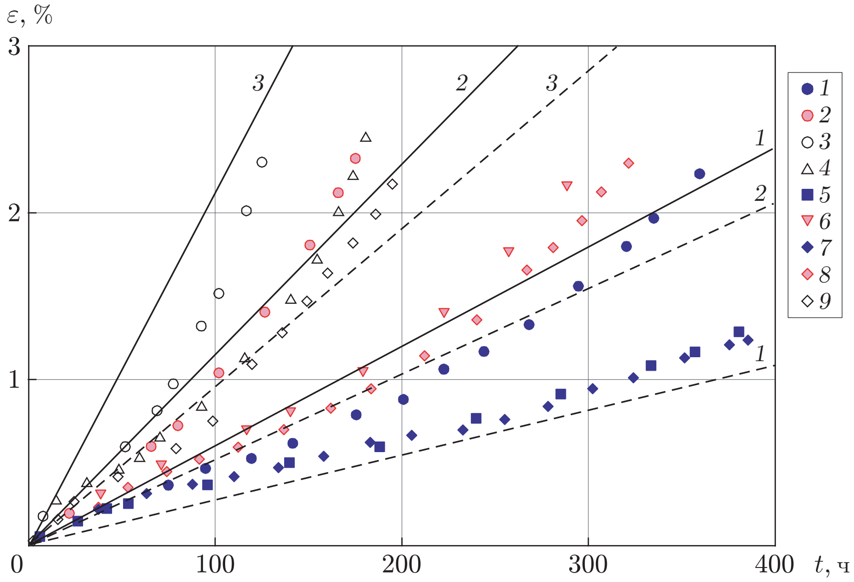


Рис. 2. Зависимости деформаций ползучести от времени при сжатии при постоянном напряжении образцов из сплава АК4-1 при $T = 200$ °C:
точки — экспериментальные данные (*1–3* — образцы, вырезанные под углом 45° к направлению нормали к плите, *4* — образцы, вырезанные в продольном направлении, *5* — образцы, вырезанные в поперечном направлении, *6* — образцы, вырезанные под углом 45° к продольному направлению в плоскости плиты, *7–9* — образцы, вырезанные в направлении нормали к плите); линии *1–3* — результаты расчетов (сплошные — аппроксимация данных с параметрами (18) и $n^- = 12$, полученных при сжатии образцов, вырезанных под углом 45° к направлению нормали к плите, штриховые — аппроксимация данных с параметрами (19) и $n^- = 12$, полученных при сжатии образцов, вырезанных в направлениях в плоскости плиты и по нормали к плите); *1, 5, 7* — $\sigma = 176{,}58$ МПа, *2, 6, 8* — $\sigma = 186{,}36$ МПа, *3, 4, 9* — $\sigma = 196{,}2$ МПа

нормали к плите (точки *9, 10*). Видно, что свойства сплава (скорость деформаций ползучести) при растяжении в плоскости плиты в продольном, поперечном направлениях, а также в направлении нормали к плите практически одинаковые.

На рис. 2 представлены экспериментальные зависимости деформаций ползучести от времени при сжатии при постоянных напряжениях $\sigma = 176{,}58$; 186,36; 196,20 МПа для образцов, вырезанных под углом 45° к направлению нормали к плите (точки *1–3*), в продольном (точки *4*) и поперечном (точки *5*) направлениях, в направлении под углом 45° к продольному направлению (точки *6*) и по нормали к плите (точки *7–9*). При сжатии, так же как и при растяжении, значения скорости деформаций ползучести образцов, вырезанных в различных направлениях в плоскости плиты (продольное, поперечное, под углом 45° к продольному направлению) и в направлении нормали к плите, близки. При этом скорость деформаций ползучести для одного и того же значения напряжения $\sigma = 176{,}58$ МПа при сжатии в плоскости плиты и в направлении нормали к ней (точки *5, 7* на рис. 2) в четыре раза меньше, чем при растяжении (точки *6, 8, 10* на рис. 1). Наибольшая скорость деформаций ползучести и при растяжении, и при сжатии имеет место для образцов, вырезанных под углом 45° к направлению нормали к плите, при растяжении скорость ползучести больше, чем при сжатии.

Для определения параметров $B^+_{ij}$, $n^+$ и $B^-_{ij}$, $n^-$ используем методику, описанную в работе [34]. Экспериментальные зависимости, приведенные на рис. 1, 2, представлены в логарифмических координатах $\ln\eta$–$\ln\sigma$ на рис. 3. Видно, что экспериментальные точки

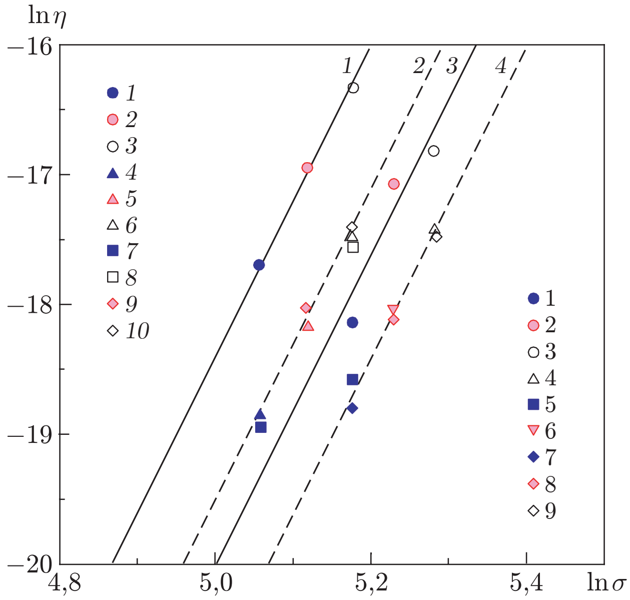


Рис. 3. Зависимости деформаций от напряжения в логарифмических координатах $\ln\eta - \ln\sigma$:
линии — результаты расчетов (*1, 3* — аппроксимации данных, полученных при растяжении и сжатии образцов, вырезанных под углом 45° к направлению нормали к плите; *2, 4* — аппроксимация данных, полученных при растяжении и сжатии образцов, вырезанных в направлениях в плоскости плиты и по нормали к плите); точки — экспериментальные данные (*1–10* — экспериментальные данные, соответствующие точкам *1–10* на рис. 1, 1–9 — экспериментальные данные, соответствующие точкам *1–9* на рис. 2)

группируются вдоль линий *1–4*. Полученные методом наименьших квадратов значения $n^+$ (линии *1, 2*) и значения $n^-$ (линии *3, 4*) были осреднены: $n^+ = 11{,}8$, $n^- = 12{,}3$. Для решения задачи о кручении стержней с использованием модели (1), (2) при $n^+ \neq n^-$ необходимо использовать численные методы. При $n^+ = n^-$ в ряде случаев можно получить аналитические решения или оценки. Поскольку значения показателей ползучести при растяжении и сжатии практически равны: $n^+ \approx n^-$, далее принимается $n^+ = n^- = 12$. На основе аппроксимации данных, приведенных на рис. 3, получены следующие значения параметров:

$$B_{23}^+ = B_{31}^+ = 2{,}976 \cdot 10^{-35}\ \text{МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}\ (\text{линия } \mathit{1}); \qquad (16)$$

$$B_{11}^+ = B_{22}^+ = B_{33}^+ = B_{12}^+ = 8{,}935 \cdot 10^{-35}\ \text{МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}\ (\text{линия } \mathit{2}); \qquad (17)$$

$$B_{23}^- = B_{31}^- = 0{,}811 \cdot 10^{-35}\ \text{МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}\ (\text{линия } \mathit{3}); \qquad (18)$$

$$B_{11}^- = B_{22}^- = B_{33}^- = B_{12}^- = 1{,}805 \cdot 10^{-35}\ \text{МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}\ (\text{линия } \mathit{4}). \qquad (19)$$

Аппроксимационные прямые, полученные при данных значениях констант, приведены на рис. 1, 2.

3.1. *Кручение стержня, вырезанного в направлении нормали к плите.* При кручении стержней, вырезанных в направлении нормали к плите, постоянным моментом имеем $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$, $\sigma_{13} \neq 0$, $\sigma_{23} \neq 0$. Упругими деформациями пренебрегаем. Для компонент скоростей деформаций ползучести из (1)–(5) следует

$$\eta_{11} = \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\frac{T_1^{n_+ + 1}}{n_+ + 1} - \frac{T_2^{n_- + 1}}{n_- + 1}\Big)\frac{\sigma_{13}^2 - 2\sigma_{23}^2}{(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)^{3/2}},$$

$$\eta_{22} = \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\frac{T_1^{n_++1}}{n_++1} - \frac{T_2^{n_-+1}}{n_-+1}\Big)\frac{\sigma_{23}^2 - 2\sigma_{13}^2}{(\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)^{3/2}},$$
$$\eta_{33} = \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\frac{T_1^{n_++1}}{n_++1} - \frac{T_2^{n_-+1}}{n_-+1}\Big)\frac{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}{(\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)^{3/2}}, \qquad (20)$$
$$\eta_{12} = 0, \quad \eta_{13} = (A_{31}^+ T_1^{n_+-1} + A_{31}^- T_2^{n_--1})\sigma_{13}, \quad \eta_{23} = (A_{23}^+ T_1^{n_+-1} + A_{23}^- T_2^{n_--1})\sigma_{23},$$

где $T_1 = \sqrt{2A_{31}^+\sigma_{13}^2 + 2A_{23}^+\sigma_{23}^2}$; $T_2 = \sqrt{2A_{31}^-\sigma_{13}^2 + 2A_{23}^-\sigma_{23}^2}$.

С учетом (5), (16)–(19) имеем $A_{31}^+ = A_{23}^+$, $A_{31}^- = A_{23}^-$, $n^+ = n^- = n$, $T_1 = \sqrt{2A_{31}^+}\sqrt{\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2}$, $T_2 = \sqrt{2A_{31}^-}\sqrt{\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2}$. Тогда выражения (20) записываются в виде

$$\eta_{11} = D_1(\sigma_{13}^2 - 2\sigma_{23}^2)(\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)^{(n-2)/2}, \qquad \eta_{22} = D_1(\sigma_{23}^2 - 2\sigma_{13}^2)(\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)^{(n-2)/2},$$
$$\eta_{33} = D_1(\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)^{n/2}, \qquad \eta_{12} = 0,$$
$$\eta_{13} = D_2(\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)^{(n-1)/2}\sigma_{13}, \qquad \eta_{23} = D_2(\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)^{(n-1)/2}\sigma_{23},$$

где

$$D_1 = \frac{\sqrt{3}}{4(n+1)}\big((2A_{31}^+)^{(n+1)/2} - (2A_{31}^-)^{(n+1)/2}\big), \qquad D_2 = \frac{1}{2}\big((2A_{31}^+)^{(n+1)/2} + (2A_{31}^-)^{(n+1)/2}\big).$$

В цилиндрической системе координат $(r,\varphi,z)$, ось $z$ которой совпадает с нормалью к плите, выражения для скоростей деформаций сдвига принимают вид

$$\eta_{r\varphi} = \eta_{rz} = 0, \qquad \eta_{\varphi z} = D_2\tau_{\varphi z}^n. \qquad (21)$$

Крутящий момент цилиндрического стержня с кольцевым сечением с внутренним и внешним радиусами $R_1$ и $R_2$ соответственно ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$) равен

$$M = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \tau_{\varphi z} r^2\,dr\,d\varphi. \qquad (22)$$

Из (21), (22) с учетом равенства $\eta_{\varphi z} = \theta r$ для скорости изменения погонного угла закручивания стержня $\theta$ получаем [35]

$$\theta = D_2\Big(\frac{3+1/n}{2\pi}\frac{M}{R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n}}\Big)^n. \qquad (23)$$

В этом случае функция напряжений, такая что $\tau_{\varphi z} = -\partial F/\partial r$, имеет вид

$$F(r) = \frac{(3+1/n)MR_2^{1+1/n}(1-(r/R_2)^{1+1/n})}{2\pi(1+1/n)(R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n})} = \Big(\frac{\theta}{D_2}\Big)^{1/n}\frac{1}{1+1/n}\,(R_2^{1+1/n} - r^{1+1/n}). \qquad (24)$$

Касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau_{\varphi z} = \frac{(3+1/n)Mr^{1/n}}{2\pi(R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n})}. \qquad (25)$$

3.2. *Кручение стержня, вырезанного в продольном или поперечном направлении.* При кручении постоянным моментом стержня, вырезанного в продольном направлении, имеем $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0$, $\sigma_{12} \neq 0$, $\sigma_{13} \neq 0$. Для компонент скоростей деформаций ползучести из (1)–(5) получаем

$$\eta_{11} = \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\frac{T_1^{n_+ +1}}{n_+ + 1} - \frac{T_2^{n_- +1}}{n_- + 1}\Big)\frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{3/2}},$$

$$\eta_{22} = \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\frac{T_1^{n_+ +1}}{n_+ + 1} - \frac{T_2^{n_- +1}}{n_- + 1}\Big)\frac{\sigma_{12}^2 - 2\sigma_{13}^2}{(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{3/2}}, \qquad (26)$$

$$\eta_{33} = \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\frac{T_1^{n_+ +1}}{n_+ + 1} - \frac{T_2^{n_- +1}}{n_- + 1}\Big)\frac{\sigma_{13}^2 - 2\sigma_{12}^2}{(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{3/2}},$$

$$\eta_{12} = (A_{12}^+ T_1^{n_+ -1} + A_{12}^- T_2^{n_- -1})\sigma_{12}, \quad \eta_{13} = (A_{31}^+ T_1^{n_+ -1} + A_{31}^- T_2^{n_- -1})\sigma_{13}, \quad \eta_{23} = 0,$$

где $T_1 = \sqrt{2A_{12}^+\sigma_{12}^2 + 2A_{31}^+\sigma_{13}^2}$; $T_2 = \sqrt{2A_{12}^-\sigma_{12}^2 + 2A_{31}^-\sigma_{13}^2}$.

С учетом (5), (16)–(19) имеем $A_{12}^+ \neq A_{31}^+$, $A_{12}^- \neq A_{31}^-$. При $n^+ = n^- = n$ для скоростей деформаций в направлении сдвига (26) находим

$$\eta_{12} = (A_{12}^+ T_1^{n-1} + A_{12}^- T_2^{n-1})\sigma_{12}, \qquad \eta_{13} = (A_{31}^+ T_1^{n-1} + A_{31}^- T_2^{n-1})\sigma_{13}. \qquad (27)$$

В предположении отсутствия стеснения торцов уравнение равновесия подвергаемого кручению стержня записывается в виде

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0. \qquad (28)$$

Граничное условие на контуре поперечного сечения имеет вид

$$\sigma_{13} n_3 + \sigma_{12} n_2 = 0. \qquad (29)$$

Крутящий момент равен

$$M = \iint_S (\sigma_{13} x_2 - \sigma_{12} x_3)\, dx_2\, dx_3. \qquad (30)$$

В данном случае при решении задачи о кручении стержня, вырезанного в продольном направлении, необходимо учитывать, что деформации сдвига зависят от смещения точек поперечного сечения вдоль оси стержня (депланации сечения) и решение задачи можно получить, используя численные методы расчета. Однако скорость изменения угла закручивания можно оценить с помощью метода, изложенного в [36]. В работе [36] для сплошного, ортотропного при ползучести стержня с круглым поперечным сечением проведено сравнение результатов расчета, выполненных методом конечных элементов с использованием пакета Ansys, и оценок, полученных из условий минимума дополнительного рассеяния и минимума полной мощности. Отличие угла закручивания, полученного из условия минимума дополнительного рассеяния (оценка сверху), от угла закручивания, вычисленного методом конечных элементов, составляет порядка 10 %. Расчеты показывают, что для тонкостенного стержня это различие уменьшается.

Численное решение задачи о кручении стержня с произвольным поперечным сечением (27)–(30) можно получить, сводя разрешающие соотношения к дифференциальному уравнению относительно депланации $W(x_2, x_3)$ либо относительно функции напряжений $F(x_2, x_3)$, такой что $\sigma_{12} = \partial F/\partial x_3$, $\sigma_{13} = -\partial F/\partial x_2$.

В случае двухсвязного контура момент (30) выражается через функцию напряжений $F(x_2, x_3)$ следующим образом [37]:

$$M = 2 \iint\limits_{S_0} F \, dx_2 \, dx_3 + 2F(C_1) S_1 \tag{31}$$

($S_0$ — площадь, ограниченная внутренним $C_1$ и внешним $C_2$ контурами; $S_1$ — площадь, ограниченная контуром $C_1$; $F(C_1)$ — значение функции напряжений на контуре $C_1$).

Для того чтобы получить верхнюю оценку скорости изменения угла закручивания, используем условие минимума дополнительного рассеяния [36, 37]. С учетом (1), (27), (31) это условие записывается в виде

$$I = \iint\limits_{S_0} \Big( \frac{T_1^{n+1} + T_2^{n+1}}{2(n+1)} - 2\theta F \Big) \, dx_2 \, dx_3 - 2\theta F(R_1) \pi R_1^2 = \min . \tag{32}$$

Будем предполагать, что функция напряжений имеет вид, подобный (24):

$$F(x_2, x_3) = c\theta^{1/n} F_0(x_2, x_3) = c\theta^{1/n} \big( 1 - \big( \sqrt{x_2^2 + x_3^2} / R_2 \big)^{1+1/n} \big),$$

или

$$F(r) = c\theta^{1/n} \big( 1 - (r/R_2)^{1+1/n} \big) \tag{33}$$

($c$ — константа, подлежащая определению). Ось $z$ цилиндрической системы координат совпадает с направлением оси $x_1$. Функция (33) с точностью до множителя является решением задачи о кручении стержня из изотропного материала в условиях установившегося состояния ползучести. Эта функция удовлетворяет уравнению равновесия (28) и на внешнем контуре при $r = R_2$ равна нулю. Подставляя (33) в (32), из уравнения $dI/dc = 0$ находим константу $c$, при которой (32) достигает минимума:

$$\begin{gathered} c = \Big( \frac{J_1}{J_2} \Big)^{1/n}, \qquad J_1 = 2F_0(R_1) \pi R_1^2 + \iint\limits_{S_0} 2F_0 \, dx_1 \, dx_2, \\ J_2 = \frac{1}{2} \iint\limits_{S_0} \big( (2A_{12}^+ F_{0,3}^2 + 2A_{31}^+ F_{0,2}^2)^{(n+1)/2} + (2A_{12}^- F_{0,3}^2 + 2A_{31}^- F_{0,2}^2)^{(n+1)/2} \big) \, dx_2 \, dx_3. \end{gathered} \tag{34}$$

Здесь $F_{0,3} = \partial F_0 / \partial x_3$; $F_{0,2} = \partial F_0 / \partial x_2$.

С учетом (33), (34) из (31) находим скорость изменения угла закручивания

$$\theta = (M/(cJ_1))^n. \tag{35}$$

Значение напряжения можно оценить приближенно по формуле

$$\tau_{\varphi z} = -\frac{\partial F}{\partial r} = \Big( 1 + \frac{1}{n} \Big) \frac{M}{J_1 R_2} \Big( \frac{r}{R_2} \Big)^{1/n}. \tag{36}$$

3.3. *Сравнение экспериментальных данных и результатов расчета.* На рис. 4 приведены экспериментальные зависимости погонного угла закручивания от времени $\alpha = \theta t$ [24] при кручении под действием постоянного момента при температуре $T = 200$ °C цилиндрических трубчатых образцов из сплава АК4-1, вырезанных в продольном направлении и в направлении нормали к плите. В таблице для каждого образца указаны приложенный крутящий момент, внутренний и внешний диаметры, скорость изменения угла закручивания, вычисленная по формуле (23) или (35) в зависимости от направления, в котором вырезан образец.

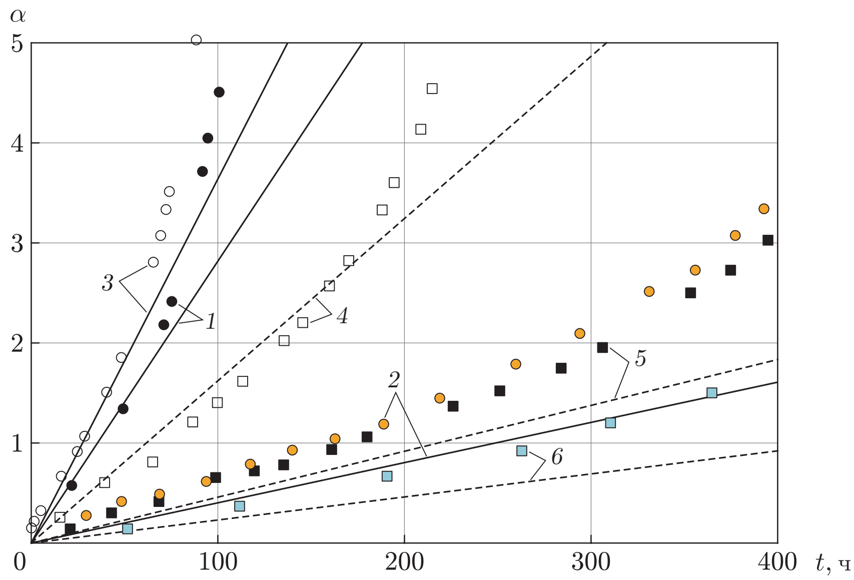


Рис. 4. Зависимости угла закручивания от времени $\alpha(t)$ для цилиндрических трубчатых образцов, вырезанных в направлении нормали к плите (*1*–*3*) и в продольном направлении (*4*–*6*):

точки — экспериментальные данные (*1*, *2* — образцы 1, 2 (см. таблицу) с толщиной стенки 1 мм, *3* — образец 3 с толщиной стенки 5 мм, *4*–*6* — образцы 4–6 с толщиной стенки 1 мм); линии — результаты расчета (*1*–*3* — расчет по формуле (23), *4*–*6* — расчет по формуле (35))

Результаты расчета скорости изменения угла закручивания для образцов с кольцевым поперечным сечением из сплава АК4-1 при $T = 200$ °C

| Номер образца | Направление, в котором вырезан образец | $M$, Н · м | $2R_1$, мм | $2R_2$, мм | $\theta \cdot 10^6$, рад/с$^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 55,67 | 18,013 | 20,010 | 7,845 |
| 2 | 3 | 41,00 | 18,220 | 19,938 | 1,117 |
| 3 | 3 | 180,03 | 10,030 | 19,980 | 10,140 |
| 4 | 1 | 56,12 | 17,985 | 20,002 | 4,511 |
| 5 | 1 | 50,30 | 17,992 | 20,000 | 1,274 |
| 6 | 1 | 47,32 | 18,000 | 20,000 | 0,640 |

При растяжении и сжатии скорость деформаций ползучести наибольшая у образцов рассмотренного сплава АК4-1, вырезанных под углом 45° к направлению нормали к плите. Вследствие этого скорость изменения угла закручивания образцов, вырезанных в направлении нормали к плите, больше скорости изменения угла закручивания образцов, вырезанных в продольном направлении. Этот результат подтверждается экспериментальными данными. Интенсивность напряжений $\sigma_i = \sqrt{3}\,\tau_{\varphi z}$, вычисленная при $r = (R_1 + R_2)/2$ для образца 1 по формуле (25) и для образца 4 по формуле (36), составляет 170 МПа, при этом углы закручивания для этих двух образцов различаются в два раза.

Таким образом, результаты расчетов с помощью предложенной модели удовлетворительно описывают экспериментальные данные.

**Заключение.** Предложенная модель ортотропного материала, свойства которого при растяжении и сжатии различаются, позволяет описать процесс ползучести, в случае если интенсивность процессов при растяжении и сжатии описывается функциями с различными степенными показателями. Получены определяющие соотношения в случае плоского напряженного состояния, рассмотрены случаи одноосного и двухосного растяжения-сжатия для несжимаемого при ползучести материала.

С использованием предложенной модели решена задача о кручении постоянным моментом при температуре $T = 200$ °C цилиндрических трубчатых стержней, вырезанных из трансверсально-изотропного сплава АК4-1 (плита толщиной 42 мм) в направлении нормали к плите и в продольном направлении. Получены определяющие уравнения при кручении. Значения параметров модели найдены в экспериментах на одноосное растяжение и сжатие сплошных круглых образцов. При одном и том же степенном показателе при растяжении и сжатии получено аналитическое решение для скорости изменения угла закручивания стержня, вырезанного в направлении нормали к трансверсально-изотропной плите. Для стержня, вырезанного в продольном направлении, получена верхняя оценка скорости изменения угла закручивания. Показано, что результаты расчета и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Горев Б. В., Никитенко А. Ф.** К ползучести материала с разными характеристиками на растяжение и сжатие // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1970. Вып. 6. С. 105–110.
2. **Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В.** О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // ПМТФ. 1979. № 4. С. 121–128.
3. **Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В.** О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Пробл. прочности. 1979. № 7. С. 62–67.
4. **Цвелодуб И. Ю.** Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики АН СССР, 1991.
5. **Цвелодуб И. Ю.** О ползучести материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1974. Вып. 19/20. С. 147–155.
6. **Банщикова И. А., Муравьева А. Е., Цвелодуб И. Ю.** Расчет пластин из упрочняющегося материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести // Обраб. металлов (технология, оборудование, инструменты). 2014. Т. 4, вып. 65. С. 68–77.
7. **Банщикова И. А., Горев Б. В., Цвелодуб И. Ю.** О ползучести пластин из алюминиевых сплавов при изгибе // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 156–159.
8. **Банщикова И. А., Ларичкин А. Ю.** Кручение круглых стержней с учетом разносопротивляемости материала растяжению и сжатию в условиях ползучести // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 6. С. 123–134.
9. **Соснин О. В.** Об анизотропной ползучести материалов // ПМТФ. 1965. № 6. С. 99–104.
10. **Betten J.** Creep mechanics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
11. **Anisotropic** behaviour of damaged materials / Ed. by J. J. Skrzypek, A. W. Ganczarski. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. (Lecture notes in applied and computational mechanics; V. 9). DOI: 10.1007/978-3-540-36418-4.
12. **Золочевский А. А.** Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А. А. Золочевский, А. Н. Склепус, С. Н. Склепус. Харьков: Бизнес Инвестор Групп, 2011.

13. **Voyiadjis G. Z., Zolochevsky A.** Modeling of secondary creep behavior for anisotropic materials with different properties in tension and compression // Intern. J. Plasticity. 1998. V. 14, N 10/11. P. 1059–1083.
14. **Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С.** Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 155–165.
15. **Цвелодуб И. Ю.** Об анизотропной ползучести металлических материалов // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, № 4. С. 672–674.
16. **Цвелодуб И. Ю.** К построению определяющих уравнений ползучести ортотропных материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 6. С. 98–101.
17. **Цветков В. В.** Краевые задачи ползучести поверхностно упрочненных цилиндров при различных видах квазистатического нагружения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Самара: Изд-во Сам. гос. техн. ун-та, 2018.
18. **Горев Б. В., Соснин О. В., Любашевская И. В.** К вопросу о ползучести материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // Тр. 4-й Всерос. конф. с междунар. участием, Самара, 29–31 мая 2007 г. Самара: Сам. гос. техн. ун-т, 2007. Ч. 1. С. 77–81.
19. **Zolochevsky A., Martynenko A., Kuhhorn A.** Structural benchmark creep and creep damage testing for finite element analysis with material tension-compression asymmetry and symmetry // Comput. Structures. 2012. V. 100/101. P. 27–38. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.02.021.
20. **Naumenko K.** Modeling high temperature materials behavior for structural analysis. Pt 1. Continuum mechanics foundations and constitutive models / K. Naumenko, H. Altenbach. Cham: Springer Intern. Publ. Switzerland, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-31629-1.
21. **Li Y., Shi Z., Lin J., et al.** A unified constitutive model for asymmetric tension and compression creep-ageing behaviour of naturally aged Al–Cu–Li alloy // Intern. J. Plasticity. 2017. V. 89. P. 130–149. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.11.007.
22. **Kobelev V.** Design and analysis of composite structures for automotive applications: chassis and drivetrain. Chichester: John Wiley and Sons, 2019.
23. **Leoni M., Karstunen M., Vermeer P. A.** Anisotropic creep model for soft soils // Geotechnique. 2008. V. 58, N 3. P. 215–226. DOI: 10.1680/geot.2008.58.3.215.
24. **Горев Б. В., Масанов И. Ж.** Особенности деформирования листовых конструкционных алюминиевых сплавов и плит в режимах ползучести // Технология машиностроения. 2009. № 7. С. 13–20.
25. **Горев Б. В., Любашевская И. В., Панамарев В. А., Иявойнен С. В.** Описание процесса ползучести и разрушения современных конструкционных материалов с использованием кинетических уравнений в энергетической форме // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 6. С. 132–144.
26. **Грязев М. В., Ларин С. Н., Яковлев С. С.** Оценка влияния анизотропии механических свойств заготовки на предельные возможности изотермического деформирования полусферических деталей в режиме ползучести // Изв. Тул. гос. ун-та. Техн. науки. 2011. № 2. С. 394–398.
27. **Banshchikova I. A.** Modeling of anisotropic creep by using Hill's theory // Zb. radova Konf. MIT 2009, Kopaonik (Serbia), 27 aug. — 1 sept. 2009, Budva (Montenegro), 1–5 sept. 2009. Kosovska Mitrovica: Univ. Pristina; Novosibirsk: Inst. Comput. Technol., 2010. P. 33–37.
28. **Банщикова И. А.** Расчет пластин двойной кривизны из анизотропных сплавов при ползучести // Вестн. Нижегор. ун-та. 2011. № 4, ч. 4. С. 1385–1387.
29. **Банщикова И. А., Блинов В. А.** Экспериментально-теоретический анализ деформирования трансверсально-изотропных пластин при ползучести // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 3. С. 129–138.

30. **Банщикова И. А., Цвелодуб И. Ю., Петров Д. М.** Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиговом направлении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 157, № 3. С. 34–41.
31. **Stewart C. M., Gordon A. P., Ma Y. W., Neu R. W.** An anisotropic tertiary creep damage constitutive model for anisotropic materials // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2011. V. 88. P. 356–364. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2011.06.010.
32. **Коробейников С. Н., Олейников А. И., Горев Б. В., Бормотин К. С.** Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычисл. методы и программирование: новые вычисл. технологии. 2008. Т. 9, № 1. С. 346–365.
33. **Горев Б. В., Банщикова И. А.** К использованию определяющих уравнений в энергетической форме для оценки живучести и разрушения элементов конструкций // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. 7-й Всерос. науч. конф. с междунар. участием, Самара, 3–6 июня 2010 г. Самара: Сам. гос. техн. ун-т, 2010. Ч. 1. С. 109–112.
34. **Соснин О. В.** Энергетический вариант теории ползучести / О. В. Соснин, Б. В. Горев, А. Ф. Никитенко. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986.
35. **Banshchikova I. A., Petrov D. M., Tsvelodub I. Yu.** Torsion of circular rods at anisotropic creep // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 722, N 1. 012004.
36. **Banshchikova I. A.** Evaluation of the stress-strain state of rod at torsion from an anisotropic material in the shear direction at creep // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 894. 012006. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012006.
37. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.

*Поступила в редакцию 6/III 2019 г.,*
*после доработки — 29/IV 2019 г.*
*Принята к публикации 29/VII 2019 г.*