11. **Корявов В. П., Виленская Г. Г.** Расчет движения в ближней зоне взрыва в твердой среде.— ПМТФ, 1968, № 6, с. 76—85.
12. **Имшенник В. С., Осовец С. М., Отрощенко И. В.** Динамика перетяжек плазменного шнура и электромагнитное ускорение ионов.—ЖЭТФ, 1973, т. 64, вып. 6, с. 2057—2071.
13. **Pirri A. N.** Theory for momentum transfer to a surface with a high-power laser.— «Phys. fluids», 1973, vol. 16, N 9, p. 1435—1440.
14. **Кузнецов Н. М.** Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах. М., «Машиностроение», 1965.
15. **Авилова И. В., Биберман Л. М., Воробьев В. С., Замалин В. М., Кобзев Г. А., Лагарьков А. Н., Мнацаканян А. Х., Норман Г. Э.** Оптические свойства горячего воздуха. М., «Наука», 1970.

УДК 536.46 : 533. 6

ОЦЕНКИ НОРМАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛАМИНАРНЫХ И МЕЛКОМАСШТАБНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПЛАМЕН

В. С. Баушев, В. Н. Вилюнов

(*Томск*)

При наиболее общих предположениях (учет влияния числа Льюиса — Семенова, теплового расширения, переменности теплофизических параметров и т. п.) получены аналитические оценки нормальных скоростей горения ламинарных и турбулентных пламен. В случае аррениусовской зависимости скорости реакции от температуры скорость горения представлена асимптотическим рядом по безразмерной температуре Франк-Каменецкого; для турбулентного пламени — по параметру относительного масштаба турбулентности. Окончательные результаты в широком диапазоне изменения параметров сравниваются с численным счетом на ЭВМ точных уравнений и с зависимостями, полученными по методу сращиваемых асимптотических разложений.

1. Математическая формулировка задачи. Ламинарное пламя. Когда температурная зависимость скорости объемного тепловыделения определяется законом Аррениуса

$$\Phi = (\rho(T))^n v^n z(T) \exp(- E/RT), \tag{1.1}$$

теплодиффузионный механизм распространения одномерного стационарного пламени описывается [1] системой уравнений

$$dp/du = v^n k(u) f(u)/p - \omega; \tag{1.2}$$
$$(1/L) dv/du = 1 - \omega(v - u)/p, \ 0 < u < 1$$

и граничными условиями

$$u = 0, \ p = 0, \ v = 0; \tag{1.3}$$

$$u = 1, \ p = 0; \tag{1.4}$$

$$f(u) = \begin{cases} \exp(-\theta_0 u/(1 - \sigma u)), & 0 \leqslant u \leqslant \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < u \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

«Отрезание» (1.5) тепловыделения (ε — параметр «отрезания») обеспечивает существование собственного значения ω_0 задачи (1.1)—(1.4), которое единственно при $1 \leqslant \mathrm{Le} < \infty$ [1]. Вопрос о единственности при $\mathrm{Le} < 1$ еще не нашел своего решения.

Связи между безразмерными и размерными величинами:

$$u = (T_+ - T)/(T_+ - T_-); \; p = -(\lambda/\lambda_+)du/d\xi; \; \xi = x/x_+, \; k(u) = $$
$$= (\lambda/\lambda_+)(\rho/\rho_+)^n z/z_+;$$

$$\mathrm{Le} = \lambda/c\rho D; \; \beta = RT_+/E; \; x_+ = (a_+\tau_+)^{1/2}; \; a_+ = \lambda_+/c\rho_+;$$

$$\tau_+ = z_+^{-1}\rho_+^{1-n}\exp(1/\beta); \quad \omega = w_+(\tau_+/a_+)^{1/2};$$

$$\theta_0 = \left(E/RT_+^2\right)(T_+ - T_-); \quad \sigma = \beta\theta_0 = 1 - T_-/T_+,$$

где v — концентрация; T — температура; w_+ — нормальная скорость распространения пламени относительно продуктов реакции; $c = \mathrm{const}$ — теплоемкость при постоянном давлении; $\rho = \rho(T)$ — плотность; $D = D(T)$ — эффективный коэффициент диффузии; n — порядок реакции; x_+ — пространственный масштаб; $z(T)$ — частотный фактор; Le — число Льюиса—Семенова; τ_+ — характерное время химической реакции; E — энергия активации; R — газовая постоянная. Индексами минус и плюс соответственно отмечаются параметры, относящиеся к исходной смеси и к конечным продуктам реакции. Аналогичная индексация используется далее для обозначения верхних и нижних оценок функций и скоростей горения.

В частном случае степенных функций $\lambda \sim T^{m_1}$, $\rho \sim T^{-n}$, $z \sim T^{m_2}$, $0 \leqslant m_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant n \leqslant 3$, $0 \leqslant m_2 \leqslant 1$ имеем $k(u) = (1 - \sigma u)^m$, $m = m_1 - n + m_2$.

Дальнейшее рассмотрение справедливо и в том случае, когда температурная зависимость $f(u)$ отличается от аррениусовской, но удовлетворяет условиям существования и единственности собственного значения ω_0.

Факт зависимости решений системы (1.2) с условиями (1.3) от ω обозначается следующими равенствами:

$$p(u) = \bar{p}(\omega, u); \; v(u) = \bar{v}(\omega, u).$$

Очевидно,

$$dp/du = \partial\bar{p}/\partial u; \; dv/du = \partial\bar{v}/\partial u. \tag{1.6}$$

Граничное условие (1.4) с учетом (1.5) равносильно условию

$$p(\varepsilon) - \omega(1 - \varepsilon) = 0. \tag{1.7}$$

Поэтому вместо (1.4) можно использовать (1.7), а решения системы (1.2) рассматривать лишь в области $0 < u < \varepsilon$.

2. **Оценки скоростей горения. Ламинарное пламя.** При $\mathrm{Le} = 1$ система (1.2) сводится к одному уравнению

$$dp/du = \varphi(u)/p - \omega, \; \varphi(u) = u^n k(u) f(u). \tag{2.1}$$

Считаем параметр «отрезания» переменным и обозначим его через t, $0 < t < \varepsilon$.

Собственное значение $\omega_0 = \omega_0(t)$ будет удовлетворять, согласно (1.7), уравнению

$$\bar{p}(\omega_0, t) - \omega_0(1 - t) = 0. \tag{2.2}$$

Дифференцируя это равенство по t, учитывая, что (1.6)

$$\partial\bar{p}/\partial t + \omega_0 = \lim_{u\to t}(dp/du + \omega_0) = \varphi(t)/\bar{p}(\omega_0, t) = \varphi(t)/\omega_0(1 - t),$$

и обозначая $q(t) = \bar{q}(\omega, t) = \partial\bar{p}(\omega, t)/\partial\omega$, получим дифференциальное уравнение для ω_0

$$d\omega_0/dt = \varphi(t)/\{\omega_0(1-t)[1 - t - \bar{q}(\omega_0, t)]\} \tag{2.3}$$

с условием $\omega_0(0) = 0$, которое следует из (2.2).

Согласно теореме об оценках [2], с ростом ω решение уравнения (2.1) с условием $p(0) = 0$ уменьшается, поэтому $q < 0$. Дифференцируя уравнение (2.1) по ω, получим

$$dq/du = -(\varphi(u)/p^2)q - 1.$$

При $u = 0$ $q = 0$, поэтому

$$q(t) = -\int_0^t \frac{\varphi(u)}{p^2} q\,du - t > -t.$$

После подстановки в (2.3) верхней ($q_+ = 0$) и нижней ($q_- = -t$) функций и последующего интегрирования находим верхнюю и нижнюю оценки ω_0

$$\omega_+^2 = 2\int_0^\varepsilon \frac{\varphi(u)}{(1-u)^2}\,du; \quad \omega_-^2 = 2\int_0^\varepsilon \frac{\varphi(u)}{1-u}\,du. \tag{2.4}$$

Аналогичные зависимости более сложным путем получены в [3]. Известна приближенная формула Я. Б. Зельдовича [4]

$$\omega_\infty^2 = 2\int_0^\varepsilon \varphi(u)\,du. \tag{2.5}$$

Формула (2.5) дает значение ω_∞, меньшее, чем нижняя оценка (2.4).

Для двух уравнений (1.2) аналогично предыдущему имеем

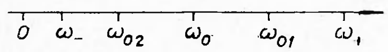
$$d\omega_0/dt = [\bar{v}^n(\omega_0, t)k(t)f(t)]/\{\omega_0(1 - t)[1 - t - \bar{q}(\omega_0, t)]\}. \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) можно использовать для нахождения оценок ω_0, если известны оценки v и q. Более простой путь заключается в использовании формул (2.4). Предположим, что найдена верхняя функция $v_+(u)$, независимая от ω, такая, что $v < v_+$. Собственное значение ω_{01} задачи

$$dp_1/du = v_+^n k(u) f(u)/p_1 - \omega, \quad p_1(0) = p_1(1) = 0$$

будет больше ω_0. Действительно, рассматривая решение этого уравнения с условием $p_1(0) = 0$, имеем

$$p_1(1) = \bar{p}_1(\omega_0, \varepsilon) - \omega_0(1 - \varepsilon) > \bar{p}(\omega_0, \varepsilon) - \omega_0(1 - \varepsilon) = 0,$$



и, чтобы обратить $p_1(1)$ в нуль, необходимо увеличить ω. На фигуре видно, что верхняя оценка для ω_{01}, которую можно получить с помощью (2.4), будет верхней оценкой и для ω_0.

Аналогичным образом показывается, что, если $\bar{v}(\omega_0, u) > v_-(u)$, нижняя оценка ω_{02} для собственного значения задачи

$$dp_2/du = v_-^n(u)\,k(u)\,f(u)/p_2 - \omega, \quad p_2(0) = p_2(1) = 0$$

является нижней оценкой и для ω_0 (см. фигуру).

А. Случай $1 \leqslant \mathrm{Le} < \infty$. Для простоты положим $\mathrm{Le} = \mathrm{const}$. Покажем, что

$$v_-(u) = u < \bar{v}(\omega, u) < 1 - (1-u)^{\mathrm{Le}} = v_+(u). \tag{2.7}$$

Разложение решения системы (1.2), (1.3) в ряд по степеням u в окрестности $u = 0$ имеет вид

$$p = p_0' u + p_0'' u^2/2 + \ldots; \quad v = v_0' u + v_0'' u^2/2 + \ldots$$

Коэффициенты разложения равны (рассматриваются решения, положительные в окрестности $u = 0$)

$$p_0' = \frac{-\omega + \sqrt{\omega^2 + 4k_0\,\mathrm{Le}^{-1}}}{2\mathrm{Le}^{-1}}; \quad v_0' = \frac{\omega + p_0'}{\omega + \mathrm{Le}^{-1} p_0'}, \quad k_0 = k(0), \ n = 1;$$

$$p_0' = 0, \quad p_0'' = 2k_0/\omega; \quad v_0' = 1, \quad v_0'' = (2k_0/\omega^2)(1 - \mathrm{Le}^{-1}), \ n = 2.$$

Видно, что $v > u$ в окрестности $u = 0$ при любых ω. Если предположить, что $v > u$ при $0 < u < u_0$, $v(u_0) = u_0$, то в этой точке должно быть $dv(u_0)/du \leqslant 1$; в действительности (как это следует из второго уравнения (1.2)) $dv(u_0)/du = \mathrm{Le} > 1$. Полученное противоречие доказывает левую часть неравенства (2.7).

Из первого уравнения (1.2) следует

$$(d/du)(p + \omega u) = k(u) v^n f(u)/p - \omega,$$

отсюда вытекает неравенство $\bar{p}(\omega_0, u) + \omega_0 u < \bar{p}(\omega_0, \varepsilon) + \omega_0 \varepsilon$. Учитывая (1.7), получаем $\bar{p}(\omega_0, u) < \omega_0(1 - u)$. Подставляя вместо p величину $\omega_0(1 - u)$ во второе уравнение (1.2) и решая его, приходим к верхней оценке v_+; неравенство (2.7) доказано.

В соответствии с изложенным оценки принимают вид

$$\omega_+^2 = 2\int_0^{\varepsilon} \frac{[1 - (1-u)^{\mathrm{Le}}]^n k(u)\, f(u)}{(1-u)^2}\, du; \tag{2.8}$$

$$\omega_-^2 = 2\int_0^{\varepsilon} \frac{u^n k(u)\, f(u)}{1-u}\, du. \tag{2.9}$$

Если $\mathrm{Le} \neq \mathrm{const}$, то

$$v_+(u) = 1 - \exp\left(\int_0^u \frac{\mathrm{Le}(u)\, du}{1-u}\right)$$

и оценка (2.8) соответствующим образом изменится.

B. Случай $0 < \mathrm{Le} < 1$. Аналогичными рассуждениями для $\mathrm{Le} = \mathrm{const}$ доказывается неравенство $v_- = 1 - (1-u)^{\mathrm{Le}} < v < u = v_+$. В итоге имеем

$$\omega_+^2 = 2\int_0^\varepsilon \frac{u^n k(u) f(u)}{(1-u)^2}\, du; \tag{2.10}$$

$$\omega_-^2 = 2\int_0^\varepsilon \frac{[1-(1-u)^{\mathrm{Le}}]^n k(u) f(u)}{1-u}\, du. \tag{2.11}$$

При $\mathrm{Le} \neq \mathrm{const}$ изменится v_- и нижняя оценка (2.11).

Если существует несколько собственных значений, то все они заключены между ω_+ и ω_-, определенными формулами (2.10), (2.11). Единственность ω_0 в случае $\mathrm{Le} \geqslant 1$ следует из монотонности функции $\bar{p}(\omega, 1) = \bar{p}(\omega, \varepsilon) - \omega(1-\varepsilon)$ (в работе [1] показано, что с ростом ω функция $\bar{p}(\omega, 1)$ убывает $(\bar{q}(\omega, 1) < 0)$). В случае $\mathrm{Le} < 1$ показать аналитически отрицательность $\bar{q}(\omega, 1)$ не удается. С помощью численного эксперимента для параметров $\sigma \leqslant \theta_0 \leqslant 14$, $0{,}1 \leqslant \mathrm{Le} < 1$ и различных σ нами показано, что $\bar{q}(\omega, 1) < 0$ и, следовательно, ω_0 единственно.

C. Случай $\mathrm{Le} = \infty$. Верхняя оценка получается из (2.8) предельным переходом $(\mathrm{Le} \to \infty)$

$$\omega_+^2 = 2\int_0^\varepsilon \frac{k(u) f(u)}{(1-u)^2}\, du. \tag{2.12}$$

Нижняя оценка (2.9) не изменяется. Можно получить лучшую нижнюю оценку, чем (2.9), если исходить не из системы (1.2), а из одного уравнения, к которому эта система сводится для $\mathrm{Le} = \infty$,

$$dp/du = (u + p/\omega)^n k(u) f(u)/p - \omega.$$

Уравнение для ω_0 принимает вид

$$d\omega_0^2/dt = [2k(t) f(t)] / \{(1-t)[1 - t - \bar{q}(\omega_0, t)]\}. \tag{2.13}$$

При $n = 1$ имеем

$$dq/du = -(uk(u)f(u)/p^2)q - (k(u)f(u)/\omega^2) - 1.$$

Учитывая, что $q < 0$, получаем

$$q > -t - \frac{1}{\omega^2}\int_0^t k(u) f(u)\, du > -t - \frac{1}{\omega^2}\int_0^t \frac{k(u) f(u)}{1-u}\, du = q_-.$$

Подставляя в (2.13) q_- вместо q, найдем

$$\omega_-^2 = \int_0^\varepsilon k(u) f(u) (1-u)^{-1} du. \tag{2.14}$$

В случае $n = 2$, поскольку $(u + p/\omega)^2 > u^2 + (2u/\omega)p$, нижняя оценка для собственного значения задачи

$$dp/du = [(u^2 + 2up/\omega)k(u)f(u)/p] - \omega, \quad p(0) = p(1) = 0 \tag{2.15}$$

будет нижней оценкой и для ω_0.
Уравнение для ω_0 задачи (2.15) имеет вид

$$\frac{d\omega_0^2}{dt} = \frac{2t(2-t)\,k(t)\,f(t)}{(1-t)\,[1-t-\bar{q}(\omega_0, t)]}. \tag{2.16}$$

Дифференцируя (2.15) по ω

$$dq/du = -(u^2 f(u) k(u)/p^2)q - (2uf(u)k(u)/\omega^2) - 1$$

и учитывая, что $q < 0$, $2 < (2-t)/(1-t)$, будем иметь

$$q_- = -t - \frac{1}{\omega^2}\int_0^t t\,\frac{2-t}{1-t}\,f(t)\,k(t)\,dt. \tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) вместо q в (2.16), получим

$$\omega_-^2 = \int_0^\varepsilon \frac{2-t}{1-t}\,tk(t)\,f(t)\,dt. \tag{2.18}$$

Для $n=1$ в [5] найдено $\omega_-^2 = \int_0^\varepsilon f(u)\,k(u)du$ и для $n=2$

$$\omega_-^2 = 4\int_0^\varepsilon uf(u)k(u)\,du.$$

Оценка (2.14) точнее, чем в [5].

3. **Приближенные зависимости. Ламинарное пламя.** Входящие в оценки интегралы для случая сильной зависимости $f(u)$ от температуры ($|d\ln f(u)/du| \gg 1$) берутся приближенно. Приближение заключается в следующем: все функции, не слишком сильно зависящие от температуры $(1-u)^{-1}$, $(1-u)^{-2}$, $k(u) = (1-\sigma u)^m$, $[1-(1-u)^{Le}]^n$, разлагаются в степенные ряды в окрестности максимальной температуры горения ($u = 0$). Функция $f(u) = \exp(-\theta_0 u/(1-\sigma u))$ также представляется рядом $f(u) = (1 - \theta_0\sigma u^2 + \ldots)e^{-\theta_0 u}$.

В результате почленного перемножения рядов получается ряд, коэффициенты которого пропорциональны интегралам вида

$$\int_0^\varepsilon u^{n+s}e^{-\theta_0 u}du, \tag{3.1}$$

выражающимся через неполную Г-функцию.

Окончательный результат для скорости ω не должен зависеть от «отрезного» параметра ε, в противном случае исходная постановка задачи (1.2)—(1.4) становится физически некорректной. Независимость ω от ε равносильна замене верхнего предела интегрирования ε в (3.1) бесконечностью, или, что то же самое, пренебрежению слагаемыми порядка $0\left(\theta_0^n e^{-\theta_0\varepsilon}\right)$ в сравнении с единицей. Поэтому вместо (3.1) имеем

$$\int_0^\infty u^{n+s}e^{-\theta_0 u}du = \frac{\Gamma(n+s+1)}{\theta_0^{n+s+1}}.$$

Ограничимся случаем $k(u) = 1$.

Выпишем получающиеся таким образом некоторые асимптотические разложения с точностью $0(1/\theta_0)$

(3.2) $\omega_- = \omega_\infty[1 + (n+1)/2\theta_0(1 - (n+2)\sigma - n(\mathrm{Le} - 1)/2)],$

где

(3.3) $$\omega_\infty = \sqrt{\frac{2\Gamma(n+1)\,\mathrm{Le}^n}{\theta_0^{n+1}}}$$

— асимптотическая формула Я. Б. Зельдовича — Л. Д. Ландау. Формула (3.2) справедлива для $0 < \mathrm{Le} < 1$.

В интервале изменения $1 \leqslant \mathrm{Le} < \infty$ оценка сверху (2.8) имеет вид

(3.4) $\omega_+ = \omega_\infty[1 + (n+1)/2\,\theta_0\cdot(2 - (n+2)\sigma - (n/2)(\mathrm{Le}-1))].$

Видно, что отличие между (3.2), (3.4) не очень существенное. Поэтому в качестве интерполяционной формулы используется среднее арифметическое, составленное из ω_- и ω_+. Получающийся таким образом результат с некоторым приближением можно распространить на весь интервал изменения $0 < \mathrm{Le} < \infty$. Основанием для такого распространения служит и то, что оценка (2.8) является верхней для $\omega_{02} < \omega_0$ (см. фигуру), в случае $\mathrm{Le} > 1$ оценка (2.11) является нижней для $\omega_{01} > \omega_0$

(3.5) $$\langle\omega\rangle = (\omega_+ + \omega_-)/2 = \omega_\infty\{1 + [(n+1)/2\theta_0](3/2 - (n+2)\sigma - (n/2)(\mathrm{Le} - 1))\}.$$

При Le конечном и $\theta_0 \gg 1$ верхняя (3.4) и нижняя (3.2) оценки совпадают, так что формула (3.3) и при $\mathrm{Le} \neq 1$ имеет асимптотический смысл. В ряде случаев она будет давать хороший результат и для не слишком больших θ_0 (табл. 1) за счет компенсации в знаках коэффициентов разложения порядка $0(\theta_0^{-1})$. В случае $\mathrm{Le} \to \infty$ из (2.14), (2.18) находим

(3.6) $\omega_- = (1/\sqrt{\theta_0})[1 + (0{,}5 - \sigma)/\theta_0],\ n = 1;$

(3.7) $\omega_- = (\sqrt{2}/\theta_0)[1 + (0{,}5 - 3\sigma)/\theta_0],\ n = 2.$

Сравнение формул (3.2), (3.4)—(3.7) с результатами, полученными методом сращиваемых асимптотических разложений (САР) [6, 7], приведено в табл. 2, где a, b, c — коэффициенты разложения порядка 0(1/0), представленного в виде $\theta_0^{-1}[a - b\sigma - c(\mathrm{Le} - 1)]$. Для $\mathrm{Le} = \infty$ $\omega_\infty(n = 1) = 1/\sqrt{\theta_0}$ и ω_∞ $(n = 2) = \sqrt{2}/\theta_0$. Сравнение с численным счетом краевой задачи на ЭВМ дано в табл. 1 и 3. Здесь ω_0 (ЭВМ) — численный счет; $\Delta_\infty = \omega_\infty/\omega_0$, $\Delta(\text{САР}) = \omega[6,\ 7]/\omega_0$, $\Delta_- = \omega_-/\omega_0$, $\langle\Delta\rangle =$

Таблица 1

Le^{-1}	$n=1$, $\sigma=0{,}6$, $\theta_0=10$					$n=1$, $\sigma=0{,}9$, $\theta_0=10$				
	ω_0 ЭВМ	Δ_∞	Δ САР	Δ_-	$\langle\Delta\rangle$	ω_0 ЭВМ	Δ_∞	Δ САР	Δ_-	$\langle\Delta\rangle$
0,2	0,234	1,35	0,75	0,97	1,04	0,221	1,43	0,67	0,90	0,97
0,6	0,167	1,08	0,96	0,96	1,02	0,155	1,17	0,94	0,94	0,99
1,0	0,136	1,04	0,99	0,96	1,01	0,127	1,11	0,97	0,92	0,98
6	0,061	0,95	0,98	0,92	0,97	0,055	1,05	1	0,93	0,96
10	0,047	0,96	1,00	0,94	0,98	0,043	1,05	1	0,91	0,98

Таблица 2

n		ω_- (3.2) $0<\mathrm{Le}\leqslant 1$	ω_+ (3.4) $1\leqslant\mathrm{Le}<\infty$	ω [6] $\mathrm{Le}\sim 0(1)$	ω_- (3.6) (3.7) $\mathrm{Le}=\infty$	ω [7] $\mathrm{Le}=\infty$
1	a	1	2	1,344	0,5	0,82
	b	3	3	3	1	1
	c	0,5	0,5	1	—	—
2	a	1,5	3	2,11	0,5	—
	b	6	6	6	3	—
	c	1,5	1,5	4,442	—	—

$= <\omega>/\omega_0$ — соответствующие отклонения от точного значения скорости.

4. Оценки скорости горения. Мелкомасштабное турбулентное пламя. Скорость горения ω_0 является собственным значением задачи [8, 9]

$$dp/du = \Phi(u,\ p)/p - \omega,\quad p(0) = p(1) = 0, \tag{4.1}$$

$$2\Phi(u,\ p) = \begin{cases}\varphi(u + Fp) + \varphi(u - Fp), & 0 \leqslant u \leqslant \varepsilon\\ 0, & \varepsilon < u \leqslant 1,\end{cases}$$

$$\varphi(u) = u^n f(u).$$

Вывод уравнения для ω_0 аналогичен выводу (2.3)

$$d\omega_0/dt = \Phi(t,\ \omega_0(1-t))/\omega_0(1-t)(1-t-q),\quad \omega_0(0) = 0. \tag{4.2}$$

Согласно теореме об оценках [2], $q = \partial\bar{p}(\omega,u)/\partial\omega < 0$. Из (4.2), полагая $q = 0$, находим уравнение для определения ω_+

$$d\omega_1/dt = \Phi(t,\ \omega_1(1-t))/\omega_1(1-t)^2,\quad \omega_1(0) = 0,\quad \omega_1(\varepsilon) = \omega_+. \tag{4.3}$$

С помощью (4.1) получим

$$q = -t + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\Phi}{p}\right) q\,du. \tag{4.4}$$

При малых Fp в разложении по степеням Fp

$$(\partial/\partial p)(\Phi/p) = (1/p^2)\{-\varphi(u) + \varphi''(u)(Fp^2)/2 + \ldots\}$$

основной вклад даст первое слагаемое в фигурных скобках, поэтому $\partial/\partial p\cdot(\Phi/p)\leqslant 0$. Используя это неравенство, из (4.4) находим $q > -t$.

Таблица 3

$\mathrm{Le}=\infty$				$\sigma=0{,}9$			
θ_0	ω_+ (2.12)	ω_0 ЭВМ	ω_- (2.14)	ω_- (3,6)	ω [7]	Δ_-	Δ САР
6	0,587	0,398	0,386	0,381	0,403	0,96	1,01
9	0,477	0,323	0,321	0,319	0,330	0,99	1,02
10	0,452	0,306	0,305	0,304	0,314	0,99	1,03
12	0,412	0,280	0,280	0,279	0,287	1	1,03

Таблица 4

		$\sigma=0,8$,	$n=1$		
θ^0	F	ω_+	ω_0	ω_-	Δ
6	1	0,2306	0,2109	0,1938	1,01
	4	0,3218	0,2511	0,1959	1,03
	7	0,4755	0,3352	0,2130	1,02
14	1	0,0995	0,0962	0,0918	0,99
	4	0,1238	0,1101	0,0967	1,00
	8	0,1904	0,1568	0,1135	0,97

Уравнение для определения ω_- получается из (4.2), если положить $q = -t$,

$$(4.5)\qquad d\omega_2/dt = \Phi(t, \omega_2 \times (1-t))/\omega_2(1-t), \omega_2(0) = 0,\ \omega_2(\varepsilon) = \omega_-.$$

В табл. 4 приведены результаты численного счета ω_0 (ЭВМ) ω_+, ω_-, $\Delta = \langle\omega\rangle/\omega_0$.

Для получения приближенных зависимостей в разложении Φ по степеням Fp (случай малых пульсаций температуры) ограничимся двумя членами

$$\Phi \approx \varphi(u) + \varphi''(u)F^2p^2/2.$$

Подставляя это приближенное значение Φ в (4.3), (4.5), найдем

$$(4.6)\qquad \omega_+^2 = \omega_1^2(\varepsilon) = 2\int_0^\varepsilon \frac{\varphi(u)}{(1-u)^2}\exp[-F^2\varphi'(u)]\,du;$$

$$\omega_-^2 = \omega_2^2(\varepsilon) = 2\int_0^\varepsilon \frac{\varphi(u)}{1-u}\exp[-F^2(\varphi(u)+\varphi'(u)(1-u))]\,du.$$

Если разложить в (4.6) экспоненциальные функции в ряд по показателю степени и ограничиться двумя членами разложения, то

$$(4.7)\qquad \omega_+^2 = 2\int_0^\varepsilon \frac{\varphi(u)}{(1-u)^2}\,du + 2F^2\int_0^\varepsilon \frac{\varphi^2(u)}{(1-u)^3}\,du;$$

$$\omega_-^2 = 2\int_0^\varepsilon \frac{\varphi(u)}{1-u}\,du - 2F^2\int_0^\varepsilon \frac{\varphi^2(u)}{1-u}\,du.$$

Окончательный результат получится, если при вычислении интегралов в (4.7) использовать тот же прием, что и в случае ламинарного пламени

$$(4.8)\qquad \langle\omega\rangle = \omega_\infty\{1 + [(n+1)/2\theta_0](3/2 - (n+2)\sigma)\} + [(3n+1)\Gamma(2n+1)/2\omega_\infty(2\theta_0)^{2n+1}]F^2.$$

Сравнение приближенных значений скоростей горения, вычисленных по формуле (4.8) при тех же параметрах, что и в табл. 4, с точными значениями ω_0 дано в табл. 5.

Таблица 5

θ_0	F	ω_0	$\langle\omega\rangle/\omega_0$
6	1	0,2109	1,00
	4	0,2511	1,42
14	1	0,0962	1,02
	4	0,1101	1,12

Метод оценок в отличие от метода сращиваемых асимптотических разложений обладает тем недостатком, что не содержит стандартной процедуры нахождения первоначальной «лучшей» оценки. Однако после того, как она найдена, последующие оценки могут быть уточнены стандартными приемами, например, по методу С. А. Чаплыгина [10]. Из преимуществ метода оценок следует отметить простоту нахождения последующих разложений по степеням $1/\theta_0$, знание интервала, в котором располагается точное решение, простоту обобщения на функции тепловыделения, отличающиеся от аррениусовской. Предварительные результаты данной работы применительно к ламинарным пламенам сообщены в [11].

Поступила 5 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новиков С. С., Рязанцев Ю. С.** О существовании и единственности решения системы уравнений тепловой теории горения.— ПМТФ, 1964, № 4.
2. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961.
3. **Johnson W. E., Nachbar W.**— In: 8 th Sympos. (Internat.) on Combust. Baltimore, 1962.
4. **Зельдович Я. Б.** К теории распространения пламени.—«Журн. физ. химии», 1948, т. 22, № 1.
5. **Ваганов Д. А., Худяев С. И.** Об одной стационарной задаче теории горения.— ФГВ, 1969, т. 5, № 2.
6. **Берман В. С., Рязанцев Ю. С.** К анализу задачи о тепловом распространении пламени методом сращиваемых асимптотических разложений.— ПММ, 1972, т. 36, № 4.
7. **Берман В. С., Рязанцев Ю. С.** Применение метода сращиваемых асимптотических разложений к расчету стационарного теплового распространения фронта экзотермической реакции в конденсированной среде.— ПМТФ, 1972, № 5.
8. **Баушев В. С., Вилюнов В. Н.** Скорость распространений и пределы существования турбулентного пламени.— ПМТФ, 1972, № 3.
9. **Баушев В. С., Вилюнов В. Н.** К математической теории стационарной скорости распространения мелкомасштабного турбулентного пламени.— ПМТФ, № 4, 1973.
10. **Чаплыгин С. А.** Избранные труды по механике и математике. М., 1954, с. 490.
11. **Баушев В. С., Вилюнов В. Н.** О методе оценок нормальной скорости распространения пламени.— В кн.: Аннотации третьей научной конференции по математике и механике. Томск, изд. Томск. ун-та, 1973.

УДК 533.6.011

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ, ИНИЦИИРУЕМОГО ВНЕЗАПНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КЛИНА

В. В. Титаренко

(*Саратов*)

Методом сращиваемых асимптотических разложений изучаются некоторые автомодельные задачи о внезапном движении клина, рассмотренные в линейном приближении в работах [1—3]. Определен характер волновой границы области возмущений. Построены решения, описывающие во втором приближении течения за фронтами слабых ударных волн, распространяющимися по покоящемуся газу, и за фронтами линий слабого разрыва, распространяющимися по известным однородным потокам. Сформулирована краевая задача, решение которой описывает в первом приближении течения в окрестностях точек взаимодействия фронтов. Установлено существование законов подобия течений в этих окрестностях. Дается приближенное решение задач.

1. Рассмотрим течение покоящегося идеального политропического газа, возникающее при внезапном движении в отрицательном направлении оси Ox бесконечного клина с постоянной скоростью W_0. Параметрами этой