УДК 534.211

АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЕ С РЕЛАКСАЦИЕЙ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

М. Б. Бабенков

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург
E-mail: babenkov.michail@gmail.com

Исследовано распространение плоских гармонических волн в термоупругой среде с релаксацией теплового потока, в частности в связанной постановке проведен анализ зависимостей температуры и перемещений от координаты. Исследованы зависимости групповой и фазовой скоростей от частоты. Изучено влияние частоты и параметров материала на амплитуды термоупругих волн. Результаты сопоставлены с известными результатами, полученными с использованием классической теории термоупругости.

Ключевые слова: гиперболическая теория термоупругости, закон Максвелла — Каттанео, релаксация теплового потока, волновой перенос тепла, второй звук.

Введение. При исследовании большого количества задач о переносе тепла используется классический закон Фурье (при условии отсутствия источников тепла)

$$\boldsymbol{h} = -\lambda\nabla T, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{h}$ — вектор теплового потока; λ — теплопроводность; ∇ — оператор Гамильтона; T — отклонение от температуры, при которой проводилось измерение констант. С помощью уравнения (1) можно получить уравнение теплопроводности параболического типа

$$\rho c_v \dot{T} = \lambda\,\Delta T,$$

где ρ — плотность материала; c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме; точка обозначает производную по времени; Δ — оператор Лапласа.

Область применимости данного уравнения ограничена тем, что оно не позволяет учесть конечную скорость распространения температурных возмущений [1]. При решении задач, в которых необходимо учитывать скорость распространения тепла, например если размеры рассматриваемых систем сопоставимы с длиной свободного пробега, или если характерные времена процессов имеют порядок величины релаксации теплового потока в среде, для получения более точных результатов используется гиперболическое уравнение теплопроводности

$$\rho c_v(\tau\ddot{T} + \dot{T}) = \lambda\,\Delta T, \tag{2}$$

где τ — постоянная релаксации теплового потока. Уравнение (2) применяется при исследовании ряда задач (см., например, [2–4]). Обзор других работ по данной теме приводится в [5]. Вывод уравнения (2) основан на законе Максвелла — Каттанео

$$\tau\dot{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{h} = -\lambda\,\nabla T.$$

Наличие в этом законе времени релаксации τ означает, что при появлении или исчезновении градиента температуры поток тепла не возникает и не исчезает мгновенно. Согласно молекулярно-кинетической теории величина постоянной релаксации теплового потока τ пропорциональна времени свободного пробега частиц вещества между двумя их последовательными столкновениями и изменяется в интервале от 10^{-14} до 10^{-9} с для различных материалов. Существуют также другие модели теплопроводности, в которых в линейном приближении скорость распространения тепловых возмущений конечна (см., например, [5–7]). При выводе уравнений связанной задачи термоупругости с использованием закона Максвелла — Каттанео получается модель Лорда — Шульмана термоупругой среды с релаксацией теплового потока [8].

1. Основные уравнения связанной задачи термоупругости. Запишем уравнение движения в локальной форме

$$\nabla \cdot \tilde{\tau} + \rho \boldsymbol{f} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}, \tag{3}$$

где $\tilde{\tau}$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{f}$ — вектор массовой плотности внешних сил; $\boldsymbol{u}$ — вектор перемещений. С использованием закона Дюамеля — Неймана уравнение для напряжений можно записать следующим образом:

$$\tilde{\tau} = (K - 2G/3)\varepsilon \tilde{E} + 2G\tilde{\varepsilon} - \alpha K T \tilde{E}. \tag{4}$$

Здесь K — изотермический модуль объемного сжатия; G — модуль сдвига; ε — след тензора деформаций; $\tilde{E}$ — единичный тензор; α — температурный коэффициент объемного расширения; $\tilde{\varepsilon}$ — тензор деформаций. Геометрические соотношения имеют вид

$$\varepsilon = \operatorname{tr}\tilde{\varepsilon} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}, \qquad \tilde{\varepsilon} = (\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})/2. \tag{5}$$

Подставляя (4) в (3), получаем уравнение движения

$$G\,\Delta \boldsymbol{u} + (K + G/3)\nabla\varepsilon - \alpha K\,\nabla T = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}. \tag{6}$$

С учетом релаксации теплового потока уравнение теплопроводности в связанной задаче термоупругости принимает вид

$$\lambda\,\Delta T - \rho c_v(\dot{T} + \tau \ddot{T}) = \alpha K T_*(\dot{\varepsilon} + \tau\ddot{\varepsilon}), \tag{7}$$

где T_* — температура, при которой проводилось измерение констант. Поскольку сдвиговые волны не зависят от температуры [9], далее исследуются только объемные колебания термоупругой среды. Вычислив дивергенцию (6), получаем уравнение динамики для объемных деформаций

$$(K + 4G/3)\,\Delta\varepsilon - \alpha K\,\Delta T = \rho\ddot{\varepsilon}. \tag{8}$$

Таким образом, система уравнений связанной задачи термоупругости с учетом релаксации теплового потока состоит из уравнений движения (8) и уравнения теплопроводности (7). В случае если параметр τ равен нулю, система (7), (8) принимает вид, известный в классической теории термоупругости.

2. Фазовая и групповая скорости в термоупругой среде. Рассмотрим одномерную задачу о распространении термоупругих волн в направлении координаты s:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} - \frac{\rho c_v}{\lambda}\Big(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau\,\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\Big) = \frac{\alpha K T_0}{\lambda}\Big(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tau\,\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}\Big); \tag{9}$$

$$\Big(K + \frac{4}{3}\,G\Big)\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial s^2} - \alpha K\,\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} = \rho\,\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}. \tag{10}$$

Для построения дисперсионных соотношений будем искать решение системы уравнений (9), (10) в виде экспонент, затухающих по координате:

$$\varepsilon(s,t) = B\,\mathrm{e}^{ks}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad T(s,t) = D\,\mathrm{e}^{ks}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad k = -\gamma + i\delta \tag{11}$$

(γ — характеристика скорости затухания колебаний; δ — волновое число; ω — частота). Подставляя выражения (11) в (9), (10), получаем систему дисперсионных соотношений с вещественными переменными

$$\begin{gathered} \gamma^4 - 6\gamma^2\delta^2 + \delta^4 + 2A_3\gamma\delta\omega + (A_1 + A_2)(\gamma^2 - \delta^2)\omega^2 - A_1A_2(-1 + A_4)\omega^4 = 0, \\ -4\gamma^3\delta + 4\gamma\delta^3 + A_3\gamma^2\omega - 2(A_1 + A_2)\gamma\delta\omega^2 - A_3\omega(\delta^2 + A_1(-1 + A_4)\omega^2) = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered} A_1 = \frac{\rho}{K + 4G/3}, \qquad A_3 = \frac{1}{\lambda}\Big(\rho c_v + \frac{\alpha^2 K T_*}{1 + (4/3)GK^{-1}}\Big), \\ A_2 = \tau A_3, \qquad A_4 = \frac{1}{1 + \rho c_v(1 + (4/3)GK^{-1})/(\alpha^2 K T_*)}. \end{gathered} \tag{13}$$

Все величины в (13) строго положительны. Параметр A_4 изменяется в интервале от 0 до 1. Выполнив замену переменных

$$x = \frac{\gamma^2 - \delta^2}{A_1\omega^2}, \qquad y = \frac{\delta\gamma}{A_1\omega^2},$$

выражения для фазовой и групповой скоростей можно представить в параметрической форме, удобной для аналитического исследования. С использованием предложенных обозначений параметр y, волновое число δ, характеристика скорости затухания колебаний γ и частота колебаний ω выражаются через x по формулам

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1 - A_4 + x)(AA_4 - (x+1)(x+A))}{A + A_4 + x}} \qquad \Big(A = \frac{A_2}{A_1}\Big); \tag{14}$$

$$\delta(x) = \frac{\omega(x)}{\sqrt{2}}\sqrt{A_1\big(-x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\,\big)}\,; \tag{15}$$

$$\gamma(x) = \frac{y\omega\sqrt{2A_1}}{\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + 4y^2}}}\,; \tag{16}$$

$$\omega(x) = \frac{A_3}{A_1}\,\frac{1 - A_4 + x}{(1 + A + 2x)2y}. \tag{17}$$

С помощью (15), (17) можно получить зависимость фазовой скорости C_f от параметра x в виде

$$C_f(x) = \frac{\omega(x)}{\delta(x)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_1\big(-x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\,\big)}}. \tag{18}$$

Зависимость групповой скорости C_g от параметра x определяется следующим образом:

$$C_g(x) = \frac{d\omega}{d\delta} = \frac{d\omega}{dx}\Big(\frac{d\delta}{dx}\Big)^{-1}. \tag{19}$$

Групповая скорость C_g имеет смысл скорости переноса энергии только в случае достаточно небольшой дисперсии и затухания колебаний, при которых форма огибающей волнового пакета меняется медленно. Чтобы получить соответствующие зависимости фазовой и групповой скоростей для классической системы уравнений термоупругости без учета релаксации теплового потока, в каждом из выражений (14)–(19) нужно положить $A_2 = 0$.

Функции (14)–(19) определены в двух диапазонах значений параметра x, которые соответствуют акустическим и тепловым ветвям дисперсионных зависимостей. В зависимости от знака неравенства $A < 1-2A_4$ (вариант 1) или $A > 1-2A_4$ (вариант 2) тепловые и акустические составляющие (15), (16) существенно различаются (подробнее об этом см. [10]). Эти условия можно выразить через время релаксации τ. В варианте 1 $\tau < \tau_0$, в варианте 2 $\tau > \tau_0$. Здесь τ_0 — критическое значение постоянной релаксации теплового потока:

$$\tau_0 = \frac{\lambda\rho(\rho c_v(K + 4G/3) - \alpha^2 K^2 T_*)}{(\rho c_v(K + 4G/3) + \alpha^2 K^2 T_*)^2}. \tag{20}$$

Из (20) следует, что критическое значение времени релаксации теплового потока τ_0 прямо пропорционально теплопроводности вещества λ. Критические значения времени релаксации для реальных материалов соответствуют оценке τ_0. Например, для меди $\tau_0 \approx 5{,}32 \cdot 10^{-12}$ с. В классической теории термоупругости существуют аналогичные соотношения $A_4 < 1/2$ и $A_4 > 1/2$, которые можно записать с использованием коэффициента теплового расширения α. В варианте 1 $\alpha < \alpha_0$, в варианте 2 $\alpha > \alpha_0$. Здесь α_0 — критическое значение температурного коэффициента объемного расширения:

$$\alpha_0 = \sqrt{\rho c_v(K + 4G/3)/T_*}\ /K.$$

Для ряда материалов (преимущественно жидкостей и газов) значение температурного коэффициента объемного расширения близко к α_0. Коэффициент α меди больше критического значения приблизительно на порядок, следовательно, в классической теории термоупругости поведение дисперсионных кривых соответствует варианту 2.

В принятых обозначениях выражение для скорости распространения акустических возмущений (скорости звука в среде) имеет вид $c_a = 1/\sqrt{A_1(1 - A_4)}$, для скорости температурных возмущений — $c_h = 1/\sqrt{A_2}$. Скорость распространения акустических возмущений может превышать скорость температурных возмущений ($c_a \geqslant c_h$) только в варианте 2. Соотношение $c_a < c_h$ может выполняться в обоих вариантах.

Согласно [11] в плотных одноатомных газах и жидкостях скорость передачи тепловой энергии близка к скорости звука; в твердых диэлектриках, не имеющих свободных электронов, перенос энергии теплового движения осуществляется фононами, средняя скорость которых приблизительно равна скорости звука.

При времени релаксации, равном

$$\tau_1 = \frac{\lambda\rho^2 c_v(K + 4G/3)}{(\rho c_v(K + 4G/3) + \alpha^2 K^2 T_*)^2}, \tag{21}$$

выполняется равенство скоростей $c_a = c_h$. Для меди значение времени релаксации, вычисленное по формуле (21), равно $\tau_1 \approx 5{,}42 \cdot 10^{-12}$ с, что несколько больше значения τ_0 для того же материала. Здесь и далее численные расчеты выполнены для типичного металла — меди.

На рис. 1 представлены зависимости групповой и фазовой скоростей от частоты, полученные с использованием классической и гиперболической теорий термоупругости. Кривые *1, 2*, выходящие из начала координат, соответствуют скоростям тепловых волн, кривые *3, 4*, выходящие из некоторой точки на оси ординат, — скоростям акустических волн.

Частоты ω_* (в классической теории термоупругости) и Ω_* (в гиперболической теории термоупругости) являются критическими частотами, которым соответствуют два экстремума групповых скоростей, а кривые зависимости фазовой скорости от частоты и дисперсионные кривые проходят через точки перегиба. В варианте 1 экстремумами групповой скорости являются минимум скорости акустической волны и максимум скорости

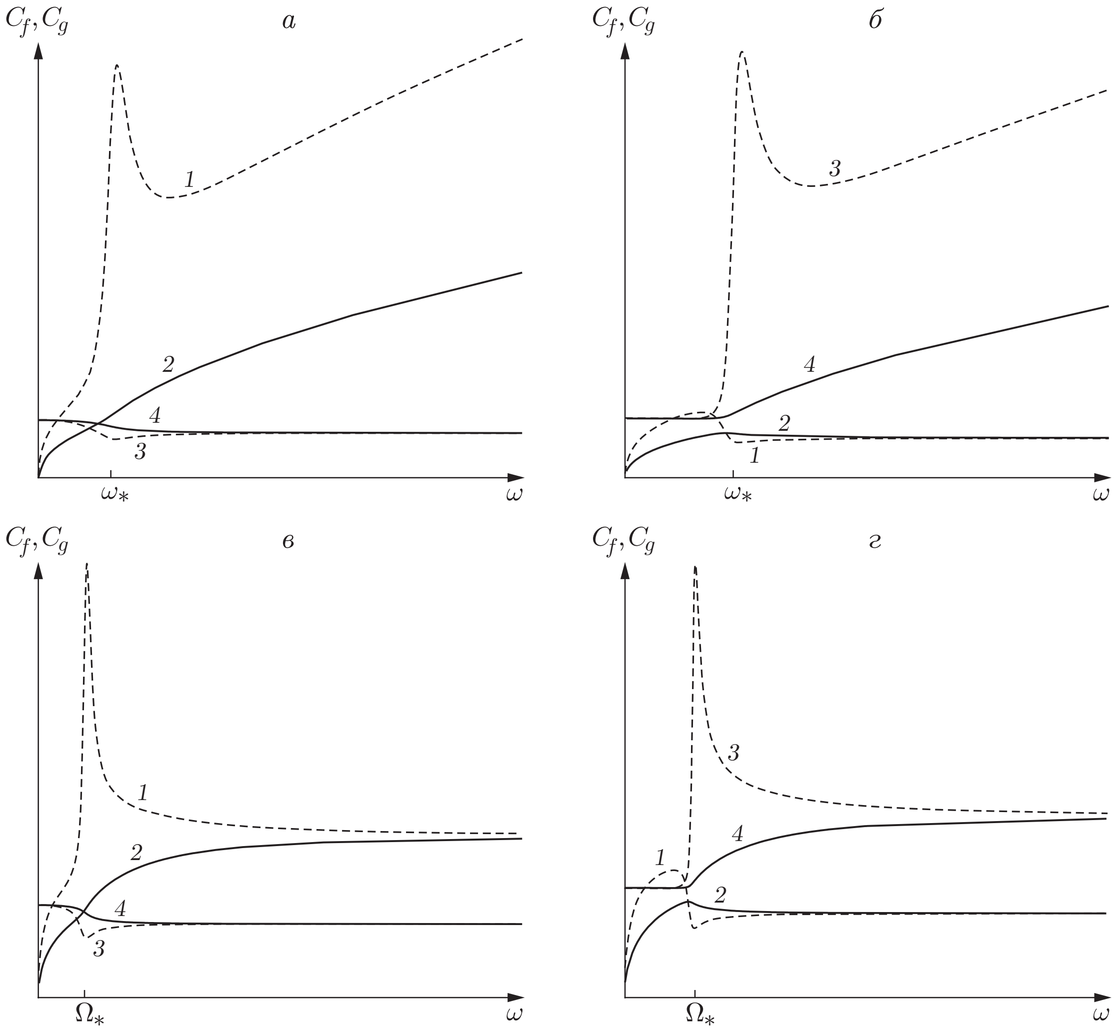

Рис. 1. Зависимости групповой (*1*, *3*) и фазовой (*2*, *4*) скоростей от частоты:
а, *б* — расчет с помощью классической теории термоупругости (*а* — вариант 1 ($\alpha < \alpha_0$), *б* — вариант 2 ($\alpha > \alpha_0$)); *в*, *г* — расчет с помощью гиперболической теории термоупругости (*в* — вариант 1 ($\tau < \tau_0$), *г* — вариант 2 ($\tau > \tau_0$)); *1*, *2* — тепловые ветви, *3*, *4* — акустические ветви

тепловой волны, в варианте 2 — минимум скорости тепловой волны и максимум скорости акустической волны. В классической теории термоупругости экстремумы локальные, в гиперболической — абсолютные. Результаты численного анализа показывают, что при некотором соотношении констант материала экстремумы могут отсутствовать; с увеличением τ значение Ω_* уменьшается. С использованием классической и гиперболической теорий теплопроводности критические частоты можно вычислить из условия равенства нулю производной групповой скорости по частоте:

$$\frac{dC_g}{d\omega} = \frac{dC_g}{dx}\Big(\frac{d\omega}{dx}\Big)^{-1} = 0$$

(C_g определяется формулой (19)). Данное уравнение позволяет найти значение x_*, которому соответствует искомое значение ω_* или Ω_*, определяемое по формуле (17).

Согласно классической и гиперболической теориям термоупругости в варианте 1 вследствие аномальной дисперсии тепловых волн ($C_g > C_f$) происходит поглощение этих волн материалом. Поглощение акустических волн происходит только в варианте 2, при этом материал поглощает тепловые волны (становится непрозрачным для них) только при частотах, меньших определенного значения.

Согласно гиперболической и классической теориям термоупругости кривые зависимостей групповой и фазовой скоростей акустических волн от частоты выходят из точки, имеющей ординату

$$C_1 = 1/\sqrt{A_1(1 - A_4)}.$$

Из результатов численного исследования следует, что по мере приближения времени релаксации τ к значению τ_0 скачки групповых скоростей становятся более четко выраженными.

Асимптоты фазовой и групповой скоростей, вычисленные по формуле (18), равны

$$C_2 = \sqrt{2}/\sqrt{A_1 + A_2 \pm a}\,, \qquad a = \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4}\,.$$

Здесь знак “+” соответствует асимптотам акустических ветвей зависимостей $C_f(\omega)$, $C_g(\omega)$ в варианте 1 и асимптотам тепловых ветвей этих зависимостей в варианте 2; знак “−” соответствует асимптотам тепловых ветвей зависимостей $C_f(\omega)$, $C_g(\omega)$ в варианте 1 и асимптотам акустических ветвей этих зависимостей в варианте 2. Так как в варианте 1 асимптота акустических ветвей всегда расположена ниже асимптоты тепловых ветвей, графики зависимостей фазовой и групповой скоростей от частоты обязательно пересекутся. Значение скорости C_1 всегда находится между асимптотами тепловых и акустических ветвей.

Согласно результатам численного анализа на кривых зависимости фазовой скорости от частоты могут наблюдаться два локальных экстремума, на кривых зависимости групповой скорости от частоты — три локальных экстремума.

На рис. 2 представлены зависимости фазовой и групповой скоростей от частоты при значении постоянной релаксации, равном τ_1.

При выбранном значении времени релаксации τ_1, которому соответствует критическая частота $\Omega_* = 728$ ГГц, на рис. 2 видно, что тепловые ветви, полученные с использованием классической (кривые *1*) и гиперболической (кривые *4*) теорий термоупругости,

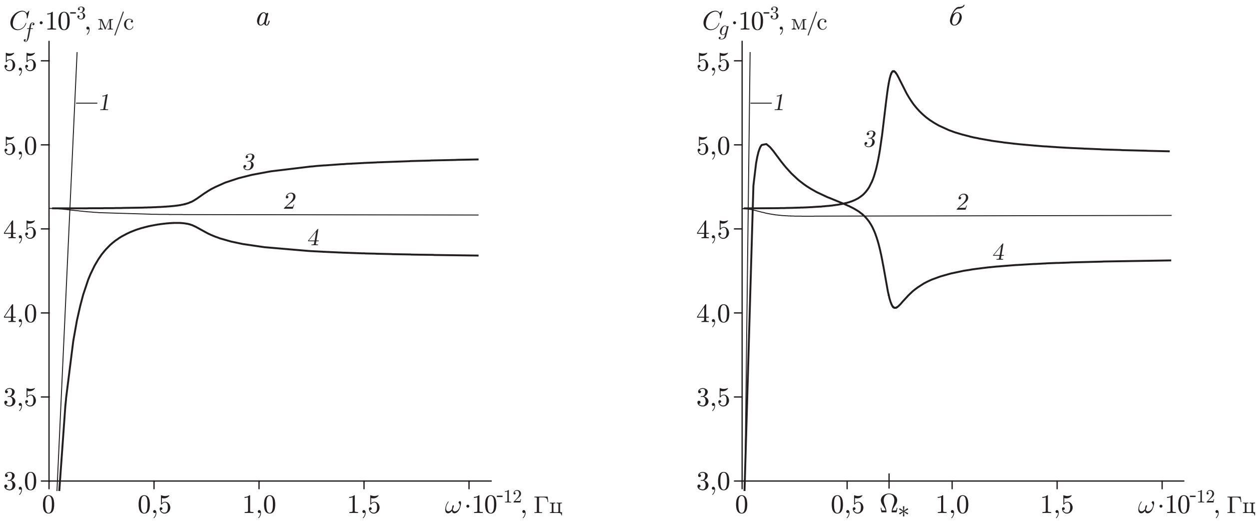

Рис. 2. Зависимости фазовой (*а*) и групповой (*б*) скоростей от частоты при $\tau = \tau_1$: *1, 2* — расчет с помощью классической теории термоупругости, *3, 4* — расчет с помощью гиперболической теории термоупругости; *1, 4* — тепловые ветви, *2, 3* — акустические ветви

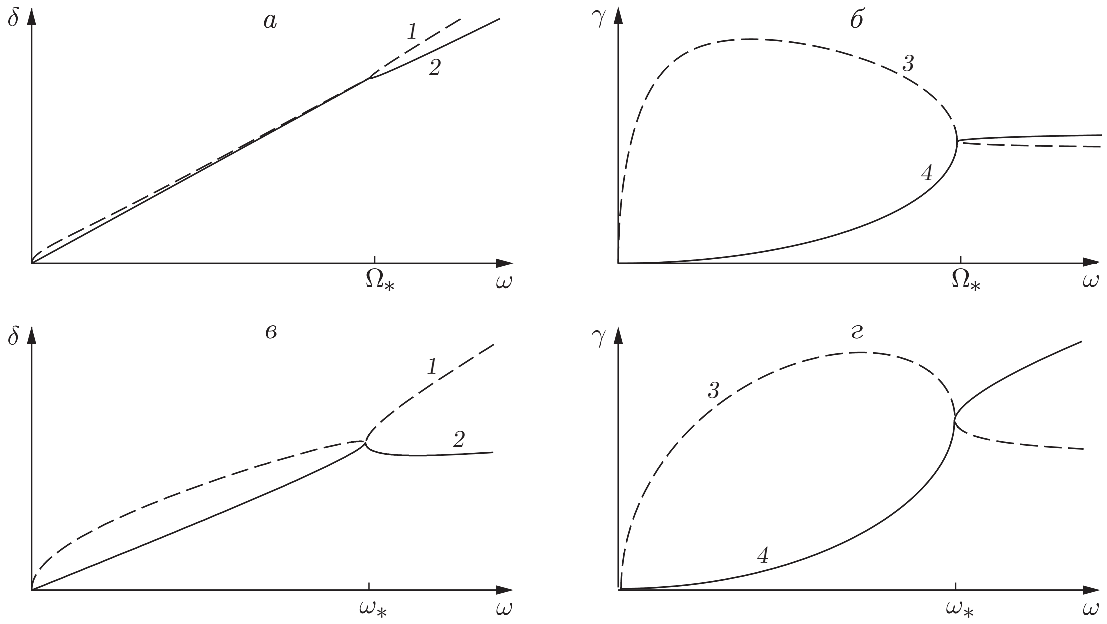

Рис. 3. Зависимости волнового числа δ (*а, в*) и характеристики затухания γ (*б, г*) от частоты в области взаимодействия тепловых и акустических волн:
а, б — расчет с помощью гиперболической теории термоупругости ($\tau = \tau_0$), *в, г* — расчет с помощью классической теории термоупругости ($\alpha = \alpha_0$); *1, 3* — тепловые ветви, *2, 4* — акустические ветви

расходятся. Максимальное значение групповой скорости акустических волн, вычисленное с использованием гиперболической теории термоупругости (кривая *3* на рис. 2,*б*), превышает начальное значение приблизительно на 15 %. Согласно параболической теории термоупругости, наоборот, групповые и фазовые скорости акустических волн (кривые *2*) с ростом частоты незначительно уменьшаются. Аномальная дисперсия тепловых волн наблюдается при частотах, меньших 610 ГГц.

Границы области применимости рассматриваемой континуальной модели можно определить, вычислив длину волны $2\pi/\delta$ при заданном значении ω и сравнив ее с межмолекулярным расстоянием в материале. Для термомеханических характеристик меди при частоте $\omega = 80$ ГГц длина акустической волны, равная $3{,}63 \cdot 10^{-7}$ м, на три порядка превышает постоянную решетки, равную $3{,}61 \cdot 10^{-10}$ м; при частоте $\omega = 800$ ГГц длина акустической волны, равная $3{,}73 \cdot 10^{-8}$ м, на два порядка превышает постоянную решетки, что свидетельствует о возможности применения рассматриваемой модели в диапазоне исследуемых частот. Частота вынужденных колебаний среды ограничена значением, принадлежащим дебаевскому спектру частот для продольных волн: $\omega_c = 2\pi C_1\sqrt{3\rho/(4\pi M)}$ [9]. Для выбранного материала $\omega_c = 7550$ ГГц, что на порядок больше исследуемых частот.

На рис. 3 приведены зависимости волнового числа δ и характеристики затухания γ от частоты ω.

При $\omega = \omega_*$ и $\Omega = \Omega_*$ кривые *3, 4* пересекаются, а кривые *1, 2*, не имеющие общих точек, сближаются. В точке максимального сближения происходит наиболее интенсивный обмен энергией между тепловыми и акустическими волнами. Значения критической частоты ω_* (классическая теория термоупругости) и Ω_* (гиперболическая теория термоупругости) не совпадают. Для меди при $\alpha = \alpha_0$ $\omega_* \approx 182$ ГГц, при $\tau = \tau_0$ $\Omega_* \approx 700$ ГГц.

3. Распространение плоских гармонических волн в термоупругом полупространстве. Рассмотрим задачу о распространении термоупругих волн в направлении координаты s (рис. 4). Будем искать установившееся решение системы дифференциальных

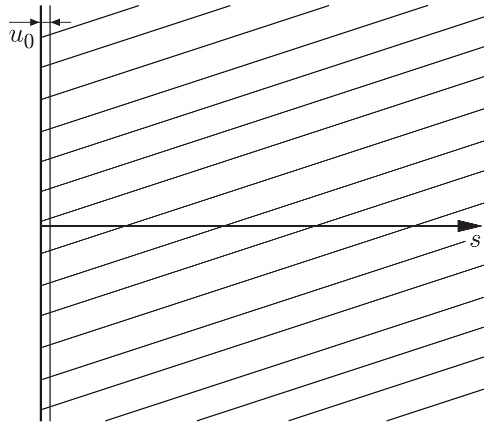

Рис. 4. Схема задачи о распространении плоских гармонических волн в термоупругом полупространстве

уравнений (9), (10) для полупространства в виде экспонент, затухающих по координате:

$$u(s,t) = C\,\mathrm{e}^{ks}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad T(s,t) = D\,\mathrm{e}^{ks}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad k = -\gamma + i\delta. \tag{22}$$

Волны распространяются в направлении, перпендикулярном границе полупространства, которая перемещается по закону

$$u\big|_{s=0} = u_0 \sin(\omega t). \tag{23}$$

Приращение температуры на границе равно нулю:

$$T\big|_{s=0} = 0. \tag{24}$$

Подставляя (22) в (9), (10), получаем линейную алгебраическую систему относительно C и D

$$D(k^2\lambda + c_v\rho\omega(i+\tau\omega)) + CKT_*\alpha k\omega(i+\tau\omega) = 0; \tag{25}$$

$$DK\alpha k^2 + Ck((4G/3+K)k^2 + \rho\omega^2) = 0. \tag{26}$$

Система (25), (26) имеет нетривиальные решения только в том случае, если ее определитель равен нулю:

$$k^4 + k^2\omega(iA_3 + \omega(A_1 + A_2)) - \omega^3 A_1(A_4 - 1)(iA_3 + A_2\omega) = 0. \tag{27}$$

Полученное уравнение является характеристическим для системы (9), (10) и представляет собой комплексную форму записи системы (12). Уравнение (27) является биквадратным и имеет четыре комплексных корня, которые можно представить в виде

$$k_1 = -\gamma_h + i\delta_h, \quad k_2 = -\gamma_a + i\delta_a, \quad k_3 = -k_1, \quad k_4 = -k_2,$$

где δ_h, δ_a — волновые числа для тепловых и акустических волн; γ_h, γ_a — коэффициенты затухания тепловых и акустических волн. Из уравнения (26) для каждого корня характеристического полинома определяется связь констант C и D

$$C_n = \frac{D_n K\alpha k_n}{(4G/3+K)k_n^2 + \rho\omega^2}, \qquad n = 1,2,3,4.$$

Решением системы (9), (10) являются следующие функции:

$$u(s,t) = \sum_{n=1}^{4} C_n\,\mathrm{e}^{k_n s}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad T(s,t) = \sum_{n=1}^{4} D_n\,\mathrm{e}^{k_n s}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}.$$

Здесь величины с индексами 1, 2 соответствуют прямой волне, величины с индексами 3, 4 — обратной волне. Так как волны распространяются в безграничном пространстве, то в силу условия отсутствия источников на бесконечности обратная волна не учитывается. Тогда

$$u(s,t) = C_1\,\mathrm{e}^{k_1 s}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{k_2 s}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad T(s,t) = D_1\,\mathrm{e}^{k_1 s}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + D_2\,\mathrm{e}^{k_2 s}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}. \tag{28}$$

Поскольку решение должно быть вещественным, в выражениях (28) следует отбросить мнимую часть. Для этого в (28) добавим комплексно-сопряженные слагаемые:

$$\begin{gathered} u(s,t) = C_1\,\mathrm{e}^{k_1 s}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{k_2 s}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + \bar C_1\,\mathrm{e}^{\bar k_1 s}\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \bar C_2\,\mathrm{e}^{\bar k_2 s}\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \\ T(s,t) = D_1\,\mathrm{e}^{k_1 s}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + D_2\,\mathrm{e}^{k_2 s}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + \bar D_1\,\mathrm{e}^{\bar k_1 s}\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \bar D_2\,\mathrm{e}^{\bar k_2 s}\,\mathrm{e}^{i\omega t}. \end{gathered} \tag{29}$$

Граничные условия (23), (24) позволяют определить все неизвестные в системе (29):

$$C_1 + C_2 = 2iu_0, \qquad D_1 + D_2 = 0.$$

Вещественную часть решения (29) можно записать в виде

$$\begin{multlined} u(s,t) = u_0\,\mathrm{e}^{-\gamma_h s}(a_1\cos(\omega t - \delta_h s) + a_2\sin(\omega t - \delta_h s)) + \\ + u_0\,\mathrm{e}^{-\gamma_a s}(a_3\cos(\omega t - \delta_a s) + a_4\sin(\omega t - \delta_a s)); \end{multlined} \tag{30}$$

$$\begin{multlined} T(s,t) = u_0\,\mathrm{e}^{-\gamma_h s}(b_1\cos(\omega t - \delta_h s) + b_2\sin(\omega t - \delta_h s)) - \\ - u_0\,\mathrm{e}^{-\gamma_a s}(b_1\cos(\omega t - \delta_a s) + b_2\sin(\omega t - \delta_a s)). \end{multlined} \tag{31}$$

Вещественные константы зависят только от параметров среды и частоты колебаний:

$$a_1 = \operatorname{Re}\Big(\frac{\Lambda_1 i}{\Lambda_1 - \Lambda_2}\Big), \quad a_2 = \operatorname{Im}\Big(\frac{\Lambda_1 i}{\Lambda_1 - \Lambda_2}\Big), \quad a_3 = -\operatorname{Re}\Big(\frac{\Lambda_2 i}{\Lambda_1 - \Lambda_2}\Big),$$

$$a_4 = -\operatorname{Im}\Big(\frac{\Lambda_2 i}{\Lambda_1 - \Lambda_2}\Big), \quad b_1 = \operatorname{Re}\Big(\frac{i}{\Lambda_1 - \Lambda_2}\Big), \quad b_2 = \operatorname{Im}\Big(\frac{i}{\Lambda_1 - \Lambda_2}\Big),$$

$$\Lambda_{1,2} = \frac{K\alpha k_{1,2}}{(4G/3 + K)k_{1,2}^2 + \rho\omega^2}.$$

Решение $u(s,t)$ и $T(s,t)$ представляет собой сумму двух бегущих волн. Первые слагаемые называются квазитепловыми составляющими, вторые — квазиупругими [9]. Эти составляющие термоупругой волны распространяются в среде с разными скоростями, подвергаются дисперсии и затухают. Квазитепловая составляющая акустической волны, распространяющейся со скоростью, равной скорости передачи тепла, называется вторым звуком [1]. Решение $u(s,t)$, $T(s,t)$ линейно зависит от значения амплитуды колебаний u_0 на границе.

4. Анализ графиков тепловых и акустических волн. Исследуем зависимость перемещения и температуры от координаты.

Так как для параметров реального материала при частотах, меньших критических значений, длины волн существенно меньше расстояния, на котором они затухают, то графики решения целесообразно представить в виде огибающих (рис. 5,*а*,*б*).

На рис. 5,*а,б* видно, что максимальное значение амплитуды тепловых волн достигается вблизи границы полупространства, по мере удаления от нее амплитуды уменьшаются.

С ростом частоты максимальное значение амплитуды тепловых волн увеличивается. В рассматриваемой задаче тепловые волны появляются вследствие эффекта связанности перемещений и температуры. С увеличением частоты ω амплитуда тепловых волн увеличивается. С уменьшением частоты огибающие волн, полученные с использованием классической и гиперболической теорий термоупругости, сближаются (кривые *3*, *4*).

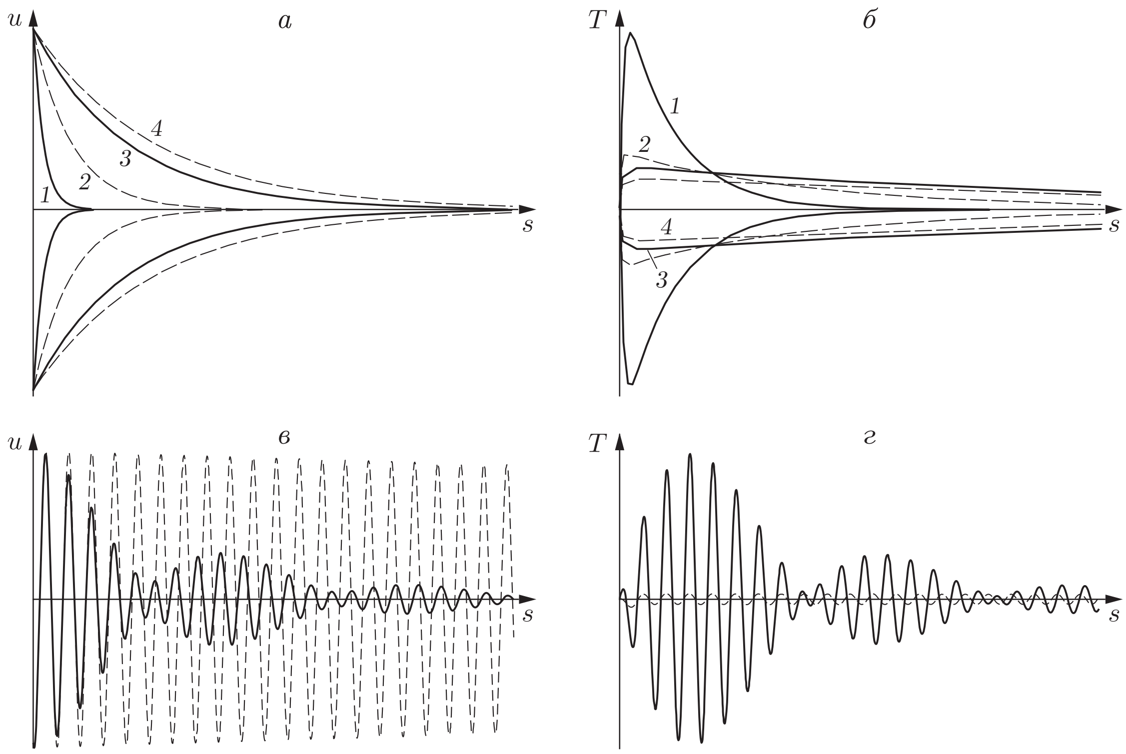

Рис. 5. Зависимости перемещений u (*а, в*) и температуры T (*б, г*) от координаты s, полученные с помощью классической (штриховые кривые) и гиперболической (сплошные кривые) теорий термоупругости:
а, б — $\Omega < \Omega_*$; *в, г* — $\Omega > \Omega_*$

Результаты сравнения кривых *1, 3* на рис. 5,*а,б* показывают, что по мере затухания акустических волн, вызванного увеличением частоты, максимальные значения амплитуд тепловых волн увеличиваются, а расстояние s, на которое они проникают в среду, уменьшается.

Наибольшая амплитуда тепловых волн при заданной частоте достигается при использовании гиперболической теории термоупругости (ср. кривые *1* и *3* на рис. 5,*б*). Это означает, что при учете постоянной релаксации теплового потока влияние эффекта связанности становится более существенным.

Затухание квазиупругих и квазитепловых составляющих решения характеризуется соответственно акустическими и тепловыми составляющими дисперсионных соотношений [10]. При рассматриваемых граничных условиях (температура на границе поддерживается постоянной) согласно гиперболической теории термоупругости при частотах, меньших Ω_*, и согласно классической теории термоупругости во всем диапазоне частот основной вклад в значения амплитуд перемещений и температуры дают квазиупругие составляющие. Следовательно, поведение решения (30), (31) описывается акустической составляющей дисперсионных соотношений.

При частотах, больших Ω_*, вклад квазитепловых составляющих становится существенным и на графиках решения видна модуляция перемещений и температуры (см. рис. 1,*в,г*). В данном случае на графике, полученном с использованием гиперболической теории термоупругости (сплошные линии на рис. 5), видно, что акустические и тепловые волны затухают в течение небольшого числа периодов. Затухание акустических и тепловых волн на графиках, полученных с использованием классической теории термоупругости (штриховые линии), происходит значительно медленнее. Поведение решения, полученного с помощью гиперболической теории термоупругости, определяется как акустической, так и тепловой составляющими дисперсионных соотношений. В случае использования гиперболической теории термоупругости при частотах, меньших Ω_*, амплитудная модуляция несущественна (см. рис. 5,*а*,*б*), поскольку квазитепловые составляющие малы по сравнению с квазиупругими.

Максимальное значение амплитуды тепловых волн T возрастает с увеличением констант b_1, b_2 в решении (31). Значения констант b_1 и b_2 стремятся к бесконечности при $\Lambda_1 \to \Lambda_2$. Это условие выполняется при сближении тепловых и акустических ветвей дисперсионных кривых, когда $k_1 \approx k_2$. При этом разность квазитепловых и квазиупругих составляющих в выражении (31) стремится к нулю. Для вычисления температуры по формуле (31) при $\tau = \tau_0$ и $\omega = \Omega_*$ нужно найти предел $\lim T$ при $k_1 \to k_2$. Согласно гиперболической теории термоупругости максимальное сближение ветвей дисперсионных зависимостей достигается при значениях времени релаксации теплового потока τ_0 и частоты Ω_*, согласно классической теории термоупругости — при значениях температурного коэффициента объемного расширения α_0 и частоты ω_* (см. рис. 3).

При других граничных условиях, в случае если перемещения на границе равны нулю: $u\big|_{s=0} = 0$, а температура на границе меняется по закону $T\big|_{s=0} = T_0 \sin(\omega t)$, решение будет аналогичным.

Заключение. В работе с использованием классической и гиперболической теорий термоупругости получены зависимости фазовой и групповой скоростей от частоты в удобной для аналитического исследования форме.

Найдены аналитические выражения для критического значения времени релаксации теплового потока τ_0 и критического значения температурного коэффициента объемного расширения α_0. Рассмотрены два варианта изменения фазовых и групповых скоростей; указаны зоны аномальной дисперсии тепловых и акустических волн. Установлено, что асимптоты фазовых и групповых скоростей совпадают, найдено выражение для них в аналитическом виде.

При описании рассматриваемых эффектов использованы два способа оценки частотных границ области применимости континуальной модели. Верхняя оценка границы диапазона частот, полученная в результате сравнения длин волн и межмолекулярного расстояния, составляет 800 ГГц; оценка, полученная в результате сравнения частот вынужденных колебаний среды с частотами дебаевского спектра, составляет 7550 ГГц [9].

Исследовано поведение амплитуд тепловых и акустических волн. Установлено, что согласно гиперболической теории термоупругости тепловые волны, возникающие за счет связанности, имеют бóльшую амплитуду по сравнению с амплитудой волн, полученных с помощью классической теории термоупругости.

Исследовано влияние частоты и времени релаксации теплового потока на глубину проникания волн в среду: чем больше значения частоты и времени релаксации теплового потока, тем быстрее затухают термоупругие волны.

Автор выражает благодарность Е. А. Ивановой, Д. А. Индейцеву и Д. П. Коузову за ценные советы при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шашков А. Г.** Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход / А. Г. Шашков, В. А. Бубнов, С. Ю. Яновский. Минск: Наука и техника, 1993.
2. **Qiu T. Q., Tien C. L.** Short-pulse laser heating on metals // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1992. N 35. P. 719–726.

3. **Tzou D. Y.** On the thermal shock wave induced by a moving heat source // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1989. N 111. P. 232–238.
4. **Соболев С. Л.** Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // Успехи. физ. наук. 1991. Т. 161, № 3. С. 5–29.
5. **Жоу Д.** Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. М.; Ижевск: Науч.-издат. центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2006.
6. **Wang C. C.** The principle of fading memory // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. V. 18. P. 343–366.
7. **Tzou D. Y.** Macro-to-microscale heat transfer. The lagging behaviour. N. Y.: Taylor and Francis, 1997.
8. **Lord H., Shulman Y.** A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
9. **Новацкий В.** Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970.
10. **Бабенков М. Б.** Анализ дисперсионных соотношений связанной задачи термоупругости с учетом релаксации теплового потока // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 112–121.
11. **Физическая** энциклопедия / Под ред. А. М. Прохорова. М.: Сов. энцикл., 1988. Т. 5. С. 80.

Поступила в редакцию 5/V 2012 г.,
в окончательном варианте — 6/VIII 2012 г.