16. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н.** Гидродинамическая устойчивость и турбулентность.— Новосибирск: Наука, 1977.
17. **Davey A., Drazin P. G.** The stability of Poiseuille flow in a pipe // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 36, N 2.
18. **Лихачёв О. А.** Спектр малых возмущений течения в пограничном слое на плоской пластине // ПМТФ.— 1975.— № 4.
19. **Слепцов А. Г.** Оценки собственных значений при исследовании устойчивости пограничного слоя // ЧММСС.— 1974.— Т. 5, № 5.
20. **Reynolds W. C., Hussain A. K. M. F.** The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Pt 3. Theoretical models and comparisons with experiments // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 54, N 2.

г. Новосибирск *Поступила 22/XI 1988 г., в окончательном варианте — 13/III 1989 г.*

УДК 536.25:533.9

С. Н. Аристов, А. М. Пичугин

ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН В СЛОЕ ВЯЗКОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПЛАСТИНАМИ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ ГРАДИЕНТАМИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С развитием технологии и интенсификацией астрофизических и геофизических исследований, в которых тепловая конвекция играет существенную роль, актуальны исследования конвекции во вращающихся слоях непроводящей [1, 2] и электропроводящей жидкости с учетом поперечного магнитного поля [3]. Как правило, не учитывается наличие горизонтальных градиентов температуры, обычно имеющих место в реальных задачах и часто являющихся основной причиной движения [4]. Самый простой случай конвекции в слое, вызванный горизонтальным градиентом температуры, без учета вращения и магнитного поля исследован в [5].

Рассматривается бесконечный горизонтальный слой вязкой проводящей жидкости толщиной D, ограниченный проводящими пластинами, на которых поддерживаются разные произвольно ориентированные в плоскости слоя постоянные градиенты температуры. Слой вращается с постоянной угловой скоростью $\mathbf{f}/2$ относительно оси z, направленной поперек слоя. По оси z приложено постоянное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ и вектор ускорения свободного падения — $\mathbf{g}$. В приближении Буссинеска уравнения движения во вращающейся системе координат, связанной с границами слоя, имеют вид [4]

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} + \nu\Delta\mathbf{v} - \mathbf{f}\times\mathbf{v} + g\alpha T,$$
$$\partial\mathbf{B}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v} + \nu_m\Delta\mathbf{B},\ \partial T/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)T = \chi\Delta T,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,$$

где в давлении p учтены гидростатическая, магнитная и центробежная составляющие; $\mathbf{B}$ — магнитное поле, приведенное к размерности скорости; α — коэффициент температурного расширения жидкости; $\nu_m = 1/\sigma\mu\mu_0$ — коэффициент магнитной вязкости. Остальные обозначения общепринятые.

Для обезразмеривания в качестве единиц длины, времени, скорости, температуры, давления и магнитного поля выбраны соответственно D, D^2/ν, $g\alpha A_1 D^3/\nu$ (A_1 — градиент температуры на нижней плоскости), $A_1 D$, $g\alpha A_1 D^2$ (здесь учитывается то, что давление уже нормировано по плотности), B_0. Обезразмеренная система записывается как

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + \mathrm{G}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta\mathbf{v} + \mathrm{Ha}^2\mathrm{G}^{-1}\beta^{-1}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} - \mathrm{Ta}^{1/2}(\gamma\times\mathbf{v}) + \gamma T, \tag{1}$$
$$\partial\mathbf{B}/\partial t + \mathrm{G}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B} = \mathrm{G}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v} + \beta^{-1}\Delta\mathbf{B},$$
$$\partial T/\partial t + \mathrm{G}(\mathbf{v}\nabla)T = \mathrm{Pr}^{-1}\Delta T,\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

(числа $G = g\alpha A_1 D^4/\nu^2$ — Грасгофа, $\mathrm{Ha} = B_0 D/\sqrt{\nu\nu_m}$ — Гартмана, $\mathrm{Ta} = (fD^2/\nu)^2$ — Тейлора, $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — Прандтля, $\beta = \nu/\nu_m$ — Бэтчелора; γ — единичный вектор, направленный вдоль оси z).

Постановка задачи приводит к следующим граничным условиям: для скорости

$$v_x = v_y = v_z = 0 \text{ при } z = 0,\ 1, \quad \int_0^1 v_x\,dz = Q, \ \int_0^1 v_y\,dz = 0;$$

для температуры

$$T = x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 \text{ при } z = 0,$$
$$T = A(x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2) + T_0 \text{ при } z = 1;$$

для магнитного поля [3, 6]

$$\sigma_1\lambda_1(dB_{x,y}/dz) - \sigma B_{x,y} = 0 \quad \text{при } z = 0,$$
$$\sigma_2\lambda_2(dB_{x,y}/dz) + \sigma B_{x,y} = 0 \quad \text{при } z = 1,$$

где углы φ_1, φ_2 отсчитываются от оси x и задают в плоскости xy направления градиентов температуры на нижней и верхней плоскости соответственно; $A = A_2/A_1$ — отношение верхнего градиента температуры к нижнему; σ_1, λ_1, σ_2, λ_2 — электропроводимости и толщины нижней и верхней пластины; σ — электропроводимость жидкости; Q — расход по сечению слоя в направлении оси x.

Для нахождения решения скорость и магнитное поле представляются как функции, зависящие только от поперечной координаты z. Это позволяет существенно упростить систему уравнений (1) и получить стационарные точные решения системы для скорости, магнитного поля и температуры, удовлетворяющие всем граничным условиям.

Точное решение для скорости имеет вид

$$v_{x,y} = V_{x,y} + 2u_{x,y}z + w_{x,y},\ v_z = 0.$$

Здесь $V_{x,y}$ — постоянные интегрирования, определяемые из интегральных условий, наложенных на скорость:

$$V_{x,y} = R_{x,y}/R,\ R = 1 + 4(k_1\gamma_1 - k_2\gamma_2) + 4(k_1^2 + k_2^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2),$$
$$R_x = (Q - \bar{u}_x)(1 + 2(k_1\gamma_1 - k_2\gamma_2)) + 2\bar{u}_y(k_1\gamma_2 + k_2\gamma_1) -$$
$$- 2u_x(1)[(k_1\gamma_1 - k_2\gamma_2) + 2(k_1^2 + k_2^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)] - 2u_y(1)(k_1\gamma_2 + k_2\gamma_1),$$
$$R_y = (Q - \bar{u}_x)2(k_1\gamma_2 + k_2\gamma_1) - \bar{u}_y(1 + 2(k_1\gamma_1 - k_2\gamma_2)) +$$
$$+ 2u_x(1)(k_1\gamma_2 + k_2\gamma_1) - 2u_y(1)[(k_1\gamma_1 - k_2\gamma_2) + 2(k_1^2 + k_2^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)],$$
$$\bar{u}_{x,y} = \int_0^1 u_{x,y}\,dz, \quad \gamma_{1,2} = 2(\varepsilon_{1,2} - \varepsilon_{5,4})/(\mathrm{Ta} + \mathrm{Ha}^4)^{1/2}, \quad k_{1,2} =$$
$$= [\pm\mathrm{Ha}^2 + (\mathrm{Ta} + \mathrm{Ha}^4)^{1/2}]^{1/2}/\sqrt{2},$$
$$\varepsilon = 2\,\mathrm{ch}\,(2k_1) - 2\cos(2k_2),\ \varepsilon\varepsilon_1 = 2\,\mathrm{sh}\,k_1\cos k_2,\ \varepsilon\varepsilon_2 = 2\,\mathrm{ch}\,k_1\sin k_2,$$
$$\varepsilon\varepsilon_3 = \exp(2k_1) - \cos(2k_2),\ \varepsilon\varepsilon_4 = \sin(2k_2),\ \varepsilon\varepsilon_5 = \mathrm{sh}\,(2k_1),$$
$$u_x = -[\mathrm{Ha}^2((\partial T/\partial x) + \cos\varphi_1) + \mathrm{Ta}^{1/2}((\partial T/\partial y) + \sin\varphi_1)]/[4(\mathrm{Ta} + \mathrm{Ha}^4)],$$
$$u_y = -[\mathrm{Ha}^2((\partial T/\partial y) + \sin\varphi_1) - \mathrm{Ta}^{1/2}((\partial T/\partial x) + \cos\varphi_1)]/[4(\mathrm{Ta} + \mathrm{Ha}^4)],$$
$$\partial T/\partial x = (A\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)z + \cos\varphi_1,$$
$$\partial T/\partial y = (A\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)z + \sin\varphi_1,$$
$$w_{x,y} = \exp[-k_1(1 - z)][C_{1,2}\cos k_2(1 - z) \pm C_{2,1}\sin k_2(1 - z)] +$$
$$+ \exp[-k_1 z][C_{3,4}\cos k_2 z \pm C_{4,3}\sin k_2 z],$$
$$C_{1,2} = V_{x,y}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \pm V_{y,x}(\varepsilon_2 - \varepsilon_4) - 2u_{x,y}(1)\,\varepsilon_3 \mp 2u_{y,x}(1)\varepsilon_4,$$
$$C_{3,4} = V_{x,y}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \pm V_{y,x}(\varepsilon_2 - \varepsilon_4) + 2u_{x,y}(1)\varepsilon_1 \pm 2u_{y,x}(1)\varepsilon_2.$$

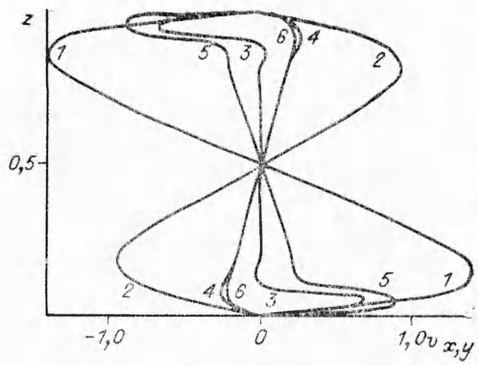

Рис. 1

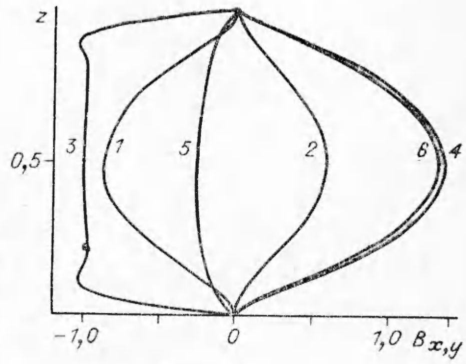

Рис. 2

Решения для магнитного поля и температуры легко найти, подставляя выражение для скорости в уравнения [7]. В данной работе полученные выражения для магнитного поля и температуры не приводятся ввиду своей громоздкости. В соответствующих предельных случаях они переходят в известные решения Бириха [5] (На = Та = $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $A = 1$), Экмана (G = На = 0), Гартмана (G = Та = 0), при G = 0 переходят в решения из [3].

Свойства точного решения рассматриваются на примере ртути при $T \sim 300$ К, алюминия при $T \sim 900$—1000 К, натрия при $T \sim 370$ К. Все графики построены при $Q = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $A = 1$, толщина слоя принималась равной 1 см. Числа Грасгофа каждого вещества вычисляются для градиента температуры, равного 1 К/м. В выражении для скорости два первых слагаемых формируют ядро течения, третье отвечает за погранслои. Это хорошо видно на рис. 1, где приводятся профили x-й (нечетные номера) и y-й (четные номера) компонент скорости для ртути. Профили *1* — $v_x \cdot 10^2$, *2* — $v_y \cdot 10^5$ рассчитаны при Та = 3,04, На = 14,5, что соответствует угловой скорости вращения 0,001 об/с и напряженности магнитного поля 50 А/м. Ядро течения линейно зависит от поперечной координаты z, толщина погранслоев стремится к нулю при увеличении магнитного поля, y-е компоненты скорости появляются только благодаря вращению и существенно зависят от Та. Профили *3* — $v_x \cdot 10^4$, *4* — $v_y \cdot 10^3$ вычислены при Та = $3{,}04 \cdot 10^6$, На = 0,029 (1 об/с, 0,1 А/м) (случай слабого магнитного поля и сильного вращения). В ядре жидкость практически неподвижна, видна периодическая смена направления скорости с затухающей к центру интенсивностью течения. Хорошо видны Экмановские пограничные слои, толщина которых стремится к нулю при увеличении Та. Для y-й компоненты характерна линейная зависимость профиля ядра течения от поперечной координаты. Профили *5* — $v_x \cdot 10^4$, *6* — $v_y \cdot 10^3$ получены при Та = $3{,}04 \cdot 10^6$, На = 14,5 (случай сильного поля и сильного вращения). На профиле x-й компоненты скорости хорошо

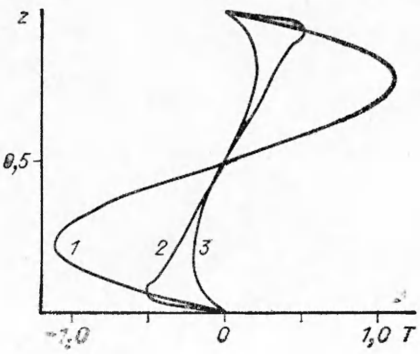

Рис. 3

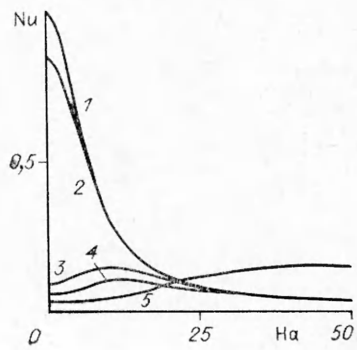

Рис. 4

прослеживается влияние обоих факторов, виден линейный профиль ядра и Экмановские пограничные слои.

На рис. 2 представлены профили x-х и y-х компонент магнитного поля: *1* — $B_x \cdot 10^7$, *2* — $B_y \cdot 10^9$, *3* — $B_x \cdot 10^9$, *4* — $B_y \cdot 10^7$, *5* — $B_x \cdot 10^8$, *6* — $B_y \cdot 10^7$. Номера профилей соответствуют тем же числам Гартмана и Тейлора, что и номера профилей скорости. Наиболее интересен случай сильного вращения и слабого магнитного поля — профиль *3*. Плоский провал на профиле x-й компоненты магнитного поля говорит о практически неподвижном ядре течения.

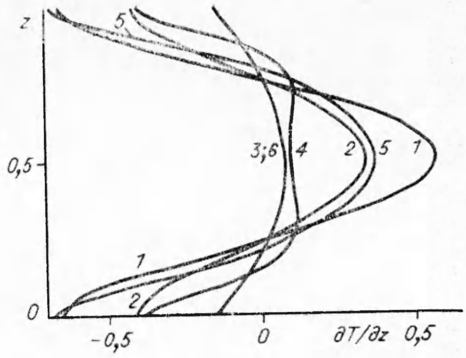

Рис. 5

На рис. 3 показаны профили температуры при тех же параметрах, что и профили скорости и магнитного поля.

Интересно рассмотреть изменение теплопотока через границу слоя в зависимости от вращения и поперечного магнитного поля. Для исследования теплообмена через границу слоя определим локальное число Нуссельта Nu в точке с координатами x, y, z как отношение безразмерного градиента температуры поперек слоя к поперечному градиенту при отсутствии вращения и магнитного поля: $\mathrm{Nu} = (\partial T/\partial z)/(\partial T/\partial z)|_{\mathrm{Ha,Ta=0}}$ (Nu зависит от Q, G, Pr, Ha, Ta).

На рис. 4 представлена зависимость Nu на границе при $x = y = z = 0$ от G при различных Ta для разных веществ. Кривая *1* соответствует зависимости Nu для алюминия и натрия при Ta = 2,7 и Ta = 5,2 (0,01 об/с), *2* — ртути при Ta = 304 (0,01 об/с), *3* — алюминия при Ta = $2{,}7 \cdot 10^4$ (1 об/с), *4* — натрия при Ta = $5{,}2 \cdot 10^4$ (1 об/с), *5* — Nu·10 — ртути при Ta = $3{,}04 \cdot 10^6$ (1 об/с). Видно, что интенсивность теплопотока при слабом вращении сильно уменьшается с увеличением магнитного поля. При сильном вращении наблюдается смещение максимума теплопотока в сторону сильных магнитных полей. С увеличением магнитного поля теплопоток стремится к одному пределу, не зависящему от Ta.

На рис. 5 показана зависимость поперечного градиента температуры по сечению слоя для жидкого натрия. В случае равных градиентов температуры на границах интегральный теплопоток поперек слоя равен нулю при любых G и Ta. Все кривые симметричны относительно середины слоя. Номера кривых отвечают параметрам: *1* — $(\partial T/\partial z) \cdot 10^3$, Ta = Ha = 0; *2* — $(\partial T/\partial z) \cdot 10^3$, Ta = 5,2, Ha = 5; *3* — $(\partial T/\partial z) \cdot 10^4$, Ta = 5,2, Ha = 50; *4* — $(\partial T/\partial z) \cdot 10^4$, Ta = $5{,}2 \cdot 10^4$, Ha = 1; *5* — $(\partial T/\partial z) \times 10^4$, Ta = $5{,}2 \cdot 10^4$, Ha = 10; *6* — $(\partial T/\partial z) \cdot 10^4$, Ta = $5{,}2 \cdot 10^4$, Ha = 50.

По графикам видно, что малым изменениям G, особенно для малых Ta, характерны большие изменения Nu. Таким образом возможно управление теплопотоком на границе слоя. Данная особенность исследуемой задачи обусловлена быстрой перестройкой пограничных слоев течения при малых изменениях G и Ta.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hathaway D., Somerville R.** Nonlinear interactions between convection, rotation and flows with vertical shear // J. Fluid Mech.— 1986.— V. 164.— P. 91—105.
2. **Hathaway D., Somerville R.** Thermal convection in a rotating shear flow // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.— 1987.— V. 38.— P. 43—68.
3. **Soundalgekar V. M., Bhat J. P.** MHD flow and heat transfers in a viscous electrically conducting fluid in a rotating channel between conducting plates // Appl. Energy.— 1985.— V. 20, N 2.
4. **Моффат Г.** Возбуждение магнитного поля в проводящей среде.— М.: Мир, 1980.
5. **Бирих Р. В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ.— 1966.— № 3.

6. **Shercliff J. A.** The flow of conducting fluids in circular pipes under transverse magnetic fields // J. Fluid Mech.— 1956.— V. 1, N 6.
7. **Аристов С. Н., Пичугин А. М.** МГД-течения и теплообмен во вращающихся слоях вязкой жидкости с горизонтальным градиентом температуры в поперечном магнитном поле.— Пермь, 1987.— Деп. в ВИНИТИ 09.10.87, № 7183—В87.

г. Пермь *Поступила 6/XII 1987 г., в окончательном варианте — 6/III 1989 г.*

УДК 532.546

Ш. А. Ершин, У. К. Жапбасбаев, М. Ш. Кулымбаева, Л. Г. Хадиева

ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ АППАРАТОВ С НЕПОДВИЖНЫМ ЗЕРНИСТЫМ СЛОЕМ

В технологических процессах наиболее широкое применение получили реактор вытеснения с неподвижным зернистым слоем (НЗС) и аппараты с радиальным подводом потока с Z- и П-образными схемами течения. В связи с тем, что распределение реагирующей смеси в зернистом слое определяется общей аэродинамической обстановкой в аппарате, точное решение задачи требует рассмотрения соответствующих систем уравнений движения в свободных частях аппарата и внутри НЗС. Гидродинамические модели таких реакторов, базирующихся на теории идеальной жидкости [1—3], основаны на совместном рассмотрении системы уравнений Эйлера с линейным или нелинейным законом Дарси. Расчет строится в каждой области отдельно с удовлетворением условий сопряжения на границах раздела сред и позволяет определить поле скорости и давления при заданном распределении завихренности во входном сечении [2]. Как показывают эксперименты, в свободных частях аппаратов с НЗС имеют место отрывные явления и застойные зоны [4], которые не описываются в рамках модели идеальной жидкости. Эти явления оказывают влияние на распределение потока в НЗС и могут быть объяснены исходя из теории вязкой жидкости. Модель вязкой жидкости в пористых средах рассмотрена во многих исследованиях. В частности, в [5] проведено изучение движения вязкой жидкости в трубе с гранулированным наполнителем и дано объяснение появлению макроскопических неоднородностей в профилях скорости из-за повышения порозности слоя вблизи стенки. Однако расчеты аппаратов с НЗС не проводились. Ниже изложены некоторые результаты исследования аэродинамики реакторов с НЗС на основе теории вязкой жидкости.

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарное плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в аппаратах с НЗС. Области течения до и после зернистого слоя обозначаются через G_1 и G_3, в зернистом слое — G_2 (рис. 1). Если воспользоваться методом осреднения по жидкой фазе локального объема пористой среды [6, 7], то систему уравнений движения и неразрывности можно записать в единой форме, справедливой для всей области течения G_i:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{h}{\mathrm{Re}}\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]-\zeta u; \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{h}{\mathrm{Re}}\left[2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]-\zeta v; \tag{1.2}$$

$$\partial\varepsilon u/\partial x+\partial\varepsilon v/\partial y=0, \tag{1.3}$$

где ε — порозность слоя; $\zeta=150(1-\varepsilon)^2DL/(\varepsilon^2d_3^2\,\mathrm{Re})$; $h=D/L$; $\mathrm{Re}=u_0D/\nu$; D — половина высоты входного сечения; L — характерный размер.

В областях G_1 и G_3 ($\varepsilon=1$) система (1.1)—(1.3) является уравнениями Навье — Стокса, а в G_2 ($\varepsilon<1$) она описывает движение вязкой жидкости в изотропной пористой среде. Пренебрежение в (1.1)—(1.3) инерционными членами в G_2 приводит к модели Бринкмана [8], а вязкостными членами — к динамической модели [9].