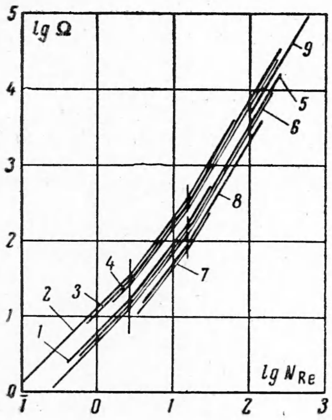
О ДВУЧЛЕННОЙ ФОРМУЛЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОРИСТЫХ СРЕД

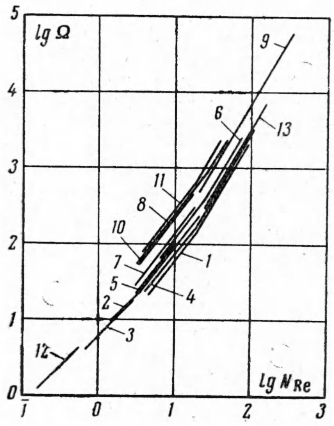
Б. Ф. Степочкин

(Казань)

На основе обработки обширных экспериментальных данных дается обобщенное выражение двучленной формулы гидравлического сопротивления пористых сред зернистого строения в виде зависимости критерия Лейбензона от критерия Рейнольдса. При обобщении используется гидродинамический коэффициент слоя, учитывающий аналогично коэффициенту проницаемости реальные свойства пористой среды, но характерный и постоянный для любого режима фильтрации.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Графики зависимости $\Omega = f(R)$ для различных зернистых материалов: *1* — стальные шарики — вода[3]; *2* — антрацит диаметром 0.939÷3.46 *мм* — вода [3]; *3* — антрацит диаметром 5.10 и 7.79 *мм* — вода [3]; *4* — гравий — вода [3], песок — воздух [6]; *5* — сферические частицы [7], таблетки — вода [9]; *6* — стальные шарики, свинцовая дробь и катализатор-воздух [4]; *7* — шарики из органического стекла — воздух [5]; *8* — стальные шарики, свинцовая дробь, гранулированный уголь — воздух [5]; *9* — гравий диаметром 42 *мм* — воздух [8]

Фиг. 2. Графики зависимости $\Omega = f(R)$ для различных зернистых материалов по опытным данным автора: *1* — алюмосиликатный катализатор — воздух; *2* — пшено—воздух, *3*—кварцевый песок—воздух; *4* — мелкопористый силикагель—воздух, дробь — вода; *5* — кварцевый песок—вода; *6* — силикагель — воздух; *7* — аммиачная селитра — воздух; *8* — гранулированный суперфосфат — воздух; *9* — мрамор — воздух; *10* — гранулированный уголь — воздух; *11* — мрамор — вода; *12* — кварцевый песок—вода; *13* — дробь — воздух

Дается оценка соотношения сил инерции и сил вязкости в фильтрационном потоке при различных режимах. Рекомендуется для практических расчетов гидравлического сопротивления пористых сред зернистого строения соответствующее выражение двучленной формулы.

При рассмотрении вопросов фильтрации, связанных с нелинейным законом движения жидкостей в пористых средах, большое распространение получила двучленная формула сопротивления различного вида

$$\Delta p / L = a\mu v + b\rho v^2, \qquad I = Av + Bv^2, \qquad \lambda = \frac{C}{R} + D \qquad \left(R = \frac{v\,d\rho}{\mu}\right)$$

Здесь Δp — перепад давления в пористой среде, L — длина или высота пористой среды, v — скорость фильтрации, ρ и μ— плотность и абсолютная вязкость жидкости соответственно, I — гидравлический уклон, λ — коэффициент сопротивления, R — критерий Рейнольдса, a, b, A, B, C, D — постоянные.

Пригодность и обоснованность двучленной формулы достаточно показана во многих общеизвестных работах по фильтрации и, в частности, в вышедших в последнее время книгах Г. Ф. Требина [1] и А. Е. Шейдеггера [2].

Ниже делается попытка получить более полное выражение двучленной формулы на основе обработки обширного экспериментального материала, заимствованного из различных литературных источников, а также из опытов автора; полученные закономерности относятся к несцементированным пористым средам зернистого строения.

Обработка данных по гидравлическому сопротивлению пористых сред производилась при помощи критериев Лейбензона Ω и Рейнольдса R

$$\Omega = \frac{\rho l^3}{\mu^2} \frac{\Delta p}{L}, \qquad R = \frac{v^+ l \rho}{\mu} \qquad \left(v^+ = \frac{v}{m} \right)$$

Здесь l — характерный линейный размер пористой среды; v — скорость фильтрации; m — пористость среды; в качестве характерного линейного размера был взят гидравлический радиус пористой среды r, в качестве характерной скорости v^+ — действительная скорость в поровых каналах. Подставляя значения характерной скорости и гидравлического радиуса, выраженного через диаметр зерен d, составляющих пористую среду, как $r = md/6(1 - m)$, получим

$$\Omega = \frac{\rho\, d^3 m^3 \Delta p}{216 \mu^2 (1 - m)^3 L}, \qquad R = \frac{v\, d\rho}{6\,(1 - m)\,\mu}$$

Результаты обработки экспериментальных данных [3—9] приведены на фиг. 1: результаты обработки экспериментов автора — на фиг. 2. Использованные данные охватывают большой диапазон размеров твердых частиц весьма разнообразной формы от нескольких микрон [10] до 75 *мм* [11] или соответственно чисел R от 10^{-6} до 10^3.

Кривые, изображающие зависимость $\Omega = f(R)$, для различных зернистых материалов отличаются одна от другой. Следовательно, данная критериальная зависимость не полностью выражает структуру пористой среды и необходимо введение дополнительных факторов, учитывающих действительные условия фильтрации. К таким факторам относятся: форма и шероховатость частиц, отклонение действительной динамической пористости от теоретической, извилистость поровых каналов.

Однако из этих графиков видно, что кривые, изображающие отдельные зависимости $\Omega = f(R)$, параллельны одна другой. Поэтому легко привести отдельные кривые к одной и получить, таким образом, обобщенную зависимость. Для этого достаточно ввести поправочный коэффициент-множитель, — который, как следует ожидать, учитывает суммарное влияние указанных выше факторов, характеризующих действительную структуру пористой среды в процессе фильтрации. Данный коэффициент можно называть различно; условимся его называть гидродинамическим коэффициентом слоя.

С точностью до $\pm 10\%$ кривые зависимости $\Omega = f(R)$ описываются двучленной формулой $\Omega = AR + BR^2$, где A и B — постоянные, численные значения которых зависят от вида зернистого материала и структуры зернистого слоя. Из параллельности кривых $\Omega = f(R)$ следует, что коэффициенты A и B для различных пористых сред должны изменяться пропорционально. В частности, это подтверждается и опытами Н. У. Койды [12]. В таком случае выделение гидродинамического коэффициента слоя позволяет записать двучленную формулу в виде

$$\Omega = \varphi\,(A_0 R + B_0 R^2)$$

В качестве эталонной пористой среды, константы которой A_0 и B_0 должны быть известны, можно взять в принципе любую пористую среду, например, зернистый слой, составленный из сферических частиц. Однако для такой пористой среды тоже не имеется какой-то однозначной зависимости. Коэффициент слоя φ может получиться при произвольном выборе какой-нибудь одной из возможных зависимостей для слоя из сферических частиц и больше и меньше единицы. Очевидно, условие $\varphi > 1$ будет иметь место, если за эталонную пористую среду взять, как обычно делается, идеальный фильтрующий слой, представляющий собой совокупность параллельных цилиндрических каналов. Значения констант A_0 и B_0 для такого слоя должны быть наименьшими, так как здесь не сказывается действие формы и шероховатости частиц, извилистости поровых каналов, отклонения действительной пористости от теоретической и т. д.

Зависимость для идеального слоя может быть установлена, исходя из уравнения Пуазейля для ламинарного режима и дальнейшей условной экстраполяции его на переходную и турбулентную области из условия параллельности кривой для идеального слоя действительным кривым зависимости $\Omega = f(R)$.

Из уравнения Пуазейля следует, что

$$\Delta p = \frac{64}{R_0} \frac{L}{d_0} \frac{\rho v_0^2}{2} \qquad \left(R_0 = \frac{v_0 d_0 \rho}{\mu} \right)$$

где v_0 — средняя скорость в цилиндрическом канале, d_0 — диаметр канала. Умножая обе части уравнения на отношение $d_0^2\rho^2/\mu^2$ и произведя несложное преобразование, можно получить

$$\frac{\Delta p\, d_0^3 \rho}{L \mu^2} = 32 R_0$$

Вместо диаметра цилиндрического канала d_0 введем гидравлический радиус потока r. Гидравлический радиус потока представляет собой отношение живого сечения потока ω, равного в данном случае $n\pi d_0^2/4$, где n — число каналов в слое, к смоченному периметру $\delta = n\pi d_0$, т. е.

$$r = \frac{\omega}{\delta} = \frac{n\pi\, d_0^2}{4n\pi\, d_0} = \frac{d_0}{4}, \quad \text{или} \quad d_0 = 4r$$

Подставляя значение d_0 в преобразованное уравнение Пуазейля, получаем

$$\frac{\Delta p}{L}\frac{\rho r^3}{\mu^2} = 2R, \quad \text{или} \quad \Omega = 2R$$

Путем введения гидродинамического коэффициента слоя относительно идеального слоя были сведены все опытные точки для различных зернистых материалов и жидкостей на одну кривую, приведенную на фиг. 3. Способом средних были получены значения постоянных A_0 и B_0, которые оказались равными $A_0 = 2.0$, $B_0 = 0{,}1$.

Таким образом, уравнение идеального фильтрующего слоя имеет вид

$$\Omega = 2R + 0.1R^2$$

а любой другой зернистой пористой среды

$$\Omega = \varphi\,(2R + 0.1R^2)$$

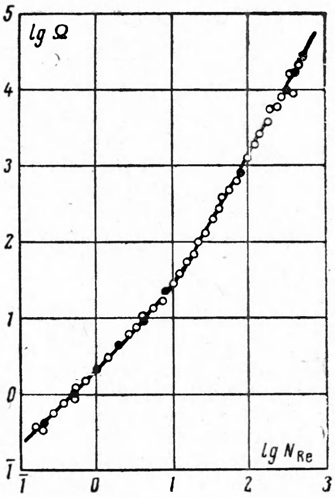
или, раскрывая критерии,

$$\Delta p = 72\varphi L\left[\frac{\mu v\,(1-m)^2}{d^2m^3} + \frac{1}{120}\,\frac{v^2\rho\,(1-m)}{dm^3}\right]$$

Точность данного уравнения в диапазоне чисел $R < 10^3$ составляет $\pm 10\%$ и вполне соответствует точности измерений величин, влияющих на процесс фильтрации.

Приведенные на фиг. 3 линии представляют собой линейную интерпретацию кривой сопротивления $\Omega = f(R)$ по участкам. Соответствующие уравнения отдельных областей и их границы даны в [13].

Полученное выражение двучленной формулы является простым и позволяет легко пользоваться ею для расчетов. Значение гидродинамического коэффициента φ должно быть определено опытным путем [13], так же, как определяется коэффициент проницаемости.



Фиг. 3. График обобщенной зависимости $\Omega = f(R)$. Точки, залитые черным, определены по уравнению для идеального грунта $\Omega = 2\,R + 0.1\,R^2$

Уравнение Козени, которым чаще всего пользуются в ламинарной фильтрации, соответствуют численному значению коэффициента слоя $\varphi = 2.5$. Наименьшие значения φ были получены для опытных данных Л. А. Акопяна [5], для них $\varphi = 1.35$. Наибольшие значения φ для обработанных автором данных были порядка семи для зерен активированного угля, антрацита, гранулированного угля, дробленого мрамора.

Из уравнения $\Omega = \varphi(2R + 0.1R^2)$ можно легко получить соотношение между силами инерции и силами вязкости в потоке фильтруемой жидкости или соотношение между потерей давления, обусловленной действием сил вязкости, Δp_+ и потерей давления, обусловленной действием сил инерции, Δp_- при различных режимах фильтрации. Первый член двучленной формулы, как известно, выражает Δp_+, второй Δp_-. Очевидно, при $R = 1$ потеря давления Δp составляет 1/20 или 5% от Δp_+. Следовательно, при числах $R < 1$ в фильтрационном потоке действуют в основном силы вязкости. Отсюда может быть решен вопрос о значении критического числа R или о пределе применимости линейного закона фильтрации с той или иной точностью. Выделенное автором ранее [13] критическое число $R = 2.8$ соответствует отношению $\Delta p_- / \Delta p_+ = 0.14$. Доля Δp_- в ламинарной области при $R < 2.8$, таким образом, не превышает 12% общей потери давления Δp.

Влияние сил инерции и сил вязкости на гидравлическое сопротивление становится одинаковым при $R = 20$. Данное значение числа R получается, если приравнять

$$2R = 0.1R^2$$

При дальнейшем увеличении числа R потеря давления Δp_- преобладает над Δp_+, составляет $\approx 83{,}3\%$ при $R = 100$, а при $R = 1000$ она будет равна 98% общей потери давления Δp. Как видно, при $R > 1000$ полностью господствуют в потоке силы инерции и имеет место квадратичная область, где

$$\Omega = BR^2$$

Приведенные соображения, таким образом, позволяют решить с любой точностью вопрос о том, когда можно пренебречь вязким членом потери напора и когда инерционным членом.

В связи с тем, что в механике грунтов имеет широкое распространение коэффициент проницаемости, целесообразно выразить полученное уравнение фильтрации через коэффициент проницаемости k. Зависимость между коэффициентом проницаемости и гидродинамическим коэффициентом слоя может быть найдена, если приравнять соответствующие выражения для градиента давления $\Delta p/L$ для линейного закона фильтрации

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\mu v}{k} \qquad (1)$$

$$\Omega = 2\varphi R, \quad \text{или} \quad \frac{\rho\, d^3 m^3 \Delta p}{216\mu^2 (1-m)^3 L} = 2\varphi \frac{v\, d\rho}{6\mu (1-m)} \qquad (2)$$

Отсюда

$$k = \frac{d^2 m^3}{72\varphi (1-m)^2}, \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{1}{k} \frac{d^2 m^3}{72 (1-m)^2}$$

Выражение для коэффициента проницаемости показывает, как влияет на проницаемость диаметр зерен и пористость зернистой среды. В коэффициенте слоя φ остается нераскрытым влияние шероховатости и формы частиц, отклонения действительной пористости от теоретической, извилистости поровых каналов.

Раскрывая выражение критериев Ω и R и подставляя вместо φ коэффициент проницаемости, получаем после соответствующих сокращений следующее выражение двучленной формулы сопротивления:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{1}{k}\left[\mu v + \frac{1}{120} \frac{\rho v^2 d}{(1-m)}\right]$$

Коэффициент проницаемости, входящий в формулу, должен быть определен обычным путем для ламинарной области.

Последнее уравнение является важным, так как пригодно во всей области чисел R, т. е. для любого практически встречающегося режима фильтрации, при использовании коэффициента проницаемости k, найденного для линейной области.

Поступила 20 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Требин Г. Ф. Фильтрация жидкостей и газов в пористых средах. Гостоптехиздат, 1959.
2. Шейдеггер А. Е. Физика течения жидкостей через пористые среды. Гостоптехиздат, 1960.
3. Минц Д. М., Шуберт С. А. Гидравлика зернистых материалов. Изд-во М-ва коммунального хоз-ва РСФСР, 1955.
4. Жаворонков Н. М., Аэров М. Э., Умник Н. Н. Гидравлическое сопротивление и плотность упаковки зернистого слоя. ЖФХ, 1949, т. XXIII, № 3.
5. Акопян Л. А., Касаткин А. Г. Гидродинамика слоя псевдоожиженного материала Ж. хим. пром-сть Госхимиздат, 1955, № 2.
6. Зелинский Г. С., Платонов П. М. Аэродинамика слоя сыпучей среды. Докл. АН УССР, 1958, № 2.
7. Федоров И. М. Коэффициенты испарения, теплоотдачи и сопротивления при сушке зернистых материалов с продувкой воздуха через слой. Сб. Современные проблемы сушильной техники, Госэнергоиздат, 1941, вып. 2.
8. Жаворонков Н. М. Гидравлические основы скрубберного процесса и теплопередача в скрубберах. Изд-во Советская наука, 1944.
9. McCune L. K., Wilhelm R. H. Mass and momentum transfer in a solid-liquid systems. Industrial Engineering Chemistry, 1949, v 41, № 6.
10. Кафаров В. В., Малиновская Т. А. О возможности моделирования процесса фильтрации на основе анализа структуры осадка. Ж. хим. пром-сть. Госхимиздат, 1956, № 8.
11. Коллеров Д. К., Житенская В. А. Сопротивление слоя дробленого сланца газовому потоку. Химия и технология топлив и масел, 1958, № 7.
12. Койда Н. У. О применении теории подобия при фильтрации жидкостей. ЖФХ, 1960, т. 34, № 4.
13. Степочкин. Б. Ф. Обобщение закономерностей течения жидкостей через зернистые слои. Научн. докл. высш. школы. Химия и хим. технология, 1959, № 1.