

УВЛЕЧЕНИЕ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СУСПЕНЗИИ
ВРАЩАЮЩИМСЯ ПОЛЕМ

В. М. Зайцев, М. П. Шлиomis

(Пермь)

Рассмотрено поведение непроводящей ферромагнитной суспензии в однородном вращающемся магнитном поле. Вращение поля вызывает вращение взвешенных частиц, обладающих собственными магнитными моментами. Каждая частица становится центром микроскопического вихря, которые, складываясь, порождают макроскопическое (то есть гидродинамическое) движение среды. Для описания такого «перекачивания» момента импульса из скрытой формы (микровихри) в видимую использованы уравнения движения жидкости с внутренним вращением. Получено решение этих уравнений для случая, когда ферромагнитная суспензия заполняет цилиндрическую полость, а магнитное поле вращается в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Вычислены поглощаемая мощность и момент сил трения, действующий на стенки цилиндра. Результаты расчета сравниваются с имеющимися экспериментальными данными.

Увлечение непроводящей жидкости вращающимся магнитным полем наблюдалось впервые в 1939 году В. Н. Цветковым [1]. В эксперименте использовалась анизотропная жидкость (*n*-азоксианизол), молекулы которой обладают диамагнитной анизотропией и стремятся расположиться так, чтобы наибольшая длина молекулы была параллельна напряженности поля. Вращение магнитного поля приводит в этом случае к появлению внутреннего момента импульса, связанного с поворотом молекул. Процессы внутреннего трения, сопровождающие вращение молекул, обеспечивают частичный переход внутреннего момента импульса в видимую (гидродинамическую) форму. При стационарном вращении поля устанавливается равновесное распределение момента между скрытым и видимым движением, т. е. вся жидкость вовлекается во вращение.

Ротационный эффект, аналогичный эффекту В. Н. Цветкова, но гораздо сильнее выраженный, наблюдался недавно Р. Мошковым и Р. Е. Розенцвейгом [2] в опытах с ферромагнитной жидкостью. Последняя представляла собой коллоидную суспензию взвешенных в непроводящей жидкости ферромагнитных частиц.

В обеих указанных работах дается идентичное объяснение наблюдаемого увлечения жидкости; на наш взгляд, это объяснение ошибочно. При стационарном вращении взвешенных частиц момент внешней силы, действующий на них со стороны поля, уравновешивается моментом сил вязкого трения. Авторы работ [1,2] считают, что этого достаточно для вовлечения жидкости в макроскопическое движение. Рассмотрим, однако, суспензию, в которой все взвешенные частицы вращаются с одинаковой угловой скоростью ω . Каждая частица вовлекает во вращение близлежащие слои вязкой жидкости, образуя микроскопический вихрь, размеры которого не превосходят расстояния между частицами; при этом каждая частица вращает жидкость около собственной осп, поэтому при усреднении микроскопические вихри не приводят к результирующему гидродинамическому движению. «Макроскопический» вихрь скорости $\Omega = \frac{1}{2} \text{rot } v$ возможен, как показано ниже, лишь при неоднородном внутреннем вращении.

1. Для теоретического описания обнаруженного в эксперименте [2] увлечения жидкости вращающимся магнитным полем необходимо правильно учесть взаимодействие между вращением скрытым (микровихри) и видимым (с гидродинамической скоростью v). Уравнения движения несжимаемой жидкости, обладающей внутренним моментом импульса, имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v \right] &= - \nabla p + \eta_s \Delta v + \frac{1}{2\tau_s} \text{rot } s \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (v \nabla) s &= - \frac{1}{\tau_s} (s - J \Omega) + D \Delta s + K \\ \text{div } v &= 0 \quad \left(\eta_s = \eta + \frac{J}{4\tau_s} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь s , τ_s и D — объемная плотность, время релаксации и коэффициент диффузии внутреннего момента импульса, J — момент инерции единицы объема, равный по порядку величины ρl^2 , где ρ — плотность суспензии, l — среднее расстояние между взвешенными частицами — центрами микровихрей, K — объемная плотность момента внешних сил, действующих на частицы.

Уместно отметить, что s не сводится к сумме моментов импульса твердых частиц s_0 . Каждая частица увлекает во вращение окружающую жидкость, так что s больше, чем s_0 , приближаясь к последнему вблизи границ полости, где движение жидкости затруднено.

Система уравнений (1.1) не является замкнутой — она должна быть дополнена уравнениями, определяющими плотность момента внешних сил. Такие уравнения, однако, не могут быть получены в общем виде. В самом деле, момент внешней силы \mathbf{k} , действующий на одну частицу, существенным образом зависит от ее внутреннего состояния и ориентации. Поэтому для получения макроскопической объемной плотности K необходимо провести усреднение микроскопических моментов \mathbf{k} , что в каждом конкретном случае требует специального анализа.

Рассмотрим ферромагнитную суспензию, состоящую из сферических однодоменных частиц i , каждая из которых обладает магнитным моментом m . Если напряженность H однородного вращающегося поля мала по сравнению с βM_i (β — константа анизотропии, M_i — удельная намагниченность твердого ферромагнетика), то момент сил, действующий на отдельную частицу, равен $\mathbf{k} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$. В рассматриваемом случае сильноанизотропного ферромагнетика определение объемной плотности момента внешних сил сводится к простому суммированию векторов \mathbf{k} , что дает

$$\mathbf{K} = (\Sigma \mathbf{m}) \times \mathbf{H} \equiv \mathbf{M} \times \mathbf{H} \quad (1.2)$$

где \mathbf{M} — удельная намагниченность жидкости. Итак, система (1.1) должна быть дополнена уравнением, описывающим динамику намагниченности ферромагнитной суспензии.

На магнитный момент отдельной частицы действует поле \mathbf{H} , создаваемое внешними источниками, и локальное поле, обусловленное диполь — дипольным взаимодействием магнитных моментов. Последнее, однако, как и в парамагнетике, не оказывает ориентирующего действия и потому в дальнейшем не учитывается. Равновесное распределение частиц по ориентациям их магнитных моментов в постоянном поле определяется уравнением Эйнштейна — Фоккера, стационарное решение которого в данном случае совпадает, как известно [4], с распределением Гиббса

$$w = C \exp(\mathbf{mH} / kT)$$

Отсюда следует, что система магнитных моментов ведет себя как обычный парамагнетик, но с аномально большими моментами отдельных частиц. Равновесная намагниченность такого «суперпарамагнетика» описывается функцией Ланжевена

$$M = M_0 L\left(\frac{\mathbf{mH}}{kT}\right)$$

Магнитные моменты частиц велики, поэтому насыщение при комнатной температуре достигается уже в очень слабых полях. Таким образом, в постоянном поле имеем $\mathbf{M} = (M_0 / H) \mathbf{H}$. Во вращающемся поле магнит-

¹ Если частицы будут не однодоменными, то полученные ниже результаты справедливы в полях, напряженность которых меньше коэрцитивной силы, причем под m следует понимать тогда остаточную намагниченность.

ный момент стремится к мгновенному равновесному значению, что позволяет записать уравнение для намагниченности в виде ¹

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \left(M - \frac{M_0}{H} H \right) \quad (1.3)$$

где τ — время релаксации намагниченности. Так как в рассматриваемом сильноанизотропном ферромагнетике магнитный момент жестко связан с осью легчайшего намагничения, то поворот магнитных моментов возможен лишь как поворот самих частиц. Поэтому время τ определяется только температурой, вязкостью жидкости и размерами частиц.

Уравнения (1.1) — (1.3) образуют полную систему уравнений для рассматриваемой задачи.

2. Пусть ферромагнитная жидкость заполняет цилиндрическую полость радиуса R . Магнитное поле, перпендикулярное оси цилиндра, вращается с постоянной угловой скоростью ω

$$H_x = H \cos \omega t, \quad H_y = H \sin \omega t$$

Будем искать стационарное решение уравнений движения, в котором скорость жидкости имеет только φ -компоненту: $v_\varphi = v(r)$, $v_r = v_z = 0$. Как видно из (1.1.1), такое движение возможно, если s не зависит от времени и $s_r = s_\varphi = 0$, $s_z = s(r)$. Из уравнений (1.1.2) и (1.2), в свою очередь, следует, что стационарное решение указанного вида существует только при условии $K_z = M_x H_y - M_y H_x = \text{const}(t)$. Это условие удовлетворяется, когда вектор намагниченности вращается с той же угловой скоростью, что и поле, образуя с ним постоянный угол слежения α

$$M_x = M \cos(\omega t - \alpha), \quad M_y = M \sin(\omega t - \alpha)$$

Амплитуда намагниченности M и угол α находятся из уравнения (1.3)

$$\text{tg } \alpha = \omega \tau, \quad M = M_0 \cos \alpha = \frac{M_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad (2.1)$$

Отсюда видно, что угол слежения $\alpha < 1/2 \pi$ при любых частотах вращения поля, а объемная плотность магнитного момента монотонно убывает с ростом частоты ². Последнее означает расплывание распределения вероятностей для ориентаций магнитных моментов отдельных частиц по мере увеличения частоты поля. При этом сами частицы, вопреки предположениям, сделанным в [1,2], не вращаются стационарным образом. Для стационарного вращения отдельной частицы требуется постоянство угла слежения, составляемого ее магнитным моментом с направлением поля. Однако такому постоянству препятствует броуновское движение, непрерывно изменяющее как ориентации частиц, так и действующие на них локальные поля.

Перейдем к определению v и s . Исключая из уравнения (1.1.1) давление, получаем для отличных от нуля компонент вихря скорости $\hat{\Omega}_z = \Omega$ и внутреннего момента $s_z = s$ уравнения

$$\left[r \left(\Omega - \frac{s}{4\tau_s \eta_*} \right) \right]' = 0, \quad \frac{D}{r} (rs)' - \frac{1}{\tau_s} (s - J\Omega) = -MH \sin \alpha \quad (2.2)$$

(штрих означает дифференцирование по r) с граничными условиями на поверхности цилиндра

$$v(R) = 0, \quad s(R) = s_0$$

¹ Это уравнение справедливо при частотах вращения поля, малых по сравнению с частотой ферромагнитного резонанса.

² Аналогичную частотную дисперсию обнаруживают жидкие полярные диэлектрики в электрическом поле [5].

Проинтегрируем первое уравнение системы (2.2)

$$\Omega = \frac{1}{2r} (rv)' = \frac{s}{4\tau_s \eta_*} + C_1 \quad (2.3)$$

и исключим Ω из второго уравнения

$$s'' + \frac{s'}{r} - \kappa^2 s = -A, \quad \kappa^2 \equiv \frac{\eta}{\eta_* D \tau_s}, \quad A \equiv \frac{1}{D} \left(MH \sin \alpha + \frac{J}{\tau_s} C_1 \right) \quad (2.4)$$

Отсюда

$$s(r) = A\kappa^{-2} + C_2 I_0(\kappa r)$$

Здесь I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента. Скорость жидкости находится теперь из уравнения (2.3). Удовлетворив граничным условиям, получим

$$s(r) = s_0 + (\tau_s MH \sin \alpha - s_0) \frac{\eta_*}{\eta(R)} \left[1 - \frac{I_0(\kappa r)}{I_0(\kappa R)} \right], \quad v(r) = v_0 \left[\frac{r}{R} - \frac{I_1(\kappa r)}{I_1(\kappa R)} \right]$$

$$v_0 \equiv \frac{R(\tau_s MH \sin \alpha - s_0)}{4\eta(R)} \frac{2I_1(\kappa R)}{\kappa R I_0(\kappa R)}, \quad \eta(R) \equiv \eta + \frac{J}{4\tau_s} \left[1 - \frac{2I_1(\kappa R)}{\kappa R I_0(\kappa R)} \right]$$

Значения функции $\eta(R)$, как видно из ее определения, лежат в интервале $\eta_* > \eta(R) > \eta$. Характер решения (2.5) существенно зависит от величины κR , т. е. от отношения радиуса цилиндра к диффузионной длине

$$l_D = 1/\kappa \approx \sqrt{D\tau_s} \quad (\eta_* / \eta \sim 1) \quad (2.6)$$

В основе механизма диффузии внутреннего момента импульса лежит вязкость суспензии, а время релаксации определяется вязкостью и средним расстоянием l между твердыми частицами (центрами микровихрей). Простейшие оценки типа $D \sim \nu$ и $\tau_s \sim l^2 / \nu$ приводят по формуле (2.6) к $l_D \sim l$. Сравнение результатов расчета с экспериментом [2] дает $l_D \sim 10^{-4}$ см, что согласуется с указанной выше оценкой. Поэтому в дальнейшем принимается $\kappa R \gg 1$.

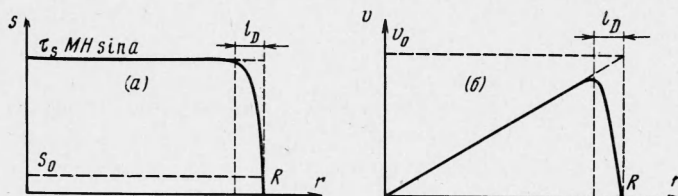
Решение (2.5) при $\kappa R \gg 1$ имеет ярко выраженный пограничный характер. Во всем объеме жидкости, за исключением узкого пристеночного слоя, s постоянно и равно $\tau_s MH \sin \alpha$, и спадает до граничного значения s_0 на расстояниях порядка l_D (фиг. 1, а). Величина s_0 характеризует интенсивность вращения одних только взвешенных частиц; определение ее выходит за рамки гидродинамической теории. В принципе, величина s_0 может быть определена опытным путем. К сожалению, имеющихся в настоящее время экспериментальных данных для этого недостаточно — в единственной заметке [2] приведено только краткое описание предварительных наблюдений. Можно ожидать, однако, что s_0 мало по сравнению с $\tau_s MH \sin \alpha$. Действительно, $s = \tau_s MH \sin \alpha$ есть сумма моментов импульса микроскопических вихрей, размеры которых порядка расстояния между частицами l . Так как l велико по сравнению с размерами частиц a , то

$$(s_0 / s) \ll (a / l)^2 \ll 1$$

Поэтому в выражении для амплитуды скорости v_0 можно опустить s_0 . Тогда при $\kappa R \gg 1$ имеем, с учетом (2.1)

$$v_0 = \frac{M_0 H R}{2\eta_*} \frac{1}{\kappa R} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.7)$$

Профиль скорости $v(r)$ оказывается линейным вплоть до $r \approx R - l_D$ (фиг. 1, б). Как видно из (2.7), амплитуда скорости макроскопического движения жидкости пропорциональна величине приложенного поля и обладает заметной частотной дисперсией. Максимальная скорость увлечения жидкости вращающимся магнитным полем достигается при $\omega\tau = 1$.



В работе [2] приведена зависимость амплитуды скорости от напряженности поля при двух значениях циклической частоты вращения поля: $f_1 = 100$ гц и $f_2 = 1000$ гц. Для обеих частот амплитуда является линейной функцией поля, а наклон прямой $v_0(H)$ при частоте f_1 в четыре раза меньше, чем при f_2 . Этих данных достаточно, чтобы по формуле (2.7) определить время релаксации намагниченности. Получающееся значение $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ сек согласуется с независимой оценкой, по которой $\tau \approx 4\pi\eta a^2 / kT$ есть диффузионное время для вращательного броуновского движения: приравнивание указанных выражений для τ дает правильный порядок величины $a \sim 10^{-5}$ см [6].

3. В непрозрачных жидкостях, к которым относятся ферромагнитные суспензии, измерение профиля скорости сопряжено с большими погрешностями. Гораздо большая точность может быть достигнута при изучении интегральных характеристик движения: момента сил трения, действующего на стенки цилиндра, и поглощаемой мощности, которая может быть измерена стандартными радиотехническими методами. В связи с этим представляет интерес вычисление момента сил трения M_f и диссипативной функции F .

Момент сил трения, действующий на единицу длины цилиндра, равен [7]

$$M_f = -2\pi R^2 \sigma_{r\varphi}(R), \quad \sigma_{r\varphi}(r) = \eta_* (v' - v/r)$$

Подставляя в выражение для $(r\varphi)$ -компоненты тензора вязких напряжений скорость жидкости из (2.5), получаем

$$M_f = \pi R^2 M H \sin \alpha \frac{\eta_*}{\eta(R)} \left[1 - \frac{2I_1(\kappa R)}{\kappa R I_0(\kappa R)} \right]$$

Отсюда при $\kappa R \gg 1$

$$M_f = \pi R^2 M_0 H \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (3.1)$$

Оценим величину момента сил трения при $\omega\tau \approx 1$. В эксперименте [2] использовалась ферромагнитная суспензия с $M_0 = 60$ гаусс. Для такой жидкости при радиусе цилиндра $R \sim 1$ см получаем $M_f \sim H \cdot 10^2$ дин.

Диссипативная функция для жидкости с внутренним вращением имеет вид [3]

$$F \equiv F_n + F_\tau + F_D$$

$$F_n = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2, \quad F_\tau = \frac{(s - J\Omega)^2}{2J\tau_s}, \quad F_D = \frac{D}{J} \left(\frac{\partial s}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.2)$$

Энергия, диссипируемая в единицу времени, равна $|E'| = 2 \int F dV$; интегрирование здесь ведется по объему V цилиндра. Главный вклад в диссипацию вносит F_τ , связанное с релаксацией внутреннего вращения. В самом деле, F_η и F_D малы из-за малости производных v' и s' во всем объеме цилиндра за исключением узкого пристеночного слоя толщины l_D (фиг. 1). В этом слое F_η и F_D сравниваются по величине с F_τ , так что их вклад в интеграл E' мал по сравнению с вкладом F_τ в отношении

$$l_D / R \equiv (\kappa R)^{-1} \ll 1$$

По той же причине в выражении для F_τ можно пренебречь $J\Omega$ по сравнению с s . Таким образом, диссипативная функция практически постоянна во всем объеме цилиндра и равна

$$F \approx F_\tau \approx \frac{s^2}{2J\tau_s} \approx \frac{1}{2J\tau_s} (\tau_s M H \sin \alpha)^2$$

Итак, поглощаемая мощность

$$|E'| = \frac{\tau_s}{J} M_0^2 H^2 V \frac{\omega^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} \quad (3.3)$$

Максимальное поглощение происходит при $\omega\tau \approx 1$. В этом случае, используя приведенные выше простейшие оценки $J \sim \rho l^2$ и $\tau_s \sim l^2 / \nu$, для $M_0 = 60$ гаусс получаем

$$|E'| / V \sim 10^{-2} H^2 \text{ вт/см}^3 \quad (3.4)$$

где H выражается в эрстедах. Столь большая величина диссипируемой мощности делает практически невозможным осуществление предложенных в [2] феррогидродинамических насосов, основанных на увлечении жидкости вращающимся полем.

4. В заключение обсудим пределы применимости проведенного расчета. Уравнения (1.1) линейны по s . Это значит, что они не описывают корреляцию микровихрей в разных пространственных точках. Такое приближение допустимо пока радиус микровихря, образующегося около твердой частицы, мал по сравнению с расстоянием l между частицами, или по крайней мере не превышает l . Между тем увеличение s с ростом H ($s \approx \tau_s M H \sin \alpha$) означает увеличение радиусов «присоединенных» вихрей. Поэтому, начиная с некоторых значений напряженности магнитного поля, взаимодействие вихрей становится существенным, а линейные уравнения перестают быть справедливыми. В сильных полях возникает целый спектр масштабов «микровихрей», что соответствует сильноанизотропной развитой турбулентности. Нет оснований ожидать, что в турбулентной области сохранится линейная зависимость осредненной скорости от напряженности поля. Такая линейная зависимость наблюдалась в экспериментах [2], что подтверждает применимость нашего расчета для использованного там интервала полей.

Поступила 26 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Z w e t k o f f V. Bewegung anisotroper Flüssigkeiten im rotierenden Magnetfeld. Acta physicochimica URSS, 1939, vol. 10, No. 4.
2. M o s k o w i t z R., R o s e n s w e i g R. E. Nonmechanical torque-driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field. Appl. Phys. Let., 1967, vol. 11, No. 10.
3. Ш л и о м и с М. И. К гидродинамике жидкости с внутренним вращением. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 1 (7).
4. Л е о н т о в и ч М. А. Статистическая физика. М., Гостехиздат, 1954.
5. Д е б а й П. Полярные молекулы. ОНТИ, 1934.
6. N e u r i n g e r J. L., R o s e n s w e i g R. E. The ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.
7. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред, Изд. 2. М., Гостехиздат, 1953.